

Πρόλογος

Το βιβλίο με τίτλο «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου» είναι γραμμένο με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τα Μαθηματικά Γυμνασίου και απόλυτα εναρμονισμένο με το σχολικό βιβλίο.

Είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους μαθητές αυτής της τάξης, αλλά και οι συνάδελφοι καθηγητές θα βρουν πλούσιο υλικό για το έργο τους.

Η ύλη παρουσιάζεται σε δύο μέρη, συνολικά σε οκτώ κεφάλαια.

Σε κάθε παράγραφο περιέχονται:

- Σύντομη παρουσίαση της θεωρίας με απλά κατανοητά παραδείγματα, με τίτλο «Τι πρέπει να γνωρίζεις».
- Αντιπροσωπευτικά λυμένα παραδείγματα για κάθε περίπτωση με τίτλο «Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα».
- Ερωτήσεις σύντομης απάντησης, κυρίως για προφορική άσκηση, με τίτλο «Σκέψου και απάντησε».
- Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα με τίτλο «Λύσε μόνος σου ασκήσεις και προβλήματα».

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου περιέχονται **επαναληπτικές ασκήσεις**, καθώς και ένα **κριτήριο αξιολόγησης** με τέσσερα θέματα. Επίσης, με την ολοκλήρωση της ύλης, γίνεται μια **επανάληψη** με τη θεωρία σε ερωτήσεις και κατάλληλα επιλεγμένες **γενικές ασκήσεις** σ' όλη την ύλη.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει παράρτημα με **απαντήσεις** ή **υποδείξεις** για όλες τις ερωτήσεις, τις ασκήσεις και τα θέματα των κριτηρίων αξιολόγησης.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Αύγουστος 2007

Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

Α' Μέρος

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις – Ανισώσεις

1.1. Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	9
1.2. Εξισώσεις α' βαθμού	13
1.3. Επίλυση τύπων	22
1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	26
1.5. Ανισώσεις α' βαθμού	33
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο	39
1ο Κριτήριο Αξιολόγησης	39

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	41
2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	47
2.3. Προβλήματα	54
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 2ο κεφάλαιο	58
2ο Κριτήριο Αξιολόγησης	59

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις

3.1. Η έννοια της συνάρτησης	61
3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	67
3.3. Η συνάρτηση $y = ax$	74
3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	80
3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ – Η υπερβολή	89
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 3ο κεφάλαιο	93
3ο Κριτήριο Αξιολόγησης	94

Κεφάλαιο 4

Περιγραφική Στατιστική

4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα	95
4.2. Γραφικές Παραστάσεις	98
4.3. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	105
4.4. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	112
4.5. Μέση τιμή – Διάμεσος	117
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο	124
4ο Κριτήριο Αξιολόγησης	126

Β' Μέρος

Κεφάλαιο 1

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	131
1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών	134
1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	137
1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα	144
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο	149
5ο Κριτήριο Αξιολόγησης	151

Κεφάλαιο 2

Τριγωνομετρία – Διανύσματα

2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας	153
2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	158
2.3. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	164
2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	168

2.5. Η έννοια του διανύσματος	173	4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του	261
2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	177	4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της	267
2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	184	4.7. Γεωγραφικές συντεταγμένες	271
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 2ο κεφάλαιο	188	Επαναληπτικές ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο	275
6ο Κριτήριο Αξιολόγησης	190	8ο Κριτήριο Αξιολόγησης	276

Κεφάλαιο 3

Μέτρηση κύκλου

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες	193
3.2. Κανονικά πολύγωνα	204
3.3. Μήκος κύκλου	210
3.4. Μήκος τόξου	214
3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	219
3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα	224
Επαναληπτικές ασκήσεις στο 3ο κεφάλαιο	229
7ο Κριτήριο Αξιολόγησης	231

Κεφάλαιο 4

Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών

4.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	233
4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	242
4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	249
4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	254

Παράρτημα

Παράρτημα I

Επανάληψη

Ερωτήσεις θεωρίας	279
Ασκήσεις επανάληψης	281
Γενικό κριτήριο αξιολόγησης	283

Παράρτημα II

Απαντήσεις και Υποδείξεις των ερωτήσεων και ασκήσεων του βιβλίου

285

Παράρτημα III

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

από 0° έως 90°

309

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1^ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2^ο ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κεφάλαιο 3^ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4^ο ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



Τι πρέπει να γνωρίζεις

Προσοχή!

Σ' ένα γινόμενο αριθμού με μεταβλητή ή γινόμενο μεταβλητών, μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο (\cdot) του πολλαπλασιασμού.

Π.χ. γράφουμε $3x$ και εννοούμε $3 \cdot x$. Αυτό όμως δε συμβαίνει για το γινόμενο αριθμών.

1 Ένα γράμμα (x ή y ή z ...), που παριστάνει οποιονδήποτε αριθμό, ονομάζεται **μεταβλητή**.

2 Μια έκφραση που περιέχει πράξεις με αριθμούς ονομάζεται **αριθμητική παράσταση**, ενώ μια έκφραση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Π.χ. η έκφραση $5 \cdot 6 - 3 - \frac{5^2}{7}$ είναι μια αριθμητική παράσταση, ενώ η έκφραση $3x - 5ab$ είναι μια αλγεβρική παράσταση.

3 Πολλές φορές, για να γραφεί μια αλγεβρική παράσταση σε απλούστερη μορφή, εφαρμόζουμε την **επιμεριστική ιδιότητα**

$$a \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (a + \beta) \cdot \gamma \quad \text{και} \quad a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = (a - \beta) \cdot \gamma$$

Π.χ. $5x + 7x = (5 + 7)x = 12x$
 $13y - 5y + 7y - 1 = (13 - 5 + 7)y - 1 = 15y - 1$

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι κάνουμε **αναγωγή όμοιων όρων** στην αλγεβρική παράσταση.

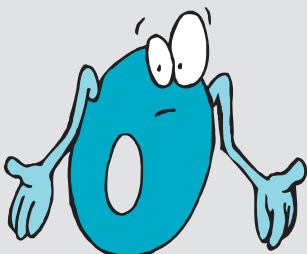
Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

1 Να γίνει αναγωγή όμοιων όρων στις παρακάτω παραστάσεις.

α) $7x - x + 4x - 2x$,

β) $y + 3z - z + 4y$ και

γ) $3(x + 2y) - 2(-x - 5y) + 1$



Λύση

α) $7x - x + 4x - 2x = 7 \cdot x - 1 \cdot x + 4 \cdot x - 2 \cdot x = (7 - 1 + 4 - 2) \cdot x = 8 \cdot x = 8x$

β) $y + 3z - z + 4y = (y + 4y) + (3z - z) = (1 + 4)y + (3 - 1)z = 5y + 2z$

γ) $3(x + 2y) - 2(-x - 5y) + 1 =$
 $= 3x + 6y + 2x + 10y + 1 =$
 $= (3x + 2x) + (6y + 10y) + 1 =$
 $= (3 + 2)x + (6 + 10)y + 1 =$
 $= 5x + 16y + 1.$

Προσοχή!

Όταν υπάρχει πρόσημο ($-$) έξω από μια παρένθεση και την βγάζουμε, τότε αλλάζει το πρόσημο όλων των όρων μέσα στην παρένθεση.

2 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = -10 - (8-x) - [(13-x) - (-20+x)] - 2(3x-25)$,
 όταν $x = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + (0,03:0,01)^{-1}$.

Λύση

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση A και τον αριθμό x .

- Βγάζουμε πρώτα τις παρενθέσεις μέσα στην αγκύλη και έτσι η αγκύλη γίνεται παρένθεση.

$$\begin{aligned} A &= -10 - (8-x) - (13-x+20-x) - 2(3x-25) = \\ &= -10 - 8 + x - 13 + x - 20 + x - 6x + 50 = \\ &= (-10 - 8 - 13 - 20 + 50) + (x + x + x - 6x) = \\ &= (-51 + 50) + (3x - 6x) = (-1) + (-3x) = -1 - 3x. \end{aligned}$$

- Θυμίζουμε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ κι επομένως

$$x = -\left(-\frac{2}{1}\right)^1 + 3^{-1} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \quad (\text{αφού } 0,03:0,01 = 0,03 \cdot 100 = 3)$$

Έτσι, για $x = \frac{7}{3}$ έχουμε

$$A = -1 - 3x = -1 - 3 \cdot \frac{7}{3} = -1 - 7 = -8.$$

Όταν θέλουμε να βρούμε την τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών που περιέχει, πρώτα απλοποιούμε την παράσταση και μετά κάνουμε την αντικατάσταση

3 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = a - (a + \beta + \gamma) - \{(a + \gamma) - [(\beta + \gamma) - (\beta - a)]\}$,
 όταν οι μεταβλητές β και γ έχουν άθροισμα το Ε.Κ.Π. των αριθμών 120 και 450.

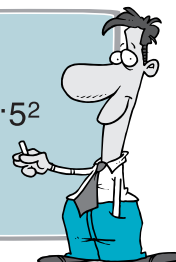
Λύση

➤ Απλοποιούμε την παράσταση A .

$$\begin{aligned} A &= a - (a + \beta + \gamma) - [(a + \gamma) - (\beta + \gamma - \beta + a)] = \\ &= a - (a + \beta + \gamma) - (a + \gamma - \beta - \gamma + \beta - a) = \\ &= a - a - \beta - \gamma - a - \gamma + \beta + \gamma - \beta + a = \\ &= (a - a - a + a) + (-\beta + \beta - \beta) + (-\gamma - \gamma + \gamma) = \\ &= 0 + (-\beta) + (-\gamma) = -\beta - \gamma = -(\beta + \gamma) \end{aligned}$$

➤ Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 120 και 450, αναλύουμε κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

120	2		450	2
	60			225
	30	$2120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$		75
	15			25
	5			5
	1			1
				$3450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$



Έτσι, $\text{Ε.Κ.Π.}(120, 450) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 72 \cdot 25 = 1800$.

Επειδή $\beta + \gamma = 1800$, είναι $A = -(\beta + \gamma) = -1800$.

Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν
 $a + (-a) = 0$

4 Βρες τον αριθμό που προκύπτει, εκτελώντας τον παρακάτω «μαγικό» αλγόριθμο.

«Πάρε έναν οποιονδήποτε αριθμό. Πρόσθεσε σ' αυτόν το 7. Πολλαπλασίασε το άθροισμα επί 5. Αφαίρεσε από το γινόμενο το 30. Διαίρεσε τη διαφορά με 5. Αφαίρεσε από το πηλίκο τον αρχικό αριθμό».



Λύση

Ας ονομάσουμε x έναν οποιονδήποτε αριθμό, οπότε έχουμε να κάνουμε τις εξής πράξεις:

$$[(x + 7) \cdot 5 - 30] : 5 - x$$

Η παράσταση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} (5x + 35 - 30) : 5 - x &= (5x + 5) : 5 - x = \\ &= \frac{5(x + 1)}{5} - x = x + 1 - x = \\ &= (x - x) + 1 = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Μια αλγεβρική παράσταση που ισούται με έναν συγκεκριμένο αριθμό, για οποιαδήποτε τιμές των μεταβλητών της, λέμε ότι είναι σταθερή.

Έτσι, όποιον αριθμό πάρει κάποιος, το αποτέλεσμα που βρίσκει είναι πάντα 1.

Σκέψου και απάντησε

- Η αλγεβρική παράσταση $5x + 10x - 18x$ ισούται με
α) $3x$ **β)** 0 **γ)** $-3x$ **δ)** -3 **ε)** $-3x^3$
- Ποιες από τις παρακάτω ισότητες αληθεύουν;
α) $(a - b) \cdot x = ax - bx$ **β)** $(a + b) : \gamma = (a : \gamma) + (b : \gamma)$
γ) $a : (b + \gamma) = (a : b) + (a : \gamma)$ **δ)** $\frac{a - b}{\gamma} = \frac{a}{\gamma} - \frac{b}{\gamma}$
ε) $\frac{a}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a + \gamma}{\beta + \delta}$ **στ)** $\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$
- Ποια είναι η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $A = 2(x + 1) - 3(x - 1)$, όταν $x = 10$;
- Με τι ισούται το γινόμενο $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot (x + 5)$, όταν $x = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$;
- Αν ο x είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, με τι ισούται η παράσταση $y = (-1)^x + (-1)^{x+1}$;

Λύσε μόνος σου ασκήσεις και προβλήματα

- Να γίνει αναγωγή όμοιων όρων στις παρακάτω παραστάσεις:
α) $3x - 5x - 7x + 8x$, **β)** $2x - y + 5x - 4y$, **γ)** $a + \beta + \gamma - 2a + 3\beta - 4\gamma$
δ) $2(x - 3\omega) - 4(-x + \omega) - 3(5 - 2\omega)$, **ε)** $-2(x - y + 3z) + 4(2y - x) - (x - 3z)$.

- 2** Γράψε τις παρακάτω εκφράσεις με τη βοήθεια μεταβλητών.
- α) Το μισό ενός αριθμού, ελαττωμένο κατά 15.
 - β) Το 30% της διαφοράς δύο αριθμών.
 - γ) Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.
 - δ) Το εμβαδόν ενός τραπεζίου.
 - ε) Ο δείκτης μάζας ενός ανθρώπου ισούται με το βάρος του προς το τετράγωνο του ύψους του σε μέτρα.

- 3** Να βρεθεί η τιμή της παράστασης.
- α) $A = -(-x-y)$, όταν οι μεταβλητές x και y έχουν άθροισμα -10 .
 - β) $B = -(-y) + (-x)$, όταν η διαφορά του y από το x είναι 10.
 - γ) $\Gamma = 2(x-y-z) - 3(-x+y+z) + 4(x+y-z)$, όταν $x-z = \frac{y}{9}$.

- 4** Αν $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}$ και $\gamma = -2 \cdot 2^{-1}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = -[\alpha - (\beta - \gamma)] + \{-(\beta - \gamma) + [\beta - (\gamma - \alpha)] - [\alpha + (\beta + \gamma)] - (\alpha + \beta)\}.$$

- 5** Τα πάγια τέλη μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας είναι 20 € και η χρέωση είναι $0,30 \text{ €}$ ανά λεπτό ομιλίας. Στο σύνολο του λογαριασμού υπάρχει και Φ.Π.Α. 19%. Να εκφραστεί με μια αλγεβρική παράσταση ο λογαριασμός ενός πελάτη της εταιρείας αυτής για οποιονδήποτε χρόνο ομιλίας.

- 6** Βρες την τιμή των παρακάτω παραστάσεων για τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών τους.

α) $-2(-\alpha + \beta + \gamma) - 3[-2(\alpha - 2\beta) + 3(5\alpha - 3\gamma)]$, όταν $\alpha = -1$, $\beta = 3$ και $\gamma = -4$.

β) $[(\alpha^3)^2 \cdot \alpha^{-7}] : \alpha^{-4}$, όταν $\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$.

γ) $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) : \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - (\alpha - \beta + 3\gamma) : (-\alpha\beta\gamma)$, όταν $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{2}{3}$ και $\gamma = 0,2$.

δ) $\frac{-\alpha^2}{\beta^2 - \gamma^4} : \frac{\left(2\alpha - \frac{1}{4}\gamma\right)^3}{(-\gamma - 2\beta)^3}$, όταν $\alpha = -0,25$, $\beta = \frac{1}{3}$ και $\gamma = (-1)^5$.

ε) $\frac{(3\alpha - \beta)^2}{[(-2)^{27\alpha} \cdot 0,125]^4} : \left(\frac{-3 + \left[a^7 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^7\right]^8}{(-1 + 3\beta)^2}\right)^{-1}$, όταν $\alpha = \beta = \frac{1}{9}$.

- 7** Να συμπληρωθεί ο διπλανός πίνακας.

x	x^2	x^{-2}	$\frac{1}{x}$	5^x	$(-10)^x$
-1
.....	-0,25
.....	0,04

Τι πρέπει
να γνωρίζεις

1 Αν έχουμε μια ισότητα, τότε μπορούμε:

α) Να προσθέσουμε στα μέλη της τον ίδιο αριθμό.

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

β) Να αφαιρέσουμε από τα μέλη της τον ίδιο αριθμό.

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

γ) Να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της με τον ίδιο αριθμό.

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

δ) Να διαιρέσουμε τα μέλη της με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\text{Αν } \alpha = \beta \text{ και } \gamma \neq 0, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$$

2 Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο ονομάζεται **εξίσωση**.

Π.χ. η ισότητα $3x - 5 = x + 3$ είναι εξίσωση με άγνωστο τον x .

Η παράσταση $3x - 5$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 3$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

3 Για να λύσουμε μια εξίσωση, δηλαδή να βρούμε τον αριθμό που την επαληθεύει και λέγεται **ρίζα** ή **λύση** της εξίσωσης, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία, που ονομάζεται **επίλυση** της εξίσωσης.



Επίλυση της εξίσωσης

α) Αν υπάρχουν παρονομαστές, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών για να κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών**.

β) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις (αν υπάρχουν).

γ) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. Μεταφέροντας όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζει το πρόσημό τους.

δ) Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.

ε) Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

Λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα

1 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $3x + 5 = x + 11$

β) $-6x = 14 + x$

γ) $1 + 3x - 7 = -2 + x - 4 + 2x$

δ) $2x + 1 = 7 + 2x$

Λύση

Δεν έχουμε κλάσματα, ούτε παρενθέσεις.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση, χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

α) $3x + 5 = x + 11$ ή $3x - x = 11 - 5$ ή $2x = 6$ ή

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \text{ ή } x = 3.$$

β) $-6x = 14 + x$ ή $-6x - x = 14$ ή

$$-7x = 14 \text{ ή } \frac{-7x}{-7} = \frac{14}{-7} \text{ ή } x = -2.$$

γ) $1 + 3x - 7 = -2 + x - 4 + 2x$ ή

$$3x - x - 2x = -1 + 7 - 2 - 4 \text{ ή } 0x = 0$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε αριθμό x , δηλαδή είναι μια ταυτότητα.

δ) $2x + 1 = 7 + 2x$ ή

$$2x - 2x = 7 - 1 \text{ ή } 0x = 6.$$

Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται από καμιά τιμή του x , αφού το 0 με όποιον αριθμό και να πολλαπλασιαστεί δίνει γινόμενο 0.

Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$
επαληθεύεται για οποιοδήποτε αριθμό x και λέγεται
ταυτότητα ή αόριστη

Η εξίσωση $0 \cdot x = a, a \neq 0$
δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x και λέμε ότι είναι
αδύνατη

2 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2(y + 1) - 3(y - 4) = 8(2 - y)$

β) $0,75(\omega - 4) + 1,25\omega = 0,5 - 1,5\omega$

Λύση

Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.

α) $2(y + 1) - 3(y - 4) = 8(2 - y)$ ή $2y + 2 - 3y + 12 = 16 - 8y$ ή

$$2y - 3y + 8y = 16 - 2 - 12 \text{ ή } 7y = 2 \text{ ή } \frac{7y}{7} = \frac{2}{7} \text{ ή } y = \frac{2}{7}.$$

β) $0,75(\omega - 4) + 1,25\omega = 0,5 - 1,5\omega$ ή

$$0,75\omega - 3 + 1,25\omega = 0,5 - 1,5\omega \text{ ή}$$

$$0,75\omega + 1,25\omega + 1,5\omega = 0,5 + 3 \text{ ή}$$

$$3,5\omega = 3,5 \text{ ή } \frac{3,5\omega}{3,5} = \frac{3,5}{3,5} \text{ ή } \omega = 1.$$

3 Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις

α) $\frac{2x+4}{5} = x - \frac{1}{2}$ και

β) $\frac{4(x-3)}{5} = \frac{2(-2x+1)}{3}$

Λύση

Αν η εξίσωση είναι ισότητα δύο κλασμάτων (δηλαδή αναλογία), τότε, αντί για απαλοιφή παρονομαστών, εφαρμόζουμε την «χιαστί» ιδιότητα.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ Τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

α) $\frac{2x+4}{5} = \frac{x-1}{2}$ ή $2 \cdot (2x+4) = 5 \cdot (x-1)$ ή $4x+8 = 5x-5$

ή $4x-5x = -5-8$ ή $-x = -13$ ή $x = 13$.

β) $\frac{4(x-3)}{5} = \frac{2(-2x+1)}{3}$ ή $3 \cdot 4(x-3) = 5 \cdot 2(-2x+1)$

ή $12(x-3) = 10(-2x+1)$ ή $12x-36 = -20x+10$

ή $12x+20x = 36+10$ ή $32x = 46$ ή $x = \frac{46}{32}$ ή $x = \frac{23}{16}$.

4 Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{x}{6} + \frac{x+1}{5} = \frac{x}{2} + 1$ β) $12 - \left(\frac{3y+1}{4} + \frac{2y+1}{3} \right) = 10 - \frac{5y-1}{4} + \frac{y+5}{6}$

γ) $\frac{2\omega-1}{3} - \frac{3(\omega+1)}{2} = \frac{1}{6}(2-3\omega)$.

δ) $\frac{3x-1}{(-2)^{-2}} - 0,5 \cdot \frac{\frac{1}{2}x-1,5}{1-2^{-1}} = \frac{1}{3} \cdot \left(-6 - \frac{5x+7}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot [-(-3)^0 + (x+1) : (-1)^5]$

Λύση

α) Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με τον αριθμό Ε.Κ.Π. $(5, 6, 2) = 30$, ώστε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

$$30 \cdot \left(\frac{x}{6} + \frac{x+1}{5} \right) = 30 \cdot \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \quad \text{ή}$$

$$30 \cdot \frac{x}{6} + 30 \cdot \frac{x+1}{5} = 30 \cdot \frac{x}{2} + 30 \cdot 1 \quad \text{ή} \quad 5x + 6(x+1) = 15x + 30$$

$$\text{ή} \quad 5x + 6x + 6 = 15x + 30 \quad \text{ή} \quad 5x + 6x - 15x = 30 - 6$$

$$\text{ή} \quad -4x = 24 \quad \text{ή} \quad \frac{-4x}{-4} = \frac{24}{-4} \quad \text{ή} \quad x = -6.$$

β) Βγάζουμε πρώτα την παρένθεση και μετά κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

$$12 - \frac{3y+1}{4} - \frac{2y+1}{3} = 10 - \frac{5y-1}{4} + \frac{y+5}{6}$$

$$\text{ή} \quad 12 \cdot \left(12 - \frac{3y+1}{4} - \frac{2y+1}{3} \right) = 12 \cdot \left(10 - \frac{5y-1}{4} + \frac{y+5}{6} \right)$$

$$\eta \quad 12 \cdot 12 - 12 \cdot \frac{3y+1}{4} - 12 \cdot \frac{2y+1}{3} = 12 \cdot 10 - 12 \cdot \frac{5y-1}{4} + 12 \cdot \frac{y+5}{6}$$

$$\eta \quad 144 - 3(3y+1) - 4(2y+1) = 120 - 3(5y-1) + 2(y+5)$$

$$\eta \quad 144 - 9y - 3 - 8y - 4 = 120 - 15y + 3 + 2y + 10$$

$$\eta \quad -9y - 8y + 15y - 2y = 120 + 3 + 10 - 144 + 3 + 4$$

$$\eta \quad -4y = -4 \quad \eta \quad \frac{-4y}{-4} = \frac{-4}{-4} \quad \eta \quad y = 1.$$

$$\gamma) \quad \frac{2\omega-1}{3} - \frac{3\omega+1}{2} = \frac{1}{6}(2-3\omega)$$

$$\eta \quad 6 \cdot \frac{2\omega-1}{3} - 6 \cdot \frac{3\omega+1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{6}(2-3\omega)$$

$$\eta \quad 2(2\omega-1) - 3(3\omega+1) = 2-3\omega \quad \eta \quad 4\omega-2-9\omega-3 = 2-3\omega$$

$$\eta \quad 4\omega-9\omega+3\omega = 2+3+2 \quad \eta \quad -2\omega = 7 \quad \eta \quad \omega = -\frac{7}{2}.$$

δ) Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{3x-1}{\frac{1}{(-2)^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{6}{3} - \frac{5x+7}{12} - (-2)^2 [-1 + (x+1) : (-1)]$$

$$\eta \quad 4(3x-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -2 - \frac{5x+7}{12} - 4(-1-x-1)$$

$$\eta \quad 12x-4 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = -2 - \frac{5x+7}{12} + 4 + 4x + 4$$

$$\eta \quad 12x-4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 4x+6 - \frac{5x+7}{12}.$$

Κάνουμε, τώρα, απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της επί 12.

$$12 \cdot \left(12x-4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 12 \cdot \left(4x+6 - \frac{5x+7}{12}\right)$$

$$\eta \quad 12 \cdot 12x - 12 \cdot 4 - 12 \cdot \frac{1}{2}x + 12 \cdot \frac{3}{2} = 12 \cdot 4x + 12 \cdot 6 - 12 \cdot \frac{5x+7}{12}$$

$$\eta \quad 144x - 48 - 6x + 18 = 48x + 72 - 5x - 7$$

$$\eta \quad 144x - 6x - 48x + 5x = 72 - 7 + 48 - 18$$

$$\eta \quad 95x = 95 \quad \eta \quad x = 1$$



5 Να βρεθεί ο αριθμός a ώστε η εξίσωση

$$(2a-1)x - \frac{a}{3} \left(\frac{2x-1}{2} + 2 \right) = x - \frac{1}{2}$$

να έχει ως λύση τον αριθμό $x=2$.

Λύση

Ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης αυτής, όταν την επαληθεύει, δηλαδή όταν ισχύει

$$(2a-1) \cdot 2 - \frac{a}{3} \left(\frac{2 \cdot 2 - 1}{2} + 2 \right) = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } 4a - 2 - \frac{a}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{ή } 4a - 2 - \frac{3a}{6} - \frac{2a}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ή } 6 \cdot \left(4a - 2 - \frac{3a}{6} - \frac{2a}{3} \right) = 6 \cdot \frac{3}{2} \quad \text{ή } 6 \cdot 4a - 12 - 6 \cdot \frac{3a}{6} - 6 \cdot \frac{2a}{3} = 9$$

$$\text{ή } 24a - 12 - 3a - 4a = 9 \quad \text{ή } 24a - 3a - 4a = 12 + 9$$

$$\text{ή } 17a = 21 \quad \text{ή } a = \frac{21}{17}.$$

6 Να βρεθεί ο αριθμός λ για τον οποίο οι εξισώσεις

$$x - \frac{3(x+1)}{4} = \frac{2x-1}{3} \quad \text{και}$$

$$0,2(x-4) - \lambda x = \frac{1}{10}(19-x) - \frac{3-\lambda}{3}$$

έχουν την ίδια λύση.

Λύση

♦ Λύνουμε την πρώτη εξίσωση, κάνοντας πρώτα απαλοιφή παρονομαστών.

$$12 \cdot x - 12 \cdot \frac{3(x+1)}{4} = 12 \cdot \frac{2x-1}{3} \quad \text{ή } 12x - 3 \cdot 3(x+1) = 4 \cdot (2x-1)$$

$$\text{ή } 12x - 9(x+1) = 8x - 4 \quad \text{ή } 12x - 9x - 9 = 8x - 4$$

$$\text{ή } 12x - 9x - 8x = 9 - 4 \quad \text{ή } -5x = 5 \quad \text{ή } x = -1.$$

♦ Ο αριθμός $x = -1$ είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης, όταν την επαληθεύει, δηλαδή

$$0,2(-1-4) - \lambda \cdot (-1) = \frac{1}{10} [19 - (-1)] - \frac{3-\lambda}{3}$$

$$\text{ή } 0,2 \cdot (-5) + \lambda = \frac{1}{10} \cdot (19+1) - \frac{3-\lambda}{3}$$

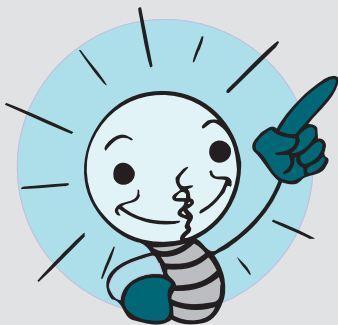
$$\text{ή } -1 + \lambda = \frac{1}{10} \cdot 20 - \frac{3-\lambda}{3} \quad \text{ή } -1 + \lambda = 2 - \frac{3-\lambda}{3}$$

$$\text{ή } 3 \cdot (-1 + \lambda) = 3 \cdot \left(2 - \frac{3-\lambda}{3} \right) \quad \text{ή } -3 + 3\lambda = 6 - 3 \cdot \frac{3-\lambda}{3}$$

$$\text{ή } -3 + 3\lambda = 6 - 3 + \lambda \quad \text{ή } 3\lambda - \lambda = 3 + 6 - 3$$

$$\text{ή } 2\lambda = 6 \quad \text{ή } \lambda = 3.$$

Άρα, για $\lambda = 3$ οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή λύση τον αριθμό $x = -1$.



7 α) Πότε είναι αδύνατη η εξίσωση

$$2x - \frac{\lambda(x+1)}{3} = \frac{2x-\lambda}{2} + 1;$$

β) Πότε είναι ταυτότητα η εξίσωση

$$\frac{\lambda x + 6}{3} - x = \lambda - 1;$$

Λύση

α) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε

$$6 \cdot 2x - 6 \cdot \frac{\lambda(x+1)}{3} = 6 \cdot \frac{2x-\lambda}{2} + 6 \cdot 1$$

$$\text{ή } 12x - 2\lambda(x+1) = 3(2x-\lambda) + 6$$

$$\text{ή } 12x - 2\lambda x - 2\lambda = 6x - 3\lambda + 6$$

$$\text{ή } 12x - 2\lambda x - 6x = 2\lambda - 3\lambda + 6$$

$$\text{ή } (12 - 2\lambda - 6) \cdot x = -\lambda + 6$$

$$\text{ή } (6 - 2\lambda)x = -\lambda + 6$$

Αδύνατη είναι μία εξίσωση που τελικά παίρνει τη μορφή

$$0 \cdot x = a \text{ με } a \neq 0$$

Για να είναι αδύνατη η εξίσωση, πρώτα απ' όλα ο συντελεστής του x πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή

$$6 - 2\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad -2\lambda = -6 \quad \text{ή} \quad \lambda = 3.$$

Πράγματι, για $\lambda = 3$, η εξίσωση γράφεται $0 \cdot x = -3 + 6$, δηλαδή $0 \cdot x = 3$ και είναι αδύνατη.

β)
$$\frac{\lambda x + 6}{3} - x = \lambda - 1 \quad \text{ή}$$

$$\text{ή } 3 \cdot \frac{\lambda x + 6}{3} - 3 \cdot x = 3 \cdot \lambda - 3 \cdot 1$$

$$\text{ή } \lambda x + 6 - 3x = 3\lambda - 3$$

$$\text{ή } \lambda x - 3x = 3\lambda - 3 - 6 \quad \text{ή} \quad (\lambda - 3) \cdot x = 3\lambda - 9$$

Αν $\lambda - 3 = 0$, δηλαδή $\lambda = 3$, τότε η εξίσωση γράφεται

$$0 \cdot x = 3 \cdot 3 - 9 \quad \text{ή} \quad 0 \cdot x = 0 \text{ και είναι ταυτότητα.}$$

Ταυτότητα είναι μία εξίσωση που τελικά παίρνει τη μορφή

$$0 \cdot x = 0$$

8 Σκέψου έναν οποιονδήποτε αριθμό και κάνε τις εξής πράξεις:

α) Πολλαπλασίασε τον αριθμό με το 10.

β) Αφαίρεσε από το γινόμενο το 5.

γ) Διαίρεσε τη διαφορά με το 5.

δ) Αφαίρεσε από το πηλίκο το διπλάσιο τον αριθμό που πήρες αρχικά.

ε) Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα τον αριθμό 7.

Θα βρεις αποτέλεσμα 6. Δοκίμασέ το και με άλλους αριθμούς. Πώς εξηγείται αυτό;

Λύση

Αν πάρουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό x , οι πράξεις που κάνουμε είναι:

α) $10 \cdot x$, β) $10x - 5$, γ) $\frac{10x-5}{5}$, δ) $\frac{10x-5}{5} - 2x$ και

ε) $\frac{10x-5}{5} - 2x + 7$.

Αφού το αποτέλεσμα λέμε ότι είναι 6, έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{10x-5}{5} - 2x + 7 = 6,$$

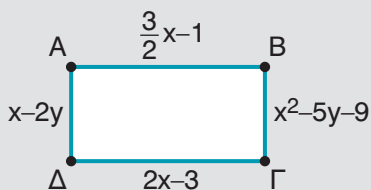
η οποία γράφεται

$$5 \cdot \frac{10x-5}{5} - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 7 = 5 \cdot 6 \quad \text{ή} \quad 10x - 5 - 10x + 35 = 30$$

$$\text{ή } 10x - 10x = 5 - 35 + 30 \quad \text{ή} \quad 0 \cdot x = 0.$$

Η εξίσωση είναι ταυτότητα, δηλαδή όποιον αριθμό και να σκεφτούμε, μετά τις πράξεις που κάναμε, το αποτέλεσμα θα είναι πάντα το ίδιο, δηλαδή 6.

9 Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογώνιου ΑΒΓΔ.



Λύση

Οι απέναντι πλευρές ενός ορθογώνιου είναι ίσες και επομένως

$$2x-3 = \frac{3}{2}x-1 \quad \text{και} \quad x-2y = x^2-5y-9.$$

- Λύνουμε την πρώτη εξίσωση με απαλοιφή παρονομαστών.

$$2 \cdot (2x-3) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}x-1\right) \quad \text{ή} \quad 4x-6 = 3x-2$$

$$\text{ή} \quad 4x-3x = 6-2 \quad \text{ή} \quad x=4.$$

- Για $x=4$, η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$4-2y = 4^2-5y-9 \quad \text{ή} \quad -2y+5y = 16-9-4$$

$$\text{ή} \quad 3y=3 \quad \text{ή} \quad y=1.$$

Το ορθογώνιο έχει μήκος $2x-3 = 2 \cdot 4-3 = 8-3 = 5$

και πλάτος $x-2y = 4-2 \cdot 1 = 4-2 = 2$.

Άρα, το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι $E = \beta \cdot \upsilon = 5 \cdot 2 = 10$.

Σκέψου και απάντησε

- 1) Σε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης, αντιστοίχισε τη λύση της στη δεύτερη στήλη.

Εξίσωση	Λύση
α) $3x-5 = x+1$	1) 6
β) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$	2) 0
γ) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} = 3$	3) 3
	4) 2

- 2) Για ποια τιμή του a η εξίσωση $ax=0$ αληθεύει για κάθε αριθμό x ;

- 3) Για ποια τιμή του a είναι αδύνατη η εξίσωση $(a-1)x = a$;

- 4) Βρες απευθείας τη λύση των παρακάτω εξισώσεων.

α) $x+4 = 15$ β) $x-13 = 25$ γ) $2x+1 = 7$ δ) $3x-2 = 13$

ε) $x+1 = x+2$ στ) $2x+5 = 2+x+3+x$ ζ) $\frac{x}{2} + 1 = 5$

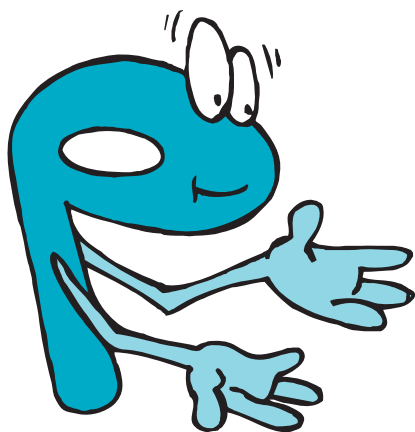
- 5) Να εκφράσεις με εξίσωση καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού, ελαττωμένο κατά 35, ισούται με 42.

β) Το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων ισούται με 33.

γ) Το διπλάσιο ενός αριθμού ισούται με το τριπλάσιό του, ελαττωμένο κατά 20.

δ) Η περίμετρος είναι ορθογώνιου, του οποίου οι διαστάσεις διαφέρουν κατά 3 cm, ισούται με 20 cm.



- 6) Χαρακτήρισε με «Σωστό» ή «Λάθος», καθεμιά από τις προτάσεις:
- α) Η εξίσωση $3x-7=2$ έχει λύση τον αριθμό 3.
- β) Η εξίσωση $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = x-1$ έχει λύση τον αριθμό 6.
- γ) Η εξίσωση $3t-2(t+1) = -\frac{1}{2}t + 3,5$ έχει λύση τον αριθμό -1 .
- δ) Η εξίσωση $3x=5$ δεν έχει ακέραιη λύση.
- ε) Η εξίσωση $3y-2 = y-2 + 2y$ είναι αδύνατη.

Λύσε μόνοι σου ασκήσεις και προβλήματα

1) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

- α) $x+1=3$ β) $2x-3=5$
- γ) $-3x+0,1=1$ δ) $7x-8=2x+7$
- ε) $3-5x=3-x$ στ) $5x+1=2+5x$
- ζ) $-2x+0,1 = \frac{1}{10} - 2x$
- η) $2(x-2)-3(1-2x) = -2(1-0,5x) + 2$
- θ) $0,2(x-5)-0,5(x-6) + 3\left(1-\frac{x}{3}\right) = 2-x$
- ι) $-3(x-5) - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot (2x-10) + 7(3x-15) =$
 $= 2x-3 + 4(2-x) + x$

2) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

- α) $\frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{6}$
- β) $\frac{3x+5}{5} = \frac{2(1-x)}{10}$
- γ) $\frac{2(x-1)}{12} = \frac{-0,1(3x+1)}{3}$
- δ) $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{x+4}{4}$
- ε) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = -8$
- στ) $2y - 5\left(\frac{y}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}(y-6) + 7$
- ζ) $t-1 - \frac{3t}{4} = \frac{2t-3}{3}$

η) $0,4(\omega-6) - \frac{1}{5}(\omega+2) = 0,2(\omega-14)$

θ) $0,1(3\phi-1) + \frac{2}{3} = \frac{4}{5}(3\phi-1) - \frac{4}{15}$

ι) $\delta = \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{7} + 5 + \frac{\delta}{2} + 4$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $3^{-1} \cdot (2x+1) - 3^{-2} \cdot (3x-2) =$
 $= 2^{-1} \cdot (5x-2) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (2x+3)$

β) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x-5}{2} - 1\right) - \frac{4(2x-7)}{9} = \frac{13}{24} - \frac{1}{3}\left[\frac{5}{3}(x-2) - 3\right]$

γ) $\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2} - 1\right) - \left[x - \left(\frac{3}{2} - \frac{x-1}{3}\right)\right] =$
 $= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6}(x-1) - 1$

δ) $2(x+1) - 3\left[\frac{1}{2}(5x+4) - 3\left(x+1 - \frac{x}{3}\right)\right] =$
 $= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)$

4) Για ποια τιμή του αριθμού a είναι αδύνατες οι παρακάτω εξισώσεις;

α) $(a-2)x = 7$

β) $3ax = 2-3x$

γ) $\frac{x-1}{3} - \frac{ax-2}{2} = \frac{5}{6}$

