Θανάση Π. Ξένου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ 1

Για τους φοιτητές των Α.Ε.Ι. και Τ.Ε.Ι.

Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Ακολουθίες
- Σειρές
- Διαφορικός λογισμός
- Ολοκληρωτικός λογισμός

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα τελευταία χρόνια στη Μέση Εκπαίδευση έχουν πραγματοποιηθεί ορισμένες αλλαγές στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Τέτοιες αλλαγές, για παράδειγμα, είναι:

- *η κατάργηση των συμβόλων* $\Rightarrow, \forall, \exists$
- *το σύμβολο* $\sqrt[\nu]{\alpha}$ *ορίζεται μόνο όταν* $\alpha \geq 0$
- *η μη συστηματική μελέτη των ακολουθιών*
- *η μη ύπαρξη στοιχείων Μαθηματικής Λογικής*
- *η σε βάθος μελέτη του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού.*

Παρακολουθώντας την Πανεπιστημιακή βιβλιογραφία της χώρας μας, διαπίστωσα ότι, στην πλειονότητά τους, οι πανεπιστημιακοί μας δάσκαλοι δεν έχουν λάβει υπόψη τους τις αλλαγές αυτές, με αποτέλεσμα οι φοιτητές να μη μπορούν να προσαρμοστούν εύκολα στο νέο γι' αυτούς είδος γραφής.

Αποφάσισα λοιπόν να παρουσιάσω μια σειρά βοηθημάτων για τους φοιτητές των Α.Ε.Ι και Τ.Ε.Ι, ξεκινώντας από τη Μαθηματική Ανάλυση. Το βιβλίο αυτό περιέχει τέσσερα κεφάλαια (Ακολουθίες, Σειρές, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα). Στο κεφάλαιο των Σειρών η θεωρία παρουσιάζεται διεξοδικά, αφού ο φοιτητής συναντά για πρώτη φορά την έννοια αυτή.

Στα άλλα κεφάλαια η θεωρία παρουσιάζεται συνοπτικά, αφού, σχεδόν στο σύνολό της, είναι γνωστή από το Λύκειο. Ακολουθούν πολλά λυμένα παραδείγματα, με την απαιτούμενη κάθε φορά μεθοδολογία, που καλύπτουν την ύλη με κάθε λεπτομέρεια.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν ασκήσεις, προτεινόμενες για λύση, των οποίων οι υποδείξεις ή απαντήσεις δίνονται στο τέλος του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 1998 — *Θανάσης Ξένος*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 4: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Αν στους θετικούς ακέραιους 1, 2, 3, …, ν, ν+1, … αντιστοιχίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots$, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, που ονομάζεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών** και συμβολίζεται με

$$\alpha_\nu \text{ με } \nu = 1, 2, \ldots \quad \text{ή} \quad (\alpha_\nu)\ \nu \in \mathbb{N}^* \quad \text{ή} \quad (\alpha_\nu)$$

Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ λέγονται **όροι** της ακολουθίας (πρώτος, …., νιοστός, …). Ο α_ν λέγεται επίσης **γενικός όρος** της ακολουθίας.

Παράδειγμα: Όταν δίνεται ο γενικός όρος α_ν μιας ακολουθίας (α_ν), ως συνάρτηση του ν, τότε μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας και λέμε ότι **η ακολουθία ορίζεται.**

Για παράδειγμα, αν είναι $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \cdot \nu}{\nu^2+1}$, τότε έχουμε

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{5}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{10}, \quad \alpha_4 = \frac{4}{17} \quad \text{κ.ο.κ}$$

Γενίκευση του ορισμού: Αν Ε είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε κάθε συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to E$ λέγεται **ακολουθία στοιχείων του Ε.** Έτσι, για παράδειγμα έχουμε ακολουθία πολυγώνων, ακολουθία συναρτήσεων κλπ. Επίσης, αν έχουμε μια συνάρτηση $\alpha: A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{N}^*$, τότε αυτή λέγεται **ακολουθία ορισμένη στο Α.** Αν το Α είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε η ακολουθία λέγεται **πεπερασμένη.**

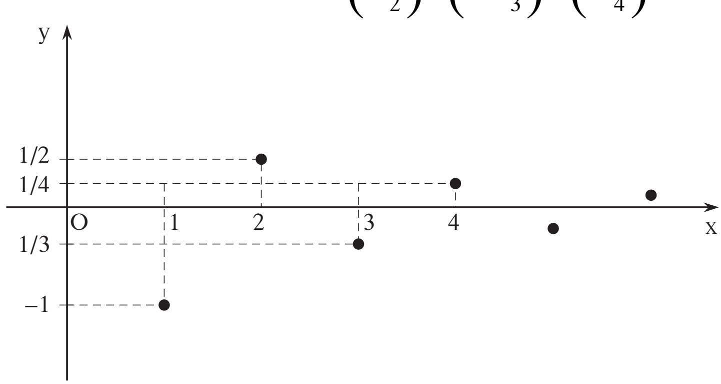
Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

- **Γράφημα** μιας ακολουθίας (α_ν) είναι το σύνολο

$$G = \{(\nu, \alpha_\nu) / \nu \in \mathbb{N}^*\}$$

και η παράσταση αυτού στο καρτεσιανό επίπεδο μας δίνει τη **γραφική παράσταση της ακολουθίας.**

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{\nu}$, η οποία αποτελείται από τα σημεία $(1, -1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(4, \frac{1}{4}\right)$, …



● Μια ακολουθία (α_ν) λέμε ότι **ορίζεται επαγωγικά,** όταν δίνονται οι κ πρώτοι όροι της και μια αναδρομική σχέση **(αναδρομικός τύπος)** που συνδέει τον όρο $\alpha_{\nu+\kappa}$ με τους $\alpha_{\nu+\kappa-1}$, $\alpha_{\nu+\kappa-2}$, …, α_ν.

Μια τέτοια ακολουθία λέγεται επίσης **αναδρομική κ τάξης.**

Χαρακτηριστικά παραδείγματα αναδρομικών ακολουθιών είναι:

i) **η αριθμητική πρόοδος** (α_ν), όπου για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu+\omega \ \ (\omega\in\mathbb{R} \text{ σταθερός})$$

ii) **η γεωμετρική πρόοδος** (α_ν), όπου για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_\nu\neq 0$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\cdot\lambda \ \ (\lambda\in\mathbb{R}^* \text{ σταθερός})$$

iii) **η αρμονική πρόοδος** (α_ν), όπου για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_\nu\neq 0$ και

$$\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\alpha_\nu} + \omega \ \ (\omega\in\mathbb{R} \text{ σταθερός})$$

iv) **η ακολουθία Fibonacci** (α_ν), η οποία ορίζεται ως εξής

$$\alpha_1=1, \quad \alpha_2=1 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu,$$

δηλαδή έχει όρους 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Σημείωση: Στην αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει

$$\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega \quad \text{και} \quad S_\nu = \alpha_1+\alpha_2+ \dots +\alpha_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\cdot\nu}{2},$$

ενώ στη γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda\neq 1$ ισχύει

$$\alpha_\nu = \alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1} \ \ \text{και} \ \ S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}.$$

Έτσι, για παράδειγμα έχουμε

$$1+2+3+ \dots +\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \ \ \text{και} \ \ 1+\lambda+\lambda^2+ \dots + \lambda^{\nu-1} = \frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} \ \ (\lambda\neq 1)$$

● Αν έχουμε μια ακολουθία (α_ν), τότε κάθε επιλογή άπειρων όρων, με τη σειρά που εμφανίζονται, λέμε ότι είναι μια **υπακολουθία** της (α_ν).

Για παράδειγμα, αν από την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \dots$ επιλέξουμε τους όρους με δείκτη πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή τους $\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9, \dots, \alpha_{3\nu}, \dots$, τότε έχουμε την υπακολουθία $(\alpha_{3\nu})$ της (α_ν). Χαρακτηριστικές υπακολουθίες μιας ακολουθίας (α_ν) είναι οι υπακολουθίες $(\alpha_{2\nu})$ και $(\alpha_{2\nu-1})$ των άρτιων και περιττών δεικτών αντίστοιχα.

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1

Να ορίσετε επαγωγικά τις ακολουθίες

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \quad \textit{και} \quad \beta_\nu = \frac{2\nu-3}{\nu+1}\ .$$

Λύση:

Συνήθως όταν λέμε ότι μια ακολουθία ορίζεται επαγωγικά, εννοούμε την περίπτωση της αναδρομικής ακολουθίας 1ης τάξης.

i) Είναι

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_\nu}+1} \left[\text{αφού } \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \text{ και } \nu = \frac{1}{\alpha_\nu}\right],$$

δηλαδή $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu}$.

Άρα λοιπόν η ακολουθία ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\alpha_1=1 \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu}\ .$$

ii) Έχουμε:

$$\beta_{\nu+1} = \frac{2(\nu+1)-3}{(\nu+1)+1} = \frac{2\nu-1}{\nu+2}\ .$$

Η ισότητα $\beta_\nu = \dfrac{2\nu-3}{\nu+2}$ δίνει τελικά $\nu = \dfrac{3+\beta_\nu}{2-\beta_\nu}$ $(\beta_\nu \neq 2)$ και επομένως

$$\beta_{\nu+1} = \frac{2\left(\frac{3+\beta_\nu}{2-\beta_\nu}\right)-1}{\left(\frac{3+\beta_\nu}{2-\beta_\nu}\right)+2} = \frac{4+3\beta_\nu}{7-\beta_\nu}\ .$$

Άρα η ακολουθία (β_ν) ορίζεται επαγωγικά ως εξής

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \text{ και } \beta_{\nu+1} = \frac{4+3\beta_\nu}{7-\beta_\nu}\ .$$

2

Αν $\alpha_1=1$ *και* $\alpha_{\nu+1} = \nu+\alpha_\nu$, να βρείτε το γενικό όρο α_ν ως συνάρτηση του ν.

Λύση:

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = \nu$ και επομένως

$$\alpha_2-\alpha_1 = 1,\quad \alpha_3-\alpha_2 = 2,\quad \alpha_4-\alpha_3 = 3,\ \ldots,\ \alpha_\nu-\alpha_{\nu-1} = \nu-1.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη αυτές τις ν ισότητες και έχουμε

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = 1+2+3+\ldots+(\nu-1) \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu - 1 = \frac{(\nu-1)\nu}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu = \frac{\nu^2-\nu+2}{2}.$$

3

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=\alpha$ και $\alpha_{\nu+1} = \lambda\alpha_\nu+\mu$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 1$.

i) Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_\nu = \alpha_\nu - \varrho$ είναι γεωμετρική πρόοδος, όπου ϱ η ρίζα της εξίσωσης $x = \lambda x+\mu$.

ii) Να βρεθεί ο α_ν ως συνάρτηση του ν.

iii) Αν $\alpha_1=-3$ και $5\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu - 4$, να βρεθεί ο α_ν ως συνάρτηση του ν.

Λύση:

i) Η εξίσωση $x = \lambda x+\mu$ έχει ρίζα τον αριθμό $\varrho = \frac{\mu}{1-\lambda}$. Επειδή

$$\beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \varrho = \lambda\alpha_\nu + \mu - \frac{\mu}{1-\lambda} = \lambda\alpha_\nu - \frac{\lambda\mu}{1-\lambda} = \lambda\left(\alpha_\nu - \frac{\mu}{1-\lambda}\right) = \lambda\cdot\beta\nu,$$

η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ.

ii) Επειδή $\beta_\nu = \beta_1\cdot\lambda^{\nu-1} = (\alpha_1-\varrho)\cdot\lambda^{\nu-1} = \left(\alpha - \frac{\mu}{1-\lambda}\right)\cdot\lambda^{\nu-1}$

και $\beta_\nu = \alpha_\nu - \varrho$, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_\nu = \varrho + \beta_\nu = \frac{\mu}{1-\lambda} + \left(\alpha - \frac{\mu}{1-\lambda}\right)\cdot\lambda^{\nu-1}$$

iii) Η ακολουθία αυτή έχει την παραπάνω μορφή με $\alpha=-3$, $\lambda = \frac{3}{5}$ και $\mu = -\frac{4}{5}$.

Επομένως

$$\alpha_\nu = \frac{-\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} + \left(-3 + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1} = -2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1}.$$

4

Μια ακολουθία (α_ν) ορίζεται επαγωγικά ως εξής

$$\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+2} = \kappa\alpha_{\nu+1} + \lambda\alpha_\nu \ (\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*).$$

Θεωρούμε και την εξίσωση

$$x^2 = \kappa x + \lambda \qquad (1)$$

i) Αν η (1) έχει δύο ρίζες ϱ_1, ϱ_2 πραγματικές άνισες, να αποδείξετε ότι ο α_ν γράφεται ως άθροισμα των νιοστών όρων δύο γεωμετρικών προόδων με λόγους ϱ_1 και ϱ_2.

ii) Αν η (1) έχει διπλή ρίζα ϱ, να αποδείξετε ότι ο α_ν είναι γινόμενο των νιοστών όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου με λόγο ϱ.

iii) Βρείτε το νιοστό όρο της ακολουθίας 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Λύση:

i) Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει

$$\alpha_\nu = \gamma \cdot \varrho_1^{\nu-1} + \delta \cdot \varrho_2^{\nu-1} \quad (2)$$

Από τη (2), για $\nu=1$ και $\nu=2$, προκύπτουν οι ισότητες

$$\gamma+\delta = \alpha_1 = \alpha \quad \text{και} \quad \gamma\varrho_1+\delta\varrho_2 = \beta,$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$\gamma = \frac{\alpha\varrho_2-\beta}{\varrho_2-\varrho_1} \quad \text{και} \quad \delta = \frac{\beta-\alpha\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1}.$$

Υπάρχουν λοιπόν $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε η (2) να αληθεύει για $\nu=1$ και $\nu=2$.

Αν η (2) αληθεύει για $\nu=\mu$ και $\nu=\mu+1$, τότε αληθεύει και για $\nu=\mu+2$, γιατί

$$\begin{aligned}\alpha_{\mu+2} &= \kappa\alpha_{\mu+1}+\lambda\alpha_\mu = \kappa(\gamma\varrho_1^\mu+\delta\varrho_2^\mu)+\lambda(\gamma\varrho_1^{\mu-1}+\delta\varrho_2^{\mu-1}) = \\ &= (\varrho_1+\varrho_2)(\gamma\varrho_1^\mu+\delta\varrho_2^\mu)-\varrho_1\varrho_2(\gamma\varrho_1^{\mu-1}+\delta\varrho_2^{\mu-1}) = \gamma\varrho_1^{\nu+1}+\delta\varrho_2^{\nu+1}\end{aligned}$$

Άρα η (2) αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ii) Ομοίως βρίσκουμε $\alpha_\nu = [\gamma+(\nu-1)\delta]\cdot\varrho^{\nu-1}$, όπου $\gamma=\alpha$, $\delta = \frac{2\beta}{\kappa}-\alpha$ και $\varrho = \frac{\kappa}{2}$.

iii) Πρόκειται για την ακολουθία Fibonacci που ορίζεται ως εξής

$$\alpha_1=1, \ \alpha_2=1 \ \text{και} \ \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$$

Για $\kappa=1$ και $\lambda=1$, η εξίσωση $x^2 = \kappa x+\lambda$, δηλαδή $x^2-x-1=0$, έχει ρίζες

$$\varrho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \varrho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Έτσι, σύμφωνα με το (i), έχουμε τον τύπο του Binet

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1}\right], \ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

5

Να βρείτε τους όρους της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{3\nu+2}{4}$, που είναι φυσικοί αριθμοί.

Λύση:

Ο φυσικός αριθμός ν, διαιρούμενος με το 4 παίρνει μια από τις μορφές 4κ, $4\kappa+1$, $4\kappa+2$ και $4\kappa+3$ ($\kappa \in \mathbb{N}$).

Αν $\nu=4\kappa$, τότε $\alpha_\nu = \frac{12\kappa+2}{4} = 3\kappa+\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Αν $\nu=4\kappa+1$, τότε $\alpha_\nu = \frac{12\kappa+5}{4} = 3\kappa+\frac{5}{4} \notin \mathbb{N}$.

Αν $\nu=4\kappa+2$, τότε $\alpha_\nu = \frac{12\kappa+8}{4} = 3\kappa+2 \in \mathbb{N}$.

Αν $\nu=4\kappa+3$, τότε $\alpha_\nu = \frac{12\kappa+11}{4} = 3\kappa + \frac{11}{4} \notin \mathbb{N}$.

Άρα, φυσικοί αριθμοί είναι οι όροι $\alpha_{4\kappa+2}$ με $\kappa\in\mathbb{N}$, δηλαδή οι $\alpha_2, \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{14}, \ldots$

6

Να εξετάσετε αν έχουν κοινούς όρους οι ακολουθίες με γενικούς όρους

$$\boldsymbol{\alpha_\nu = \nu-1 \ \ \textit{και} \ \ \beta_\nu = \frac{8}{\nu+1}}.$$

Λύση:

Έστω ότι υπάρχουν $\kappa, \mu\in\mathbb{N}^*$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\alpha_\kappa=\beta_\mu$, δηλαδή

$$\kappa-1 = \frac{8}{\mu+1} \qquad (1)$$

Επειδή ο $\kappa-1$ είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο $\frac{8}{\mu+1}$ να είναι ακέραιος, δηλαδή ο $\mu+1$ να είναι διαιρέτης του 8.

Αν $\mu+1 = 2$, δηλαδή $\mu=1$, τότε η (1) δίνει $\kappa=5$ και επομένως $\alpha_5=\beta_1$.

Αν $\mu+1=4$, δηλαδή $\mu=3$, τότε η (1) δίνει $\kappa=3$ και επομένως $\alpha_3=\beta_3$.

Αν $\mu+1=8$, δηλαδή $\mu=7$, τότε $\kappa=2$ και $\alpha_2=\beta_7$.

Άρα λοιπόν οι μοναδικοί κοινοί όροι των δύο ακολουθιών είναι οι

$$\alpha_2=\beta_7=1, \quad \alpha_3=\beta_3=2 \quad \text{και} \quad \alpha_5=\beta_1=4.$$

7

Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της μικτής προόδου

$$\boldsymbol{\alpha, 2\alpha\lambda, 3\alpha\lambda^2, 4\alpha\lambda^3, \ldots \ (\alpha\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}^*)}$$

Λύση:

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα

$$S_\nu = \alpha+2\alpha\lambda+3\alpha\lambda^2+4\alpha\lambda^3+ \ldots + \nu\alpha\lambda^{\nu-1} \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λ και έχουμε

$$\lambda\cdot S_\nu = \alpha\lambda+2\alpha\lambda^2+3\alpha\lambda^3+4\alpha\lambda^4+ \ldots + \nu\alpha\lambda^\nu \qquad (2)$$

Αφαιρούμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε

$$S_\nu-\lambda\cdot S_\nu = \alpha+(2\alpha\lambda-\alpha\lambda)+(3\alpha\lambda^2-2\alpha\lambda^2) + \ldots + (\nu\alpha\lambda^{\nu-1}-(\nu-1)\alpha\lambda^{\nu-1})-\nu\alpha\lambda^\nu$$

ή

$$(1-\lambda)\cdot S_\nu = (\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+ \ldots + \alpha\lambda^{\nu-1})-\nu\alpha\lambda^\nu \qquad (3)$$

Το $\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\ldots+\alpha\lambda^{\nu-1}$ είναι άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου και ισούται με $\dfrac{\alpha(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}$, όταν $\lambda\neq 1$.

- Αν $\lambda=1$, τότε $S_\nu=\alpha+2\alpha+3\alpha+\ldots+\nu\alpha=\alpha(1+2+\ldots+\nu)=\dfrac{\alpha\nu(\nu+1)}{2}$

- Αν $\lambda\neq 1$, η (3) γράφεται

$$(1-\lambda)\cdot S_\nu=\frac{\alpha(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}-\nu\alpha\lambda^{\nu}$$

  και επομένως

$$S_\nu=\frac{\alpha(1-\lambda^{\nu})}{(1-\lambda)^2}-\frac{\nu\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda}\,.$$

1.2 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

- Μια ακόλουθία (α_ν) ονομάζεται:

  i) **γνησίως αύξουσα,** όταν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$

  ii) **γνησίως φθίνουσα,** όταν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$

  iii) **αύξουσα**, όταν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_{\nu+1}\geq\alpha_\nu$

  iv) **φθίνουσα,** όταν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_{\nu+1}\leq\alpha_\nu$.

  Μια ακολουθία αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται **μονότονη,** ενώ μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ακολουθία λέγεται **γνησίως μονότονη.**

- Η μελέτη της μονοτονίας μιας ακολουθίας γίνεται συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

  α) Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$.

  β) Αν οι όροι της ακολουθίας (α_ν) έχουν σταθερό πρόσημο, βρίσκουμετο πηλίκο $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ και το συγκρίνουμε με το 1.

  Αν π.χ. είναι $\alpha_\nu<0$ και $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}<1$, τότε $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$.

  γ) Αν η ακολουθία ορίζεται επαγωγικά, τότε συνήθως αποδεικνύουμε την ανισότητα $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$ ή $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$ με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες

$$\alpha_\nu=2\nu+(-1)^\nu,\ \ \beta_\nu=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}\ \ \text{και}\ \ \gamma_\nu=\frac{\nu^2+3}{\nu}.$$

Λύση:

- $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=[2(\nu+1)+(-1)^{\nu+1}]-[2\nu+(-1)^\nu]=2-2(-1)^\nu=\begin{cases}0, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ 4, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

  Έτσι, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ έχουμε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu\geq0$ και επομένως η ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα.

- $\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=\left[\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2(\nu+1)}\right]-\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}\right)=$

$$= \frac{1}{2\nu+1} + \frac{1}{2\nu+2} - \frac{1}{\nu} = \frac{-(3\nu+2)}{\nu(2\nu+1)(2\nu+2)} < 0$$

και επομένως η ακολουθία (β_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

- $\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu = \dfrac{(\nu+1)^2+3}{\nu+1} - \dfrac{\nu^2+3}{\nu} = \dfrac{\nu^2+\nu-3}{\nu(\nu+1)}$

  Για $\nu=1$ είναι $\nu^2+\nu-3<0$, ενώ για $\nu\geq 2$ είναι $\nu^2+\nu-3>0$.

  Άρα η διαφορά $\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu$ δεν έχει σταθερό πρόσημο, που σημαίνει ότι η ακολουθία (γ_ν) δεν είναι μονότονη ή γνησίως μονότονη.

2

Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τις ακολουθίες

$$\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu} \quad \text{και} \quad \beta_\nu = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2\nu)}\ .$$

Λύση:

- Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $\alpha_\nu>0$ και $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}} : \dfrac{\nu!}{\nu^\nu} = \left(\dfrac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu <1.$

  Επομένως $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$, που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

- Επίσης έχουμε $\beta_\nu<0$ και

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2\nu)\cdot(2\nu+2)} : \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2\nu)} = \frac{2\nu+1}{2\nu+2} <1,$$

  οπότε $\beta_{\nu+1}>\beta_\nu$ και γι' αυτό η (β_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

3

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις ακολουθίες που ορίζονται ως εξής:

i) $\alpha_1=5$ **και** $\alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{3+4\alpha_\nu}$ **,**

ii) $\alpha_1 = \lambda>0$ **και** $\alpha_{\nu+1} = \lambda+\alpha_\nu^2$**,**

iii) $\alpha_1=3$ **και** $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu-4}{\alpha_\nu-1}$**.**

Λύση:

i) Είναι $\alpha_2 = \sqrt[3]{3+4\alpha_1} = \sqrt[3]{23}<\alpha_1$ και αν υποθέσουμε ότι $\alpha_{\kappa+1}<\alpha_\kappa$, τότε έχουμε

$$4\alpha_{\kappa+1}<4\alpha_\kappa \text{ ή } 3+4\alpha_{\kappa+1}<3+4\alpha_\kappa \text{ ή } \sqrt[3]{3+4\alpha_{\kappa+1}} < \sqrt[3]{3+4\alpha_\kappa} \text{ ή } \alpha_{\kappa+2}<\alpha_{\kappa+1}.$$

Άρα για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$, που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Είναι $\alpha_2 = \lambda+\alpha_1^2 > \lambda=\alpha_1$ και έστω ότι $\alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa$.
Εύκολα διαπιστώνουμε (με τη μέθοδο της επαγωγής) ότι η ακολουθία έχει θετικούς όρους.
Έτσι έχουμε

$$\alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa \quad \text{ή} \quad \alpha_{\kappa+1}^2>\alpha_\kappa^2 \quad \text{ή} \quad \lambda+\alpha_{\kappa+1}^2>\lambda+\alpha_\kappa^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+1}$$

Άρα για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$ και επομένως η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα.

iii) $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = \dfrac{3\alpha_\nu-4}{\alpha_\nu-1}-\alpha_\nu = -\dfrac{(\alpha_\nu-2)^2}{\alpha_\nu-1}$

Θα συγκρίνουμε τον α_ν με τους αριθμούς 1 και 2.
Παρατηρούμε ότι $\alpha_1 = 3>2$ και αν $\alpha_\kappa>2$, τότε έχουμε:

$$\alpha_{\kappa+1}>2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha_\kappa-4}{\alpha_\kappa-1}>2 \Leftrightarrow 3\alpha_\kappa-4>2(\alpha_{\kappa-1}) \quad [\text{αφού } \alpha_\kappa-1>1>0]$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\kappa>2, \text{ που αληθεύει}$$

Άρα για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_\nu>2$, οπότε

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = -\frac{(\alpha_\nu-2)^2}{\alpha_\nu-1}<0,$$

που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να ορίσετε επαγωγικά τις ακολουθίες

$$\alpha_\nu=\nu^2,\ \beta_\nu=\frac{1}{3}\cdot 2^{\nu-1},\ \gamma_\nu=\frac{\nu}{4\nu-1}\ \ \text{και}\ \ \delta_\nu=\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}\ \ (\nu\ \text{ριζικά}).$$

2. Να βρείτε το γενικό όρο α_ν, ως συνάρτηση του ν, στις ακολουθίες που ορίζονται ως εξής

i) $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\nu^2+\alpha_\nu$

ii) $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{\nu}{\nu+1}\alpha_\nu$

iii) $\alpha_1=\alpha\neq 0$ και $\alpha_{\nu+1}=\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)\alpha_\nu$

iv) $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2^\nu$

v) $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=(\nu+1)\alpha_\nu$.

3. Μια ακολουθία (α_ν) ορίζεται ως εξής $\alpha_1=2$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{1}{3}(2\alpha_\nu+7)$

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_\nu=\alpha_\nu-7$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

ii) Να βρείτε το γενικό όριο α_ν ως συνάρτηση του ν.

iii) Να βρείτε το $\lim\alpha_\nu$.

4. Για την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{6(1+\alpha_\nu)}{7+\alpha_\nu}$, να αποδείξετε ότι

i) η ακολουθία $\beta_\nu=\dfrac{\alpha_\nu-2}{\alpha_\nu+3}$ είναι γεωμετρική πρόοδος και ii) $\lim\alpha_\nu=2$.

5. Αν $\alpha_1=3$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{3\alpha_\nu-4}{\alpha_\nu-1}$, να αποδειχτεί ότι η ακολουθία $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu-2}$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθεί το $\lim\alpha_\nu$, αφού πρώτα εκφραστεί ο α_ν ως συνάρτηση του ν.

6. Αν $\alpha_\nu=\dfrac{2^\nu-1}{4^{\nu-1}}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)=\dfrac{8}{3}$.

7. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{4\nu+3}{8}$ δεν έχει ακέραιους όρους.

8. Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες $\alpha_\nu=\nu^2$ και $\beta_\nu=12\nu+5$ δεν έχουν κοινούς όρους.

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις ακολουθίες

i) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu-1}{\nu+1}$, ii) $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\nu+1}+\dfrac{1}{\nu+2}+\ldots+\dfrac{1}{2\nu}$, iii) $\alpha_\nu=\dfrac{3^\nu}{\nu}$,

iv) $\alpha_\nu=1-(-1)^\nu$, v) $\alpha_\nu=\begin{cases}3\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ 3\nu-5, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$.

10. Να αποδείξετε ότι:

i) η ακολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{2\cdot4\cdot6\ldots2\nu}{3\cdot5\cdot7\ldots(2\nu-1)}\cdot\dfrac{1}{\nu^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα

ii) η ακολουθία $\alpha_\nu=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\nu}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\\[2ex] \dfrac{\nu}{\nu+1}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\end{cases}$ είναι αύξουσα.

11. Να αποδείξετε ότι είναι φραγμένες οι ακολουθίες

i) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2+\nu-1}{4\nu^2+5}$, ii) $\alpha_\nu = \dfrac{\alpha\eta\mu\nu+\beta\sigma\upsilon\nu\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$, iii) $\alpha_\nu = \dfrac{1+2+3+\ldots+\nu}{\nu^2+\nu+1}$

iv) $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu\cdot\sqrt{\nu}}{2\nu+3}$, v) $\alpha_\nu = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+\nu^2}{\nu^2\cdot(-5)^\nu}$, vi) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu}$

vii) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu+1}+\dfrac{1}{\nu+2}+\ldots+\dfrac{1}{2\nu}$, viii) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}\cdot\sqrt[\nu]{1^\nu+2^\nu+\ldots+\nu^\nu}$, ix) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu}$,

x) $\alpha_\nu = \left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$.

12. Να αποδείξετε ότι δεν είναι φραγμένες οι ακολουθίες

i) $\alpha_\nu = 2\nu-1$, ii) $\alpha_\nu=3^\nu$, iii) $\alpha_\nu=2\nu+(-1)^\nu$, iv) $\alpha\nu = \dfrac{\nu^2}{\nu+2}$.

13. Να αποδείξετε ότι γνησίως μονότονες και φραγμένες οι ακολουθίες που ορίζονται ως εξής

i) $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu}$, ii) $\alpha_1=2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\alpha_\nu}$,

iii) $\alpha_1=2$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\dfrac{1}{\alpha_\nu}\right)$, iv) $\alpha_1=\alpha\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha+\dfrac{1}{2}\alpha_\nu^2$.

Επίσης να βρεθεί το όριο των ακολουθιών αυτών.

14. Μια ακολουθία (α_ν) ορίζεται ως εξής

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=2 \ \text{ και } \ 2\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$$

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος .
ii) Να εκφράσετε το γενικό όρο α_ν ως συνάρτηση του ν και να βρείτε το $\lim\alpha_\nu$.
iii) Να αποδείξετε ότι η (α_ν) δεν είναι μονότονη, αλλά είναι φραγμένη.

15. Για μια ακολουθία (α_ν) ισχύει $\dfrac{\nu}{\nu+1}<\alpha_\nu<\dfrac{\nu+1}{\nu+2}$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδειχτεί ότι η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα, φραγμένη και να βρεθεί το όριό της.

16. Να αποδειχτεί ότι η η ακολουθία $\alpha_\nu = \prod_{\kappa=0}^{\nu}\left(\dfrac{3\kappa+1}{3\kappa+2}\right)$ είναι συγκλίνουσα.

(Το σύμβολο $\prod_{\kappa=0}^{\nu}\beta_\kappa$ παριστάνει το γινόμενο $\beta_0\cdot\beta_1\cdot\beta_2\ldots\beta_\nu$).

17. Να αποδείξετε ότι είναι μηδενικές οι ακολουθίες

i) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2}{3^\nu}$, ii) $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\nu-2\sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu}{3\nu+5}$,

iii) $\alpha_\nu = \dfrac{(-2)^\nu}{\nu!}$, iv) $\alpha_\nu = \dfrac{\sqrt{1+4^{-\nu}}-2(-1)^\nu\cdot\eta\mu^5\nu}{2^\nu+3}$.

18. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{\nu!}{\lambda^\nu}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda>1$) έχει όριο το $+\infty$, ενώ η $\beta_\nu = \dfrac{\nu^\nu}{(-3)^\nu}$ δεν έχει όριο.

19. Να βρείτε το όριο των ακολουθιών

i) $\alpha_\nu = \nu\cdot(\sqrt[\nu]{e}-1)^\nu$, ii) $\alpha_\nu = \left(1+\dfrac{3}{\nu^2}\right)^\nu$, iii) $\alpha_\nu = \left(\dfrac{\nu+2}{\nu-1}\right)^\nu$,