

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε κάθε συνάδελφο Μαθηματικό, αλλά κυρίως σε κάθε νέο συνάδελφο που πρόκειται να συμμετάσχει στο διαγωνισμό του Α.Σ.Ε.Π. Επίσης, απευθύνεται σε μαθητές με υψηλούς στόχους.

Περιέχει εκείνα τα θεωρητικά στοιχεία που δεν αναφέρονται στα σχολικά βιβλία του Λυκείου και τα οποία θεωρούμε απαραίτητες γνώσεις για έναν **υποψήφιο δάσκαλο των Μαθηματικών**. Τα θεωρητικά αυτά στοιχεία συνοδεύονται από κατάλληλα παραδείγματα και εφαρμογές. Θεωρήσαμε αναγκαίο να προτείνουμε για λύση αντιπροσωπευτικές πρωτότυπες ασκήσεις, για τις οποίες δίνεται σύντομη λύση στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

- 1) Άλγεβρα
- 2) Ανάλυση
- 3) Στατιστική
- 4) Πιθανότητες
- 5) Ευκλείδεια Γεωμετρία
- 6) Αναλυτική Γεωμετρία

Αναφέρουμε ενδεικτικά ορισμένα από τα θέματα που θα συναντήσει ο αναγνώστης:

- i) Αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, τότε ο \sqrt{n} είναι άρρητος.
- ii) Πώς υπολογίζεται το άθροισμα $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ (όπου $k \in \mathbb{N}^*$);
- iii) Πόσους διαιρέτες έχει ένας φυσικός αριθμός;
- iv) Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα πολυώνυμο να έχει πολλαπλή ρίζα;
- v) Πότε είναι αντιστρέψιμη η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ($a \neq 0$);

- vi) Πότε μια συνάρτηση 1-1 είναι γνησίως μονότονη;
- vii) Πώς αποδεικνύεται ο νόμος διάθλασης του φωτός;
- viii) Πώς αποδεικνύεται το διωνυμικό θεώρημα;
- ix) Ποιο σημείο έχει ελάχιστο άθροισμα αποστάσεων από τις κορυφές τριγώνου;
- x) Πότε και ποια κωνική τομή παριστάνει η εξίσωση
 $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$;

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν παραρτήματα με **ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής** απ' όλα τα κεφάλαια με τις απαντήσεις τους. Ένα δεύτερο παράρτημα περιέχει **αντιπροσωπευτικά σχέδια μαθημάτων** από τη διδασκόμενη ύλη στο Λύκειο.

Περιεχόμενα

1^ο

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο

1.1	Η παραγοντοποίηση των διωνύμων $\alpha^v - \beta^v$ και $\alpha^v + \beta^v$	9
1.2	Σύγκριση δυνάμεων.....	11
1.3	Πράξεις άρτιων και περιττών ακεραίων	14
1.4	Ρητοί και άρρητοι αριθμοί	16
1.5	Διπλά ριζικά	21
1.6	Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού.....	22
1.7	Η διώνυμη εξίσωση $x^v = \alpha$	24
1.8	Παραλλαγές της μαθηματικής επαγωγής.....	25
1.9	Στοιχεία από τη θεωρία των συνόλων.....	28
1.10	Ανισότητες.....	31
1.11	Υπολογισμός του αθροίσματος $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + v^k$	44
1.12	Διαιρετότητα ακεραίων αριθμών.....	47
1.13	Αλγοριθμική διαίρεση πολυωνύμων	49
1.14	Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης	51
1.15	Γενικά θεωρήματα για τις ρίζες πολυωνύμων.....	52
1.16	Πολυωνυμικές εξισώσεις 3^{ov} και 4^{ov} βαθμού.....	59
1.17	Θέση των πραγματικών ριζών πολυωνύμου.....	65
1.18	Πρόοδοι.....	67
1.19	Τριγωνομετρία	74
1.20	Πίνακες.....	81
1.21	Ορίζουσες και γραμμικά συστήματα.....	84
1.22	Μιγαδικοί αριθμοί.....	88
	Ασκήσεις στην Άλγεβρα.....	102
	Υποδείξεις των Ασκήσεων Άλγεβρας	107

2^ο

ΑΝΑΛΥΣΗ

Κεφάλαιο

2.1	Συμμετρία γραφικών παραστάσεων.....	115
2.2	Προσεταιριστικότητα της σύνθεσης συναρτήσεων.....	118
2.3	Αντίστροφη συνάρτηση.....	119
2.4	Πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	123
2.5	Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	135
2.6	Όριο συνάρτησης στο άπειρο.....	139
2.7	Συνέχεια συνάρτησης.....	141
2.8	Παράγωγος συνάρτησης.....	151
2.9	Διαφορικό συνάρτησης.....	157
2.10	Τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.....	158
2.11	Μονοτονία συνάρτησης.....	165
2.12	Τοπικά ακρότατα συνάρτησης.....	167
2.13	Κυρτές συναρτήσεις και σημεία καμπής.....	170
2.14	Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης.....	174
2.15	Απροσδιόριστες μορφές.....	177
2.16	Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.....	179
2.17	Υπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης.....	182
2.18	Το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.....	185
2.19	Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος.....	186
	Ασκήσεις στην Ανάλυση.....	191
	Υποδείξεις των Ασκήσεων Ανάλυσης.....	196

3^ο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Κεφάλαιο

3.1	Ομαδοποιημένη κατανομή.....	203
3.2	Παράμετροι κεντρικής τάσης.....	204
3.3	Παράμετροι διασποράς.....	210
3.4	Γραμμική παλινδρόμηση και γραμμική συσχέτιση.....	213

4^ο**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

Κεφάλαιο

4.1	Συνδυαστική	219
4.2	Συνδυαστική Ανάλυση και Πιθανότητες.....	225
4.3	Δεσμευμένη πιθανότητα	232
4.4	Ανεξάρτητα ενδεχόμενα	237
4.5	Δοκιμές Bernoulli.....	238
Ασκήσεις στις Πιθανότητες.....		241
	Υποδείξεις των Ασκήσεων στις Πιθανότητες	243

5^ο**ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Κεφάλαιο

5.1	Τρίγωνο με δύο ίσες διχοτόμους	247
5.2	Η δύναμη των κέντρων τριγώνου.....	250
5.3	Σημείο Fermat	253
5.4	Σημείο Miquel	256
5.5	Θεώρημα Morley.....	257
5.6	Ορθικό τρίγωνο.....	258
5.7	Μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου	260
5.8	Ο κύκλος των εννέα σημείων	261
5.9	Σύστημα Vecten	262
5.10	Μήκους κοινού εφαπτόμενου τμήματος δύο κύκλων	265
5.11	Συμμετροδιάμεσος τριγώνου	266
5.12	Διάφορες αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος	269
5.13	Άνισα τρίγωνα με πέντε κύρια στοιχεία ίσα.....	272
5.14	Οι δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη	273
5.15	Εμβαδόν τραπεζίου συναρτήσει των πλευρών του.....	274
5.16	Υπολογισμός διαγωνίων εγγράψιμου τετραπλεύρου.....	275

6^ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο

6.1	Συντεταγμένες στο χώρο	277
6.2	Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	280
6.3	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων	282
6.4	Σχετική θέση δύο ευθειών του επιπέδου.....	284
6.5	Γωνία δύο ευθειών του επιπέδου	286
6.6	Δέσμη ευθειών του επιπέδου	287
6.7	Ριζικός άξονας δύο κύκλων	288
6.8	Τα Θεωρήματα Μενελάου και Ceva.....	290
6.9	Εφαπτομένη κωνικής τομής	292

A

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Παράρτημα

.....	295
-------	-----

B

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΑ ΣΧΕΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ

Παράρτημα

1 ^ο Σχέδιο:	Η έννοια της απόλυτης τιμής	319
2 ^ο Σχέδιο:	Πρόσημο τριωνύμου	321
3 ^ο Σχέδιο:	Τριγωνική ανισότητα.....	324
4 ^ο Σχέδιο:	Άρρητες εξισώσεις και ανισώσεις.....	327
5 ^ο Σχέδιο:	Η έννοια του λογαρίθμου.....	330
6 ^ο Σχέδιο:	Σύνθεση συναρτήσεων	332
7 ^ο Σχέδιο:	Αντίστροφη συνάρτηση	335
8 ^ο Σχέδιο:	Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών	338
9 ^ο Σχέδιο:	Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης.....	340
10 ^ο Σχέδιο:	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	343
Ευρετήριο όρων	347	