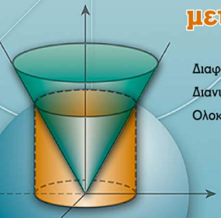
Θανάση Π. Ξένου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Για τους φοιτητές των ΑΕΙ – ΤΕΙ

Λογισμός πολλών μεταβλητών



Διαφορικός Λογισμός

Διανυσματική Ανάλυση

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι. και περιέχει την ύλη του μαθήματος **Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός** συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Παρουσιάζονται τα εξής κεφάλαια:

1) Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
2) Διανυσματική Ανάλυση
3) Διπλά Ολοκληρώματα
4) Τριπλά Ολοκληρώματα
5) Επικαμπύλια Ολοκληρώματα
6) Επιφανειακά Ολοκληρώματα
7) Ολοκληρώματα εξαρτώμενα από παράμετρο και γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα

Σε κάθε κεφάλαιο δίνεται συνοπτικά η θεωρία, αποσαφηνίζονται όλες οι έννοιες με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και λύνονται υποδειγματικά κατάλληλα επιλεγμένες ασκήσεις.

Θανάσης Ξένος
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2005.

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ 2ο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΜΕΡΟΣ 3ο

ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 4ο

ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 5ο

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 6ο

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 7ο

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΔΙΠΛΑ και ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

1.1 Όριο και συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

- Μια συνάρτηση $z=f(x, y)$ δύο πραγματικών μεταβλητών x και y έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$ ή τμήμα αυτού.
  Για παράδειγμα, η συνάρτηση $z=\sqrt{3-2x^2-y^2}$ ορίζεται όταν $2x^2+y^2\leq 3$, δηλαδή έχει πεδίο ορισμού το εσωτερικό και τα σημεία της έλλειψης $2x^2+y^2=3$.

  Μια συνάρτηση $\omega=f(x, y, z)$ τριών πραγματικών μεταβλητών έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^3$ ή τμήμα αυτού.
  Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\omega=x^3+y^3+z^3-3xyz$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^3$.

- Μια **ακολουθία σημείων**

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n),\ \ldots$$

  του $\mathbb{R}^2$ λέμε ότι έχει **όριο το σημείο** $P(x, y)$, όταν γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n>n_0$ να ισχύει $d(P_n, P)<\varepsilon$.

  > **Ιδιότητα:** Η ακολουθία σημείων (P_n) έχει όριο το σημείο P, αν και μόνον αν $\lim\limits_{n\bullet} x_n=x$ και $\lim\limits_{n\bullet} y_n=y$.

- Ένα σημείο M του συνόλου A $\mathbb{R}^\nu$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του A, όταν σε κάθε περιοχή του M υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό του M. Διαφορετικά, το M λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του A.

- Έστω η καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις $x=f(t)$ και $y=g(t)$, όπου οι f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις του t. Αν οι f και y είναι περιοδικές συναρτήσεις, τότε **η καμπύλη C είναι κλειστή**.

Όριο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $z=f(x, y)$ με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $M(x_0, y_0)$ σημείο συσσώρευσης του A.

Λέμε ότι η f έχει **όριο** $\ell \in \mathbb{R}$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και γράφουμε

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \ell \quad \text{ή} \quad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = \ell \quad (M(x, y) \in A)$$

όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε

$$M \in A \quad \text{με} \quad 0 < (MM_0) < \delta \quad \text{να ισχύει} \quad |f(x, y)-\ell| < \varepsilon.$$

Η συνθήκη $0<(MM_0)<\delta$ γράφεται και ως εξής:

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \text{και} \quad 0 < |y-y_0| < \delta.$$

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι η εξής:

Η $f(x, y)$ έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$, αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία (M_n) σημείων του συνόλου $A-\{M_0\}$ με $M_n \to M_0$ ισχύει $f(M_n) \to \ell$.

Από την ιδιότητα αυτή έχουμε και τα εξής συμπεράσματα, που μας βοηθούν **για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

α) Αν υπάρχει ακολουθία (P_n) με $P_n \neq P_0$ και $P_n \to P_0$, ενώ η $(f(P_n))$ δεν έχει όριο, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$.

β) Αν υπάρχουν ακολουθίες (P_n) και (P'_n) με $P_n, P'_n \neq P_0$ και $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = \lim\limits_{n \to \infty} P'_n = P_0$, ενώ $\lim f(P_n) \neq \lim f(P'_n)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$.

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του ορίου συνάρτησης μιας μεταβλητής (κριτήριο παρεμβολής, όρια και πράξεις κ.λπ.).

Τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)\right)$ και $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)\right)$

Έστω $P_0(x_0, y_0)$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού D της $f(x, y)$. Αν για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει το $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, τότε αυτό είναι συνάρτηση του x και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)\right)$, αυτό λέγεται **διπλό όριο** της f στο

$P_0(x_0, y_0)$.

Ομοίως ορίζεται το $\lim\limits_{y \to y_0} [\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)]$.

Η ύπαρξη αυτών των διπλών ορίων δε σημαίνει ότι υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Ομοίως, η ύπαρξη του $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ δε σημαίνει την ύπαρξη διπλών ορίων της f.

Ισχύει η εξής πρόταση:

Αν υπάρχουν τα διπλά όρια και το $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, τότε τα διπλά όρια είναι ίσα.

Πόρισμα

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right) \neq \lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right)$, τότε **δεν υπάρχει το $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$**.

Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) λέγεται **συνεχής** στο σημείο $P_0 \in D$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $P \in D$ με $(PP_0) < \delta$ να ισχύει $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$.

- **Η f είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο του D.**
- **Η f είναι συνεχής στο σημείο συσσώρευσης $P_0 \in D$,** αν και μόνον αν ισχύει

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού της είναι:

i) οι πολυωνυμικές, όπως π.χ. η $f(x, y) = 3x^2 - 4yx + y^3$

ii) οι ρητές, όπως π.χ. η $f(x, y, z) = \dfrac{2xyz}{x^2 + y^2 - z^2}$

iii) οι πράξεις συνεχών συναρτήσεων

iv) οι f^ν, $\sqrt[\nu]{f}$, $|f|$, όταν η f είναι συνεχής όπως π.χ. η

$$f(x, y) = (3x - y)^4 + \sqrt[5]{\frac{1}{xy}}$$

v) η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

vi) οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές και οι λογαριθμικές συναρτήσεις, όπως π.χ. η $f(x, y) = \ln(x^2+y^2) - \eta\mu^3(x-y)$.

Υποδειγματικές ασκήσεις ορίου και συνέχειας

Άσκηση 1.1.1

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{x^3 + y^3 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Λύση

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^3 + y^3 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3 + x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$

- $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + y^3 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{y^3 - y^2}{y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}(y-1) = -1.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right) \neq \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Άσκηση 1.1.2

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2 + y^2} = 0.$

Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου.

Έστω $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2 + y^2}$, όπου $(x, y)\in\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$.

Για κάθε $\varepsilon>0$ θεωρούμε την ανισότητα $|f(x, y)-0|<\varepsilon$ και εξετάζουμε αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε οι ανισότητες $0<|x-0|<\delta$ και $0<|y-0|<\delta$ να δίνουν την $|f(x, y)-0|<\varepsilon$ (ή η ανισότητα $0<\sqrt{x^2 + y^2}<\delta$ να δίνει την $|f(x, y)-0|<\varepsilon$). Είναι

$$|f(x, y)-0| = \left|xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \le |xy| = |x|\cdot|y|, \quad \text{αφού} \quad \left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \le 1.$$

Έτσι, αν πάρουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$, τότε για κάθε $(x, y)\in\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$ με $|x|<\delta$ και $|y|<\delta$ ισχύει $|f(x, y)-0|<\varepsilon$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} f(x, y)=0$.

Άσκηση 1.1.3

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ δεν έχει όριο όταν $(x, y) \quad (0, 0)$.

Απόδειξη

- Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\quad 0}\left(\lim_{y\quad 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\quad 0} 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{y\quad 0}\left(\lim_{x\quad 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\quad 0} 0 = 0$$

οπότε δε συμπεραίνουμε για την ύπαρξη ή μη του $\lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} f(x, y)$.

- Θα βρούμε δύο ακολουθίες (P_n) και (P_n) με $\lim P_n=\lim P_n=(0, 0)$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim f(P_n) \;\pi\; \lim f(P_n).$$

Δύο τέτοιες ακολουθίες, για παράδειγμα, είναι οι

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{και} \quad P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Έχουμε:

$$f(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0 \quad 0 \quad \text{και} \quad f(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}.$$

Άρα, δεν υπάρχει το όριο της $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 1.1.4

Να βρείτε το όριο της συνάρτησης $f(x, y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ στο σημείο $(0, 0)$.

Λύση

Με το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες **x=ρσυνθ, y=ρημθ** έχουμε

$$f(x, y) = \frac{\rho^3 συν^3 \vartheta + \rho^3 ημ^3 \vartheta}{\rho^2 συν^2 \vartheta + \rho^2 ημ^2 \vartheta} = \rho(συν^3\vartheta + ημ^3\vartheta)\ .$$

Αν $(x, y) \quad (0, 0)$, τότε $\rho \quad 0$ και $\vartheta \in [0, 2\pi)$.
Επειδή $|f(x, y)| = \rho|συν^3\vartheta + ημ^3\vartheta| < 2\rho$ και $\lim\limits_{\rho \quad 0} 2\rho = 0$,
προκύπτει ότι

$$\lim_{(x, y) \quad (0, 0)} f(x, y) = 0$$

β τρόπος:

$$|f(x, y)| = \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x| + |y|$$

και επειδή $\lim\limits_{(x, y) \quad (0, 0)} (|x|+|y|) = 0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{(x, y) \quad (0, 0)} f(x, y) = 0$.

▶ Σχόλιο:

Οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x, y)$ έχουν όριο στο (x_0, y_0) το $f(x_0, y_0)$, εφόσον $(x_0, y_0) \in D_f$.

Έτσι, π.χ. έχουμε

i) $\lim\limits_{\substack{x \quad 0 \\ y \quad \frac{\pi}{2}}} (x^3 + y^3 - ημxy) = 0^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - ημ\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}$.

ii) $\lim\limits_{\substack{x \quad 0 \\ y \quad 0}} [e^{x-y^3} \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1)] = e^0 \cdot \ln 1 = 0$.

Άσκηση 1.1.5

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot ημ\dfrac{1}{y} + y \cdot ημ\dfrac{1}{x} & ,\ αν\ \ x \cdot y\ π\ 0 \\ 0 & ,\ αν\ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Λύση

Η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $xπ0$ και $yπ0$. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Θα πρέπει δηλαδή να βρούμε το $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ και να διαπιστώσουμε αν είναι ίσο με μηδέν ή όχι.

Έχουμε

$$|f(x, y)| = \left|x\eta\mu\frac{1}{y} + y\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|\left|\eta\mu\frac{1}{y}\right| + |y|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| + |y|$$

και
$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}(|x|+|y|) = 0.$$

Επομένως $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)=0=f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 1.1.6

Να βρείτε το όριο των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(0, 0)$.

α) $f(x, y) = \dfrac{(x+1)^2\eta\mu y}{y} + \dfrac{\eta\mu(xy)}{\eta\mu x\cdot\eta\mu y}$ **β)** $f(x, y) = xy\ln(x^2+y^2)$

γ) $f(x, y) = \dfrac{x|y|^3}{x^2 + y^2}$ **δ)** $f(x, y) = (x^2+y^2)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

Λύση

α) $$f(x, y) = (x+1)^2\cdot\frac{\eta\mu y}{y} + \frac{\dfrac{\eta\mu(xy)}{xy}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu y}{y}}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\eta\mu y}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\eta\mu(xy)}{xy} = 1$,

συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = (0+1)^2\cdot 1 + \dfrac{1}{1\cdot 1} = 2$.

β) Το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Με το μετασχηματισμό $x=\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=\rho\eta\mu\vartheta$ έχουμε

$$f(\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta, \rho\eta\mu\vartheta) = \rho^2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\ln\rho^2 = \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot(\rho^2\ln\rho^2)$$
$$= (2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta)\cdot(\rho^2\ln\rho) = \eta\mu 2\vartheta\cdot(\rho^2\ln\rho).$$

Αν $(x, y)\to(0, 0)$, τότε $\rho\to 0$ και $\vartheta\in[0, 2n)$

- Για κάθε ϑ ισχύει $|\eta\mu 2\vartheta|\le 1$.

- $\lim\limits_{\rho\to 0}(\rho^2\ln\rho) = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\ln\rho}{\dfrac{1}{\rho^2}}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\ln\rho)'}{\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)'} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\rho}}{\dfrac{-2}{\rho^3}} = \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\dfrac{-\rho^2}{2}\right) = 0.$

Επομένως $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

γ) Με $x=\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta$ και $y=\rho\eta\mu\vartheta$ έχουμε

$$f(\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta,\ \rho\eta\mu\vartheta) = \frac{\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\rho^3|\eta\mu\vartheta|^3}{\rho^2} = \rho^2\sigma\upsilon\nu\vartheta|\eta\mu\vartheta|^3$$

$$|f(\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta,\ \rho\eta\mu\vartheta)| \le \rho^2 \quad \text{και} \quad \lim_{\rho\to 0}\rho^2 = 0.$$

Άρα $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

β τρόπος

$$|f(x, y)| = \frac{|x|\cdot|y|^3}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot|y^3|}{y^2} = |x|\cdot|y| \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|\cdot|y|) = 0,$$

οπότε και $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

δ) $|f(x, y)| = (x^2+y^2)\left|\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le x^2+y^2$ και $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2) = 0.$

Άρα $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

Άσκηση 1.1.7

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^5 - 6x^3y^2 + 3y^5}{(x^2+y^2)^2} & ,\ \text{αν}\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ,\ \text{αν}\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής σ' όλο το xy– επίπεδο.

Λύση

- Η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$ ως ρητή συνάρτηση.
- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο σημείο $(0, 0)$

  Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Πράγματι:

$$|f(x, y)| = \frac{|3x^5-6x^3y^2+3y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{3|x|^5 + 6|x|^3\cdot |y|^2 + 3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3(x^4|x|+2x^2y^2|x|+y^4|y|)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Επειδή $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}}$ και $|\mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}}$,

έχουμε $$|f(x, y)| \leq \frac{3\sqrt{x^2+y^2}(x^4+2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Αλλά $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (3\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

κι επομένως $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0,$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής και στο $(0, 0)$.

Άσκηση 1.1.8

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν όριο στο σημείο $(0, 0)$.

α) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^4 + y^4}$, **β)** $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, γ) $f(x, y) = \dfrac{x + y + 1}{x^2 - y^2}$.

Λύση

α) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$P_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0) \quad \text{και} \quad P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0)$$

- $f(P_n) = \dfrac{0}{0^4 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^4} = 0 \quad 0$

- $f(P_n) = \dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^4}} = \dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{2}{n^4}} = \dfrac{n^3}{2} \quad +\bullet$

Άρα, η $f(x, y)$ δεν έχει όριο στο σημείο $(0, 0)$.

β) Για τις ίδιες ακολουθίες βρίσκουμε

$$f(P_n) = -1 \quad -1 \quad \text{και} \quad f(P_n) = 0 \quad 0.$$

γ) Για τις ακολουθίες

$$P_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad (0, 0) \quad \text{και} \quad P_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (0, 0)$$

έχουμε

- $f(P_n) = \dfrac{\dfrac{1}{n} + 1}{-\dfrac{1}{n^2}} = -n^2\left(\dfrac{1}{n} + 1\right) = -n - n^2 \quad -\bullet$

- $f(P_n) = \dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n} + 1}{\dfrac{4}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\dfrac{3}{n} + 1}{\dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{n^2}{3}\left(\dfrac{3}{n} + 1\right) = n + \dfrac{n^2}{3} \quad +\bullet$

Άρα, η $f(x, y)$ δεν έχει όριο στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 1.1.9

Να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση $f(x, y) = \dfrac{x\eta\mu x + y\eta\mu y}{x^2 + y^2}$ επεκτείνεται συνεχώς σ' όλο το $\mathbb{R}^2$.

β) $\displaystyle\lim_{(x,\, y,\, z) \quad (0,\, 0,\, 0)} \frac{x\eta\mu x + y\eta\mu y + z\eta\mu z}{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$

Λύση

$$= \eta\mu x\left(1 - \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} - \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\eta\mu y}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$+ \frac{\eta\mu z}{z}\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{\eta\mu x}{x} + \left(\frac{\eta\mu y}{y} - \frac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \left(\frac{\eta\mu z}{z} - \frac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

κι επομένως $\lim\limits_{(x,\,y,\,z)\quad(0,\,0,\,0)} f(x, y, z) = 1.$

Άσκηση 1.1.10

Να αποδείξετε ότι η συνάργηση $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$ δεν επεκτείνεται συνεχώς στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι η $f(x, y)$ δεν έχει όριο στο $(x, y)=(0, 0)$.

α τρόπος

$$\lim_{x\quad 0}[\lim_{y\,0} f(x, y)] = \lim_{x\quad 0}\frac{x^4}{x^4} = 1 \,\pi\, \lim_{y\quad 0}[\lim_{x\quad 0} f(x, y)] = \lim_{y\quad 0}\frac{-y^4}{y^4} = -1.$$

β τρόπος

Για τις ακολουθίες $P_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad (0, 0)$ και $P_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad (0, 0),$

έχουμε $f(P_n) = 1 \quad 1$ και $f(P_n) = -1 \quad -1.$

Άσκηση 1.1.11

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις

α) $f(x, y) = \begin{cases} xy\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} & , \text{ αν } (x, y) \;\pi\; (0, 0) \\ 0 & , \text{ αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

β) $f(x, y) = \begin{cases} y\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ αν } x \;\pi\; 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}.$

γ) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} & , \text{ αν } x^2 + y^2 \pi 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = y = 0 \end{cases}$.

Λύση

α) Η $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι συνεχής και στο σημείο (0, 0), επειδή ισχύει

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x||y|}{2\sqrt{|x||y|}} \quad (\text{αφού } x^2 + y^2 \geq 2|x||y|)$$

ή $|f(x, y)| \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{|x||y|}$ και $\lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} \dfrac{1}{2}\sqrt{|x||y|} = 0 = f(0, 0)$,

οπότε $\lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

β) Συνεχής σε κάθε σημείο (x, y) με $x \pi 0$.

Είναι: $\lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x, y)\quad(0, 0)} \left(y\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 0$,

γιατί $\left|y\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |y|$ και $\lim\limits_{y\quad 0}|y| = 0$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο (0, 0).

Επίσης, η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο (0, y), ως σταθερή.

γ) Η f(x, y), ως ρητή, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

$$|f(x. y)| = \frac{|xy(x+y)|}{x^2 + y^2} = \frac{|x||y|\cdot(|x+y|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x||y|(|x|+|y|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|)$$

(αφού $x^2+y^2 \geq 2|x||y|$)

και $\lim\limits_{\substack{x\quad 0\\ y\quad 0}} \dfrac{1}{2}(|x|+|y|) = 0$.

Επομένως $\lim\limits_{\substack{x\quad 0\\ y\quad 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής και στο σημείο (0, 0).

Άσκηση 1.1.12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

i) Βρείτε το όριο της f για (x, y) (0, 0) όταν

α) το (x, y) κινείται επί της παραβολής $y=x^2$

β) το (x, y) κινείται επί της παραβολής $y=2x^2$.

ii) Υπάρχει το $\lim\limits_{(x,\, y)\quad (0,\, 0)} f(x, y)$;

Λύση

i) **α)** Για $y=x^2$ είναι

$$f(x, y) = f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}.$$

β) Για $y=2x^2$ είναι

$$f(x, y) = f(x, 2x^2) = \frac{x^2 \cdot 2x^2}{x^4 + 4x^4} = \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5}.$$

ii) Από το (i) παρατηρούμε ότι η f(x, y) έχει δύο διαφορετικά όρια και άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,\, y)\quad (0,\, 0)} f(x, y)$.

Άσκηση 1.1.13

Για τη συνάρτηση
να αποδείξετε ότι

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} &, (x, y) \; \pi \; (0, 0) \\ 0 &, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) είναι μερικώς συνεχής ως προς τις μεταβλητές x και y,

β) δεν είναι συνεχής στο σημείο (0, 0).

Λύση

α) **Η f(x, y) λέγεται συνεχής στο (α, β) ως προς x όταν $\lim\limits_{x\quad α} f(x, β) = f(α, β)$.**

Έτσι, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\quad 0} f(x, 0) = \lim\limits_{x\quad 0} 0 = 0 = f(0, 0)$
- $\lim\limits_{y\quad 0} f(y, 0) = 0 = f(0, 0)$.

β) Για τις ακολουθίες $P_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0, 0)$ και $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0)$ έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} f(P_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Άρα, δεν υπάρχει όριο της $f(x, y)$ στο $(0, 0)$ και γι’ αυτό είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό.

β τρόπος

Αν το σημείο (x, y) τείνει στο $(0, 0)$ κινούμενο κατά μήκος της ευθείας $y=\alpha x$, $\alpha \neq 0$, τότε

$$f(x, y) = \frac{2x \cdot \alpha x}{x^2 + \alpha^2 x^2} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2},$$

οπότε για δύο διαφρετικές τιμές του α η $f(x, y)$ έχει δύο διαφορετικά όρια. Άρα, η $f(x, y)$ δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.

Άσκηση 1.1.14

Να εξετάσετε αν έχει όριο στο $(0, 0)$ η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(x, y) = \left(\frac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x\sin x + y\sin y}{x^2 + y^2}\right)\vec{j}.$$

Λύση

Η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} = \big(f(x, y), g(x, y)\big)$$

λέμε ότι έχει όριο το (λ, μ), για $(x, y) \to (x_0, y_0)$, όταν ισχύει

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(x, y) = \mu.$$

- $$f(x, y) = \frac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)^2$$

και $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$ $\left(\text{αφού } \lim\limits_{n \to 0} \frac{\eta\mu n}{n} = 1\right)$

- $$g(x, y) = \frac{x\sin x + y\sin y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\sin x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

▶ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$

▶ $\left|\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right|$ $\left(\text{αφού } 0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1\right)$

και $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right) = 1 - 1 = 0,$

οπότε $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{\sin}{x} - \frac{\sin y}{y}\right) \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0.$

Έτσι, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} g(x, y) = 1 + 0 = 1.$

Άρα, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \vec{r}(x, y) = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$

1.2 Μερικές παράγωγοι

◆ Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και σημείο $P(\alpha, \beta) \in D$. **Μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (α, β)** ονομάζεται η παράγωγος της συνάρτησης $g(x)=f(x,\beta)$ στο σημείο $x_0=\alpha$ και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f_x(\alpha,\beta).$$

Επομένως

$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x,\beta)-f(\alpha,\beta)}{x-\alpha}$$

Αν η $\dfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}$ είναι πεπερασμένη, τότε η f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη ως προς x στο σημείο (α, β).**

Ομοίως, ορίζουμε:

$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y} = \lim_{y \to \beta} \frac{f(\alpha,y)-f(\alpha,\beta)}{y-\beta}$$

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

◆ Η συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται **παραγωγίσιμη στο σημείο (α, β)**, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως προς x και ως προς y. Η $f(x, y)$ λέγεται **παραγωγίσιμη στο σύνολο** $A \subseteq D$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A. Στην περίπτωση αυτή ορίζονται οι συναρτήσεις:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ή $f_x(x, y)$ (μερική παράγωγος της f ως προς x)

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ή $f_y(x, y)$ (μερική παράγωγος της f προς προς y)

και ονομάζονται **μερικές παράγωγοι της f πρώτης τάξης.**
Για να βρούμε π.χ. την $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ παραγωγίζουμε την $f(x, y)$ ως προς x θεωρώντας το y σταθερά.

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση $z=e^{\frac{x^2}{y^2}}$, $y \neq 0$.

Είναι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)_x = e^{\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)_y = e^{\frac{x^2}{y^2}} \cdot x^2\left(-\frac{2y}{y^4}\right) = -e^{\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x^2}{y^3}.$$

Η μερική παράγωγος της $z=f(x, y)$ στο σημείο $(0, 1)$ ως προς x είναι

$$\frac{\partial f(0,\ 1)}{\partial x} = e^0 \cdot 0 = 0,$$

ενώ ως προς y είναι $\quad \dfrac{\partial f(0,\ 1)}{\partial y} = -e^0 \cdot 0 = 0.$

- **Είναι δυνατόν η $f(x, y)$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (α, β) και να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό** (σε αντίθεση με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής) [βλ. πρδ. προηγούμενης σελίδας και πρδ. 13β §1.1.].

Γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου

Μια εξίσωση της μορφής $z=f(x, y)$ παριστάνει μια επιφάνεια S στο χώρο. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δέχεται μερικές παραγώγους συνεχείς στο σημείο (α, β).

Το διάνυσμα $\quad \vec{n} = \left(-\dfrac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial x},\ -\dfrac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial y},\ 1\right)$

είναι το **κάθετο διάνυσμα** της επιφάνειας S στο σημείο $M(\alpha, \beta, f(\alpha, \beta))$.

Το επίπεδο που περνά από το σημείο $M(\alpha, \beta, f(\alpha, \beta))$ και είναι κάθετο στο $\vec{n}$ είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο M** και έχει εξίσωση:

$$z - f(\alpha, \beta) = \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial x}(x-\alpha) + \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial y}(x-\beta)$$

Το επίπεδο αυτό είναι ο γεωμετρικός τόπος των εφαπτομένων όλων των καμπύλων που περνούν από το M και ανήκουν στην επιφάνεια S.

Παράδειγμα Το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας $z=(x-y)^2$ στο σημείο της $M(2,\ 1,\ 1)$ είναι το

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial x},\ -\frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial y},\ 1\right) = (2,\ -2,\ 1) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{\kappa},$$

αφού

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} = 2(x-y),\quad \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = 2(x-y)\cdot(-1) = 2(y-x),$$

$$\frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial x} = 2(2-1) = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial y} = 2(1-2) = -2.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας αυτής στο M έχει εξίσωση

$$z - f(2,\ 1) = \frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial x}(x-2) + \frac{\partial f(2,\ 1)}{\partial y}(y-1)$$

ή $\quad z - 1 = 2(x-2) + (-2)(y-1)$

ή $\quad 2x - 2y - z - 1 = 0.$

Μερικές παράγωγοι διανυσματικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός της μερικής παραγώγου μιας διανυσματικής συνάρτησης, ανάγεται στον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των συντεταγμένων τους.

Δηλαδή, αν $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \big(\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}),\ \mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\big)$, τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}},\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) \quad \textbf{και} \quad \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}},\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}\right)$$

Παράδειγμα Αν $\vec{r}(x,y) = x^3y^2\vec{i} - \eta\mu(xy)\vec{j}$, τότε

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 3x^2y^2\vec{i} - y\,\sigma\upsilon\nu(xy)\vec{j}$$

και

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 2x^3y\vec{i} - x\,\sigma\upsilon\nu(xy)\vec{j}.$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Η μερική παράγωγος ως προς x της $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} = f_x$, δηλαδή η

Εφαρμογή:

Αν **f=f(x, y), x=x(t, υ) και y=y(t, υ),** τότε

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \text{δηλαδή} \quad f_t = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \upsilon}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \upsilon}, \quad \text{δηλαδή} \quad f_\upsilon = f_x \cdot x_\upsilon + f_y \cdot y_\upsilon$$

2 Αν $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με $x_1=x_1(t), \ldots, x_n=x_n(t)$, τότε

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}\ .$$

3 Αν $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$$
$$x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

τότε για κάθε $i\in\{1, 2, \ldots, \mu\}$ ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i}\ .$$

Παράδειγμα Έστω $f=x^2e^{-y}$ με $x=t\upsilon^2$ και $y=\ln(t^2\upsilon)$.

Έχουμε:

- $$\frac{\partial f}{\partial t} = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t = 2xe^{-y} \cdot \upsilon^2 + (-x^2 e^{-y}) \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot 2t\upsilon$$
$$= 2t\upsilon^2 \cdot e^{-\ln(t^2\upsilon)} \cdot \upsilon^2 - t^2\upsilon^4 e^{-\ln(t^2\upsilon)} \cdot \frac{2}{t}$$
$$= 2t\upsilon^2 \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot \upsilon^2 - 2t\upsilon^4 \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} = \frac{2\upsilon^3}{t} - \frac{2\upsilon^3}{t} = 0.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial \upsilon} = f_x \cdot x_\upsilon + f_y \cdot y_\upsilon = 2xe^{-y} \cdot 2t\upsilon - x^2 e^{-y} \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot t^2$$
$$= 2t\upsilon^2 \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot 2t\upsilon - t^2\upsilon^4 \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} \cdot t^2 = 4\upsilon^2 - \upsilon^2 = 3\upsilon^2.$$

β τρόπος

$$f = x^2 e^{-y} = t^2\upsilon^4 \cdot e^{-\ln(t^2\upsilon)} = t^2\upsilon^4 \cdot \frac{1}{t^2\upsilon} = \upsilon^3,$$

οπότε $$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial \upsilon} = 3\upsilon^2.$$

4 Θα βρούμε τη **δεύτερη παράγωγο ως προς t μιας σύνθετης συνάρτησης** $f(x, y)$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$.

Έχουμε: $$\frac{df}{dt} = f_x \cdot \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε ως προς t (άθροισμα δύο γινομένων) και έχουμε

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{df_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + f_x \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{df_y}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + f_y \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right) \qquad (2)$$

Θεωρούμε τις f_x, f_y σύνθετες συναρτήσεις, όπως η f, οπότε, σύμφωνα με την (1), έχουμε

$$\frac{df_x}{dt} = f_{xx} \cdot \frac{dx}{dt} + f_{xy} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{και} \quad \frac{df_y}{dt} = f_{yx} \cdot \frac{dx}{dt} + f_{yy} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Επίσης ισχύει $f_{xy}=f_{yx}$ και η (2) γράφεται

Παράδειγμα Θα βρούμε την $\frac{d^2f}{dt^2}$, όταν

$$f=x^3+y^2z,\ x=t^2,\ y=\eta\mu t,\ z=\sigma\upsilon\nu t.$$

α τρόπος

$$f = t^6 + \eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t,$$

οπότε

$$\frac{df}{dt} = 6t^5 + 2\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^3 t$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 30t^4 + 2\sigma\upsilon\nu^3 t + 2\eta\mu t\cdot 2\sigma\upsilon\nu t(-\eta\mu t) - 3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t$$

$$= 30t^4 + 2\sigma\upsilon\nu^3 t - 4\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t - 3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t$$

$$= 30t^4 + 2\sigma\upsilon\nu^3 t - 7\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t$$

β τρόπος

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$= 3x^2\cdot 2t + 2yz\cdot\sigma\upsilon\nu t + y^2\cdot(-\eta\mu t) = 6x^2 t + 2yz\,\sigma\upsilon\nu t - y^2\eta\mu t$$

και

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial x}x\ (t) + \frac{\partial f}{\partial y}y\ (t) + \frac{\partial f}{\partial z}z\ (t)$$

$$= \left(f_x\cdot x\,(t) + f_y\cdot y\,(t) + f_z\cdot z\,(t)\right)^{(2)} + f_x x\ (t) + f_y\cdot y\ (t) + f_z\cdot z\ (t)$$

$$= f_{xx}(x\,(t))^2 + f_{yy}(y\,(t))^2 + f_{zz}(z\,(t))^2 + 2f_{xy}x\,(t)y\,(t) +$$

$$+ 2f_{xz}x\,(t)z\,(t) + 2f_{yz}y\,(t)z\,(t) + f_x x\ (t) + f_y y\ (t) + f_z z\ (t)$$

$$= 6x\cdot(2t)^2 + 2z\cdot\sigma\upsilon\nu^2 t + 0 + 0 + 0 + 2\cdot 2y\cdot\sigma\upsilon\nu t(-\eta\mu t) + 3x^2\cdot 2 +$$

$$+ 2yz\cdot(-\eta\mu t) + y^2(-\sigma\upsilon\nu t)$$

$$= 30t^4 + 2\sigma\upsilon\nu^3 t - 7\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t.$$

Παράγωγος ορίζουσας

Αν $f(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$,

τότε $\dfrac{df(t)}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{df_{11}}{dt} & \dfrac{df_{12}}{dt} & \dots & \dfrac{df_{1n}}{dt} \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{df_{n1}}{dt} & \dfrac{df_{n2}}{dt} & \dots & \dfrac{df_{nn}}{dt} \end{vmatrix}$.

Παραδείγματα

α) Αν $f(t) = \begin{vmatrix} 3t^2 & ημt \\ συν2t & e^t \end{vmatrix}$,

τότε $\dfrac{df(t)}{dt} = \begin{vmatrix} 6t & συνt \\ συν2t & e^t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3t^2 & ημt \\ -2ημ2t & e^t \end{vmatrix}$.

- Αν η ορίζουσα έχει στοιχεία συναρτήσεις περισσοτέρων της μιας μεταβλητών, τότε ισχύει ο τύπος με μερικές παραγώγους.

β) Αν $f(x, y) = \begin{vmatrix} x + y & 2xy^2 & e^{xy} \\ x^2 + y^3 & 3xy & x^2 \\ ημx & συνy & εφ(xy) \end{vmatrix}$,

τότε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & 2y^2 & ye^{xy} \\ x^2 + y^3 & 3xy & x^2 \\ ημx & συνy & εφ(xy) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x + y & 2xy^2 & e^{xy} \\ 2x & 3y & 2x \\ ημx & συνy & εφ(xy) \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} x + y & 2xy^2 & e^{xy} \\ x^2 + y^3 & 3xy & x^2 \\ συνx & 0 & \dfrac{y}{συν^2(xy)} \end{vmatrix}$.

Υποδειγματικές ασκήσεις στις μερικές παραγώγους

Άσκηση 1.2.1

Για τη συνάρτηση $\varphi=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ να αποδείξετε την ισότητα

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Λύση

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}+\frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}+\frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$=\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Άσκηση 1.2.2

Αν $z=e^{xy^2}$, να βρείτε την $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

Λύση

- $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}\cdot(xy^2)_x=e^{xy^2}\cdot y^2$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2}\cdot y^2)=e^{xy^2}\cdot 2xy\cdot y^2+e^{xy^2}\cdot 2y=2ye^{xy^2}(xy^2+1)$
- $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$

$$=2\cdot e^{xy^2}\cdot(xy^2+1)+2y\cdot e^{xy^2}\cdot 2xy\cdot(xy^2+1)+2y\cdot e^{xy^2}\cdot 2xy$$

$$=2\cdot e^{xy^2}[xy^2+1+2xy^2(xy^2+1)+2xy^2]$$

$$=2\cdot e^{xy^2}(2x^2y^4+5xy^2+1).$$

Άσκηση 1.2.3

Να βρείτε την παράγωγο ως προς x και ως προς y της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{αν } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{αν } x = y = 0 \end{cases}.$$

Λύση

- Η μερική παράγωγος της f ως προς x σε κάθε σημείο (x, y)π(0, 0) είναι

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - (x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

ενώ η μερική παράγωγος ως προς y στο (x, y)π(0, 0) είναι

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

- Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (0, 0) είναι

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\ 0}\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\ 0} 0 = 0,$$

ενώ η μερική παράγωγος της f ως προς y στο (0, 0) είναι

$$f_y(0, 0) = \lim_{y\ 0}\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Άσκηση 1.2.4

Για τη σύνθετη συνάρτηση f(x, y) με x=ρσυνθ και y=ρημθ, να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Λύση

- $\dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \text{συν}\vartheta \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \text{ημ}\vartheta \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(-\rho\,\text{ημ}\vartheta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\,\text{συν}\vartheta)$

$$= \rho\left(\text{συν}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \text{ημ}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Άρα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\text{συν}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \text{ημ}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2\left(\text{συν}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \text{ημ}\vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$$= \text{συν}^2\vartheta\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) + \text{ημ}^2\vartheta\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 .$$

Άσκηση 1.2.5

Για τη σύνθετη συνάρτηση $f(x, y)$ με $x=ue^{\upsilon}$ και $y=ue^{-\upsilon}$, να αποδείξετε ότι:

$$u^2f_{uu} + f_{\upsilon\upsilon} - uf_u = 2(x^2f_{xx}+y^2f_{yy}).$$

Λύση

- $f_u = \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} = \mathbf{f_x \cdot e^{\upsilon} + f_y \cdot e^{-\upsilon}}$

- $f_{uu} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^{(2)} + \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}$

$$= (f_x \cdot e^{\upsilon} + f_y \cdot e^{-\upsilon})^{(2)} + f_x \cdot 0 + f_y \cdot 0$$

$$= f_{xx} \cdot (e^{\upsilon})^2 + f_{yy} \cdot (e^{-\upsilon})^2 + 2f_{xy}e^{\upsilon}e^{-\upsilon}$$

$$= \mathbf{f_{xx}e^{2\upsilon} + f_{yy}e^{-2\upsilon} + 2f_{xy}}.$$