

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου και είναι χωρισμένο σε τέσσερα μέρη.

- ◆ Στο πρώτο μέρος δίνονται είκοσι (20) **Κριτήρια Αξιολόγησης**, τα οποία αναφέρονται:
 - α) σε κάθε διδακτική ενότητα
 - β) σε κάθε κεφάλαιο
 - γ) σ' όλη την εξεταστέα ύλη.

Κάθε κριτήριο αξιολόγησης περιέχει τέσσερα (4) θέματα κλιμακούμενης δυσκολίας, σύμφωνα με το πνεύμα των Πανελληνίων Εξετάσεων.

- ◆ Στο δεύτερο μέρος αναφέρονται τα **θέματα των Πανελληνίων Εξετάσεων** που δόθηκαν κατά τα έτη 2000 και 2001. Ακόμη, αναφέρονται και τα θέματα των εξετάσεων προσομοίωσης που έγιναν σε φροντιστήρια όλης της χώρας κατά το έτος 2001.
- ◆ Το τρίτο μέρος του βιβλίου περιέχει τις **πλήρεις απαντήσεις** όλων των παραπάνω θεμάτων. Φυσικά, ο αναγνώστης μαθητής θα πρέπει να δοκιμάσει τις δυνατότητές του, προσπαθώντας να λύσει μόνος του κάθε θέμα και στη συνέχεια να συμβουλευτεί τη λύση του βιβλίου.
- ◆ Το τέταρτο μέρος περιέχει τα θέματα εξετάσεων μετά το έτος 2002 με τις απαντήσεις τους.

Με ευχαρίστηση θα δεχτώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Καλή επιτυχία,
Θανάσης Ξένος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Πράξεις και μέτρο μιγαδικών αριθμών	8
2ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού	11
3ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Μιγαδικοί αριθμοί	14
4ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Συναρτήσεις • Μονότονες συναρτήσεις • Αντίστροφη συνάρτηση	17
5ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Πεπερασμένο και μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	20
6ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Όριο συνάρτησης στο άπειρο Όριο εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης	23
7ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Συνέχεια συνάρτησης	26
8ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Όριο και συνέχεια συνάρτησης	29
9ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Η έννοια της παραγώγου, κανόνες παραγώγισης και ρυθμός μεταβολής	33
10ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής	36
11ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης	39
12ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Κυρτότητα συνάρτησης • Ασύμπτωτες • Κανόνας De L' Hospital	42
13ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Διαφορικός Λογισμός	45
14ο Κριτήριο αξιολόγησης	
<i>Διδακτική ενότητα:</i> Αόριστο ολοκλήρωμα και μέθοδοι ολοκλήρωσης	49

15ο Κριτήριο αξιολόγησης

Διδακτική ενότητα: Το ορισμένο ολοκλήρωμα και η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$... 51

16ο Κριτήριο αξιολόγησης

Διδακτική ενότητα: Εμβαδόν επιπέδου χωρίου 54

17ο Κριτήριο αξιολόγησης

Διδακτική ενότητα: Ολοκληρωτικός Λογισμός 57

18ο Κριτήριο αξιολόγησης

Πρώτο επαναληπτικό 60

19ο Κριτήριο αξιολόγησης

Δεύτερο επαναληπτικό 63

20ο Κριτήριο αξιολόγησης

Τρίτο επαναληπτικό 66

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**Θέματα απολυτηρίων εξετάσεων Ιουνίου 2000**

Μαθηματικά δευικής κατεύθυνσης 70

Θέματα απολυτηρίων εξετάσεων Ιουνίου 2000

Μαθηματικά τεχνολογικής κατεύθυνσης 73

Θέματα επαναληπτικών απολυτηρίων εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2000

Μαθηματικά δευικής κατεύθυνσης 75

Θέματα επαναληπτικών απολυτηρίων εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2000

Μαθηματικά τεχνολογικής κατεύθυνσης 77

Θέματα απολυτηρίων εξετάσεων Ιουνίου 2001

Μαθηματικά δευικής & τεχνολογικής κατεύθυνσης 80

Θέματα εξετάσεων προσομοίωσης (Απρίλιος 2001)

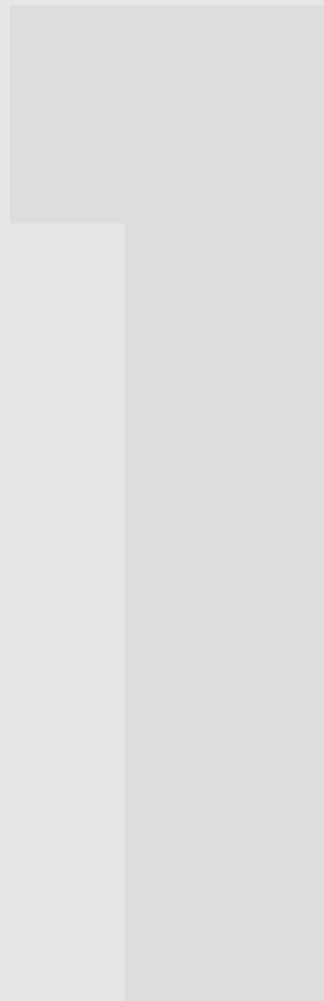
Μαθηματικά δευικής & τεχνολογικής κατεύθυνσης 80

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 85

Θέματα εξετάσεων μετά το έτος 2002 (με τις απαντήσεις τους) 231



Κριτήρια Αξιολόγησης



1_ο Κριτήριο Αξιολόγησης

Διδακτική Ενότητα: **Πράξεις και μέτρο μιγαδικών αριθμών**

ΘΕΜΑ 1ο

Απαντήσεις → σελ. 86

Κριτήρια Αξιολόγησης Γ Λυκείου

Θ5Ξένος

A1 Για οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , να αποδείξετε ότι

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

► Μονάδες 6,5

A2 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

α) Για κάθε φανταστικό αριθμό z ισχύει $z^2 \leq 0$.

β) Δεν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί που έχουν ως συζυγή τον αντίθετό τους.

γ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|z + ai| = |z - ai|.$$

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών $a + bi$ και $-b + ai$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ανήκουν στον ίδιο κύκλο κέντρου $O(0, 0)$.

► Μονάδες 6

B1 Σε κάθε σχέση της στήλης A που επαληθεύει ο μιγαδικός αριθμός z , να αντιστοιχίσετε τη γραμμή της στήλης B, στην οποία ανήκει η εικόνα του.

	Στήλη A	Στήλη B
α.	$ z = 2$	1. $x + y = 0$
		2. $x = 0$
β.	$ z - i + 1 \leq 2$	3. $x^2 + y^2 = 4$
		4. $y = 0$
γ.	$ z - i = z + 1 $	5. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$
		6. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$
δ.	$\bar{z} + z = 0$	7. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
		8. $x^2 - y^2 = 1$
ε.	$\overline{\bar{z} - z} = 0$	
στ.	$ z - 1 + z + 1 = 4$	

► Μονάδες 6

B2 Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq \pm i$, να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{\bar{z} - i}{z^2 + 1} \right| = \left| \frac{z + i}{\bar{z}^2 + 1} \right|.$$

► Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Απαντήσεις ➔ σελ. 86

Κριτήρια Αξιολόγησης Γ Λυκείου

Θ. Ξένος

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{x + yi} - 2(1-i) = \frac{1+i}{1-i} \quad \blacktriangleright \text{Μονάδες } 6$$

β) Να γράψετε στη μορφή $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) το μιγαδικό αριθμό

$$z = i^{16} + 2i^{73} + 3i^{2002} + 4i^{-17} \quad \blacktriangleright \text{Μονάδες } 6$$

γ) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{(1-i)^2 \cdot (\sqrt{3}-i)}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5}$$

έχει την εικόνα του στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 16$. \blacktriangleright Μονάδες 7

δ) Αν $\alpha - 2\beta i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{20}$

και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 4\beta^2 = 1$. \blacktriangleright Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Απαντήσεις ➔ σελ. 87

Κριτήρια Αξιολόγησης Γ Λυκείου

Θ. Ξένος

A Έστω μιγαδικός αριθμός z με $|z+2i| = 2|z-i|$. Να αποδείξετε ότι

α) Το σημείο $M(z)$ διαγράφει κύκλο. \blacktriangleright Μονάδες 5

β) $|z-2i| = 2$ \blacktriangleright Μονάδες 3

γ) Η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{z}{z-2i}$ διαγράφει κύκλο. \blacktriangleright Μονάδες 4,5

B α) Αν ο z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z| = \rho > 0$, να εκφράσετε τον \bar{z} ως συνάρτηση του z^{-1} . \blacktriangleright Μονάδες 3

β) Αποδείξτε ότι ένας μιγαδικός αριθμός z είναι φανταστικός, αν και μόνον αν ισχύει $\bar{z} = -z$. \blacktriangleright Μονάδες 4

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 ανήκουν στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^{2003}\right] = 0 \quad \blacktriangleright \text{Μονάδες } 5,5$$

ΘΕΜΑ 4ο

Απαντήσεις ➡ σελ. 88

Κριτήρια Αξιολόγησης Γ Λυκείου

Θεξένος

Έστω μιγαδικός αριθμός z με $|z|=2$.

Θεωρούμε και το μιγαδικό αριθμό w με $w = z + \frac{1}{z}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει στην έλλειψη

$$c : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

► Μονάδες 9

β) Αποδείξτε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι σταθερή.

► Μονάδες 8

γ) Αποδείξτε ότι $|w-2| + |w+2| = 5$.

► Μονάδες 8