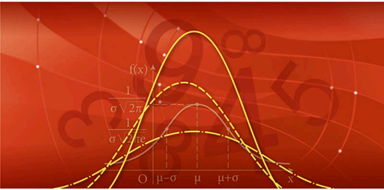
Θανάσης Π. Ξένος

Πιθανότητες



- Βασικές έννοιες των πιθανοτήτων
- Μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές
- Χαρακτηριστικά τυχαίων μεταβλητών
- Ειδικές κατανομές
- Συναρτήσεις τυχαίας μεταβλητής
- Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Περιέχει CD-ROM

με τις λύσεις των ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-311-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές των Ανωτάτων και Τεχνολογικών Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων και περιέχει την ύλη του μαθήματος των Πιθανοτήτων. Μπορεί, όμως, να φανεί χρήσιμο σε εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, σε υποψήφιους δασκάλους των Μαθηματικών και στους μαθητές που συμμετέχουν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Αναπτύσσεται διεξοδικά η θεωρία των Πιθανοτήτων, απαλλαγμένη από περιττές μαθηματικές λεπτομέρειες. Σε κάθε έννοια που εισάγεται ακολουθούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για την πλήρη κατανόησή της.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των Πιθανοτήτων (δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα, πιθανότητα, συνδυαστική, δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θεώρημα ολικής πιθανότητας και τύπος του Bayes).

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες «συνάρτηση κατανομής» και «συνάρτηση πιθανότητας» των μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών.

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τα χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών, όπως είναι η μέση τιμή, η διασπορά, η τυπική απόκλιση, οι ροπές και οι ροπογεννήτριες.

Το τέταρτο κεφάλαιο πραγματεύεται τις κυριότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές, προσεγγίσεις μεταξύ των διάφορων κατανομών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στις συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής, και συγκεκριμένα στην εύρεση της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $Y = g(X)$.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, οι κοινές συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας, τα χαρακτηριστικά τους καθώς και οι συναρτήσεις δύο τυχαίων μεταβλητών.

Στο τέλος του βιβλίου παρατίθενται δύο παραρτήματα. Στο πρώτο παράρτημα περιέχονται οι πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής και των κατανομών x^2, t και F. Στο δεύτερο παράρτημα είναι συγκεντρωμένοι όλοι οι τύποι και οι ιδιότητες των Πιθανοτήτων, κάτι που βοηθά τον αναγνώστη για μια πλήρη εικόνα του μαθήματος. Ακολουθεί ευρετήριο όρων και βιβλιογραφία.

Οι λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων δίνονται στο CD που συνοδεύει το βιβλίο.

Θανάσης Ξένος,
Θεσσαλονίκη 2012

Περιεχόμενα

1^{o} Κεφάλαιο

Βασικές Έννοιες των Πιθανοτήτων

1.1 Δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα

Θ. Ξένος

❖ Τα φυσικά φαινόμενα ή πειράματα ή επιστημονικά μοντέλα χαρακτηρίζονται είτε ως **αιτιοκρατικά** (έχουν βέβαια αποτελέσματα) είτε ως **στοχαστικά**, που τα αποτελέσματά τους δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν με ακρίβεια. Επειδή τα στοχαστικά πειράματα επηρεάζονται κατά κάποιον τρόπο από τον παράγοντα «τύχη», λέγονται και **πειράματα τύχης**.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος και συμβολίζεται με το Ω.

Παράδειγμα 1.1.1

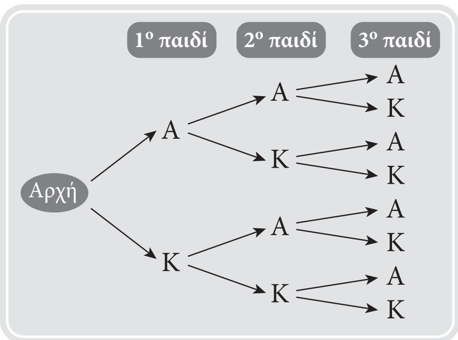
α) Αν ρίξουμε ένα ζάρι μια φορά, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}\,.$$

β) Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές, τότε ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ζεύγη $(1,1),\,(1,2),\,\ldots,\,(1,6),\,(2,1),\,(2,2),\,\ldots,\,(6,6)$, δηλαδή

$$\Omega=\{(i,j)\,|\,i=1,2,\ldots,6 \;\text{ και }\; j=1,2,\ldots,6\}\,.$$

γ) Αν θεωρήσουμε τις οικογένειες με τρία παιδιά και μας ενδιαφέρει η σειρά γέννησης και το φύλο των παιδιών, τότε ο δειγματικός χώρος μπορεί να γραφεί εύκολα, αφού προηγουμένως κάνουμε ένα **δεντροδιάγραμμα**.



Άρα,

$$\Omega=\{AAA,\,AAK,\,AKA,\,AKK,\,KAA,\,KAK,\,KKA,\,KKK\}.$$

▲

❖ Κάθε υποσύνολο Α του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται **ενδεχόμενο** του πειράματος.

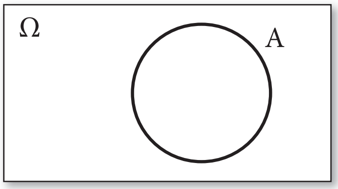
Αν το ενδεχόμενο Α είναι μονοσύνολο, τότε ονομάζεται **απλό ενδεχόμενο**, διαφορετικά ονομάζεται **σύνθετο ενδεχόμενο**.

Αν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του, είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου Α, τότε λέμε ότι το Α **πραγματοποιείται**. Κάθε αποτέλεσμα ενός πειράματος ανήκει στο δειγματικό χώρο Ω και γι' αυτό το Ω ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Το κενό σύνολο θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου και ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Ένας δειγματικός χώρος Ω μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος στοιχείων. Αν τα στοιχεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν, ένα προς ένα, με τους θετικούς ακεραίους (ή με τμήμα τους), τότε ο Ω ονομάζεται **διακριτός** δειγματικός χώρος. Αν όμως τα στοιχεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν, ένα προς ένα, με τα σημεία ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών, τότε ο Ω ονομάζεται **συνεχής** ή μη διακριτός δειγματικός χώρος.

Για το δειγματικό χώρο $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, το πλήθος των ενδεχομένων είναι 2^n, αφού **κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα**.

Γεωμετρικά, ο δειγματικός χώρος Ω παριστάνεται μ' ένα ορθογώνιο, ενώ τα ενδεχόμενα με κλειστές περιοχές μέσα στο ορθογώνιο. Αυτά τα σχήματα ονομάζονται **διαγράμματα Venn**.



Παράδειγμα 1.1.2

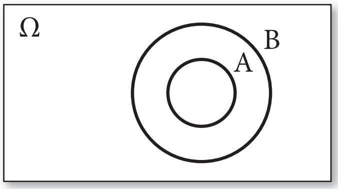
α) Αν ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να φέρουμε για πρώτη φορά «κεφαλή», τότε έχουμε το διακριτό μη πεπερασμένο δειγματικό χώρο

$$\Omega=\{\text{Κ, ΓΚ, ΓΓΚ, ΓΓΓΚ}, \ldots\}.$$

β) Αν μας ενδιαφέρει ο χρόνος ζωής μιας ηλεκτρικής λάμπας, τότε ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής, αφού είναι διάστημα της μορφής $[0, t]$. ▲

❖ Για τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις.

i) Αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση ενδεχομένου Β, τότε λέμε ότι το Α είναι **υποσύνολο** του Β και γράφουμε $A \subseteq B$.



5.2 Η συνάρτηση κατανομής της Y = g(X)

Θ. Ξένος

❖ Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με τιμές $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ και αντίστοιχες πιθανότητες

$$P(X=x_i)=f_X(x_i), \quad i=1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Η τ.μ. $Y=g(X)$ παίρνει τις τιμές $y_i=g(x_i)$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$f_Y(y_i)=P(Y=y_i)=(P(X=x_{i1})+P(X=x_{i2})+\ldots=\sum_{g(x_i)=y_i} f_X(x_i),$$

όπου $x_{i1}, x_{i2}, \ldots$ είναι οι τιμές της X με $g(x_i)=y_i$.

Στην απλή περίπτωση που η συνάρτηση g είναι «1−1», τότε ισχύει

$$f_Y(y_i)=f_X(x_i)$$

Για τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y=g(X)$ ισχύει

$$F_Y(y)=\sum_{y_i\le y} f_Y(y_i).$$

Παράδειγμα 5.2.1

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. X δίνεται στο διπλανό πίνακα.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ.

$Y=X^2-4X+4$, καθώς και η $E(Y)$.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Λύση

Οι τιμές της X είναι 0, 1, 2 και 3, ενώ οι τιμές της $Y=X^2-4X+4=(X-2)^2$ είναι 0, 1 και 4.

Υπολογίζουμε, τώρα τις πιθανότητες

$P(Y=0)$, $P(Y=1)$ και $P(Y=4)$.

i) $P(Y=0)=P((X-2)^2=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$

ii) $P(Y=1)=P((X-2)^2=1)=P(X=3 \text{ ή } X=1)=P(X=3)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$

iii) $P(Y=4)=P((X-2)^2=4)=P(X=0)=\frac{1}{8}$.

Έτσι, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y δίνεται στο διπλανό πίνακα.

y	0	1	4
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Η μέση τιμή της Y είναι

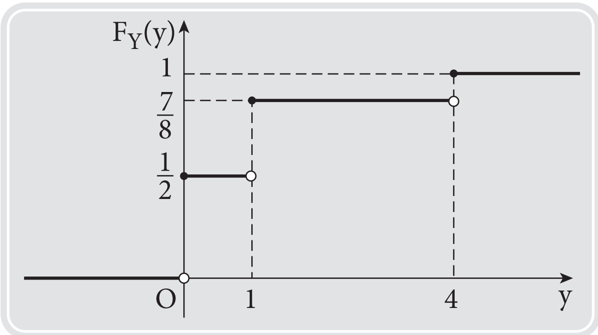
$$E(Y)=\sum_{i=1}^{4} y_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{4}(x_i-2)^2 f(x_i)$$

$$=(0-2)^2\cdot\frac{1}{8}+(1-2)^2\cdot\frac{2}{8}+(2-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(3-2)^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad \text{ή}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{3} y_i f(y_i)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι (βλ. §2.3α)

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le y<1 \\ \frac{7}{8}, & 1\le y<4 \\ 1, & y\ge 4 \end{cases}$$



▲

❖ Αν η συνάρτηση $y=g(x)$ είναι γνησίως μονότονη, άρα και αντιστρέψιμη, τότε:

i) Αν είναι γνησίως αύξουσα,

$$F_Y(y)=P(g(X\le y)=P(X\le g^{-1}(y))=P(X\le x)=F_X(x).$$

ii) Αν είναι γνησίως φθίνουσα,

$$F_Y(y)=P(g(X\le y)=P(X\ge g^{-1}(y))=P(X\ge x)=1-P(X<x)$$

$$=1-F_X(x^-)=1-[F_X(x)-f_X(x)].$$

Συμπέρασμα:

$$F_Y(y)=\begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & , \quad \text{αν } g \text{ γνησίως αύξουσα} \\ 1-F_X(g^{-1}(y))+P(X=g^{-1}(y)), & \text{αν } g \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$$

Παράδειγμα 5.2.2

Να βρεθεί η κατανομή της $Y=\alpha X^2$, όπου α θετική σταθερά και η X είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-c, c]$.

Λύση

Έχουμε:

$$F_y(y)=P(Y\le y)=P(\alpha X^2\le y)=P\left(X^2\le\frac{y}{\alpha}\right)$$

i) Αν $y<0$, η ανίσωση $X^2\le\frac{y}{\alpha}$ είναι αδύνατη και επομένως $P\left(X^2\le\frac{y}{\alpha}\right)=0$.

ii) Αν $y\ge 0$, τότε ισχύει

$$F_Y(y)=P\left(-\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\le X\le\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right)=F_X\left(\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι, αν $X\sim U(\alpha,\beta)$, τότε (βλ. §4.9)

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<\alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\le x<\beta \\ 1 & , \quad x\ge\beta \end{cases}$$

Εδώ έχουμε $\alpha=-c$ και $\beta=c$, οπότε

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-c \\ \dfrac{x+c}{2c}, & -c\le x<c \\ 1 & , \quad x\ge c \end{cases}$$

και επομένως

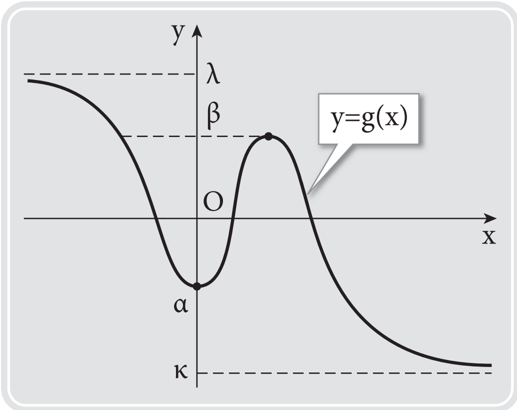
$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \dfrac{\sqrt{\dfrac{y}{\alpha}}+c}{2c}-\dfrac{-\sqrt{\dfrac{y}{\alpha}}+c}{2c}=\dfrac{1}{c}\sqrt{\dfrac{y}{\alpha}}, & 0\le y<\alpha c^2 \\ 1, & y\ge \alpha c^2 \end{cases}$$

(Η ανίσωση $0\le y<\alpha c^2$ προέκυψε από την $0\le\sqrt{\dfrac{y}{\alpha}}<c$).

▲

Παράδειγμα 5.2.3

Αν η τ.μ. X έχει συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y=g(X)$, όπου $g(x)$ είναι η πραγματική συνάρτηση του διπλανού σχήματος.



Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\kappa<g(x)<\lambda$.

i) Αν $y<\kappa$, τότε $F_Y(y)=0$, αφού δεν υπάρχει x με $g(x)\le y<\kappa$.

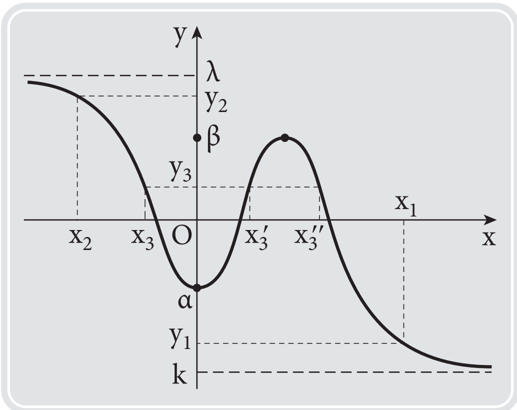
ii) Αν $y\ge\lambda$, τότε $g(x)\le y$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως $F_Y(y)=1$.

iii) Αν $\kappa\le y<\alpha$, τότε για κάποιο $y_1=f(x_1)$ ισχύει

$g(x)\le y_1$,

όταν $x\ge x_1$ και επομένως

$$F_Y(y_1)=P(g(x)\le y_1)=P(X\ge x_1)$$
$$=1-F_X(x_1)$$



iv) Αν $\beta\le y<\lambda$, τότε για κάποιο $y_2=f(x_2)$ ισχύει $g(x)\le y_2$ όταν $x\ge x_2$ και επομένως

$$F_Y(y_2)=P(g(x)\le y_2)=P(X\ge x_2)=1-F_X(x_2)\,.$$

v) Αν $\alpha\le y<\beta$, τότε για κάποιο $y_3=f(x_3)=f(x_3')=f(x_3'')$ ισχύει $g(x)\le y_3$, όταν $x_3\le x\le x_3'$ ή $x\ge x_3''$ και επομένως

$$F_Y(y_3)=P(g(x)\le y_3)=P(x_3\le X\le x_3')+P(X\ge x_3'')$$
$$=F_X(x_3')-F_X(x_3)+1-F_X(x_3'')\,.$$ ▲

5.3 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y = g(X)

Θ. Ξένος

❖ Θα αποδείξουμε το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα

Θεώρημα 5.3

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ και η πραγματική συνάρτηση $y=g(x)$ είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη με $g'(x)\neq 0$, τότε η τ.μ. $Y=g(X)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x)}{\left|\dfrac{dy}{dx}\right|}$$

Απόδειξη

i) Αν η $y=g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε $g'(x)>0$.

Επίσης, η $x=g^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα με $\dfrac{d}{dy}(g^{-1}(y))=\dfrac{1}{g'(x)}>0$.

Γνωρίζουμε ότι (βλ. §5.2) $F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))$

και με παραγωγίσιμη προκύπτει

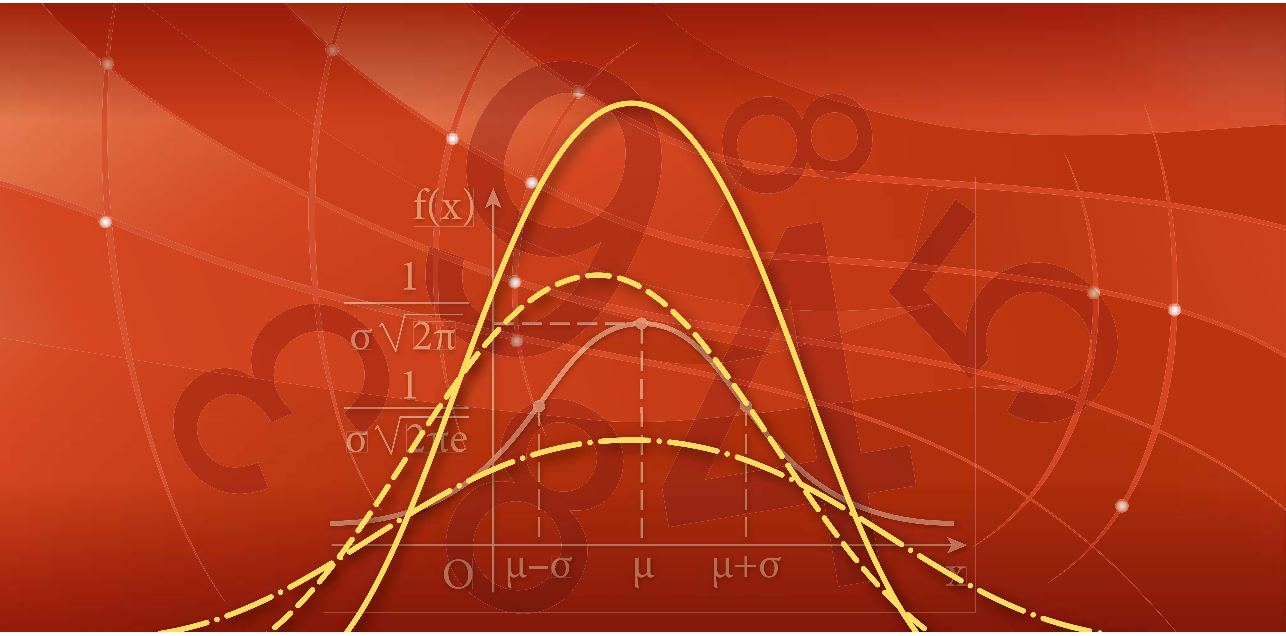
$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}\Big(F_X(g^{-1}(y))\Big)=F_X'(g^{-1}(y))\cdot\frac{d}{dy}(g^{-1}(y))$$

$$=f_X(x)\cdot\frac{1}{g'(x)}=f_X(x)\cdot\frac{1}{\left|\dfrac{dy}{dx}\right|}\qquad\left(\text{αφού }\frac{dy}{dx}=g'(x)>0\right).$$

Θανάσης Π. Ξένος

Πιθανότητες

Λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

Το παρόν αποτελεί συνοδευτικό υλικό του βιβλίου του Θανάση Ξένου «Πιθανότητες» με ISBN 978-960-456-311-1

Παραγωγή **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Περιεχόμενα

1ο Κεφάλαιο Βασικές Έννοιες των Πιθανοτήτων

1.1 α) $(A\cap B^c\cap \Gamma^c)\cup(B\cap A^c\cap \Gamma^c)\cup(\Gamma\cap A^c\cap B^c)$.

β) $A^c\cap B^c\cap \Gamma^c=(A\cup B\cup \Gamma)^c$.

γ) $(A\cap B\cap \Gamma^c)\cup(A\cap \Gamma\cap B^c)\cup(B\cap \Gamma\cap A^c)$.

1.2 α) $A-(B\cup\Gamma)=A\cap(B\cup\Gamma)^c=A\cap(B^c\cap\Gamma^c)$ και

$(A-B)\cap(A-\Gamma)=(A\cap B^c)\cap(A\cap\Gamma^c)=A\cap B^c\cap\Gamma^c$.

β) $(A\cup B)\cap(B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Gamma)$

$=([(A\cup B)\cap B]\cup[(A\cup B)\cap\Gamma])\cap(A\cup\Gamma)$

$=B\cup[(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Gamma)]\cap(A\cup\Gamma)$

$=[(B\cup(B\cap\Gamma))\cup(A\cap\Gamma)]\cap(A\cup\Gamma)$

$=[B\cup(A\cap\Gamma)]\cap(A\cup\Gamma)$

$=[B\cap(A\cup\Gamma)]\cup[(A\cap\Gamma)\cap(A\cup\Gamma)]$

$=[(A\cap B)\cup(B\cap\Gamma)]\cup(A\cap\Gamma)$.

1.3 $A-[B-(\Gamma-\Delta)]=A-[B-(\Gamma\cap\Delta^c)]=A-[B\cap(\Gamma\cap\Delta^c)^c]$

$=A-[B\cap(\Gamma^c\cup\Delta)]=A\cap[B^c\cup(\Gamma^c\cup\Delta)^c]$

$=A\cap[B^c\cup(\Gamma\cap\Delta^c)]=(A\cap B^c)\cup(A\cap\Gamma\cap\Delta^c)$.

1.4 $(A\vartriangle B)\cap(A\vartriangle\Gamma)=[(A-B)\cup(B-A)]\cap[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)]=$

$=[(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap[(A\cap\Gamma^c)\cup(\Gamma\cap A^c)]$

$=[(A\cap B^c)\cap(A\cap\Gamma^c)]\cup[(A\cap B^c)\cap(\Gamma\cap A^c)]\cup[(B\cap A^c)\cap(A\cap\Gamma^c)]$

$\cup[(B\cap A^c)\cap(\Gamma\cap A^c)]$

$=(A\cap B^c\cap\Gamma^c)\cup\varnothing\cup\varnothing\cup(A^c\cap B\cap\Gamma)=(A\cap B^c\cap\Gamma^c)\cup(A^c\cap B\cap\Gamma)$.

1.5 $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}4$, $P(A)-P(A\cap B)=0{,}1$ και $P(B)-P(A\cap B)=0{,}2$.

Άρα, $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}3$, $P(A\cap B)=0{,}1$ και

$P(A\vartriangle B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0{,}3$.

1.6 α) $P(A\cup B)=1{,}4-P(A\cap B)\le 1\Rightarrow P(A\cap B)\ge 0{,}4$

$A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le 0{,}6$.

β) $A\cup B\supseteq B\Rightarrow P(A\cup B)\ge 0{,}8$.

γ) $P(A\cap B^c)=0{,}6-P(A\cap B)$ και $0{,}4\le P(A\cap B)\le 0{,}6$.

1.7 Αν δεν είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)=\frac{13}{12}>1,\ \text{άτοπο.}$$

1.8 $$P(0)+P(1)+P(2)+\ldots+P(2n)=1\Rightarrow P(0)=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right]=$$

$$=1-\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-1\right]}{\frac{1}{2}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

$$P(B)=P(2)+P(4)+\ldots+(2n)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right].$$

$$P(\Gamma)=1-[P(0)+P(1)+P(2)]=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

1.9 α) $P(A\cup B)$

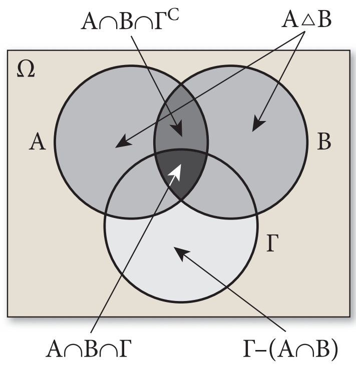
$=P(A\triangle B)+P(A\cap B\cap \Gamma)+P(A\cap B\cap \Gamma^c)=0,6$.

β) $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A\cup B)+P(\Gamma-(A\cup B))=0,8$.

γ) $P(A\cup B\cup \Gamma)-P(A\cap B)$

$=0,8-[P(A\cap B\cap \Gamma)+P(A\cap B\cap \Gamma^c)=0,6$.

δ) $1-P(A\cup B\cup \Gamma)=0,2$.



1.10 Ο αριθμός που θα πάρουμε δεν πρέπει να διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 5, αφού $1000=2^3\cdot 5^3$.

Αν A : «ο αριθμός διαιρείται με το 2»

B : «ο αριθμός διαιρείται με το 5»,

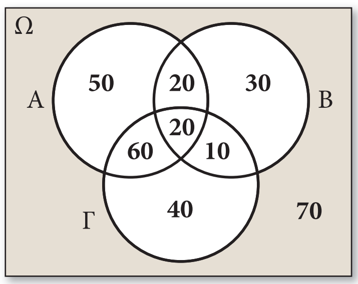
τότε $P(A^c\cap B^c)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=0,4$.

1.11 A = {φοιτητές που καπνίζουν}

B = {φοιτητές που διασκεδάζουν καθημερινά}

Γ = {φοιτητές που σιτίζονται στη λέσχη}

Οι αριθμοί δείχνουν τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων



α) $\dfrac{50+60}{300}=\dfrac{11}{30}$