Θανάση Π. Ξένου

Διαφορικές Εξισώσεις

Για τους φοιτητές Α.Ε.Ι. & Τ.Ε.Ι

Περιέχει:

- Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις
- Συστήματα διαφορικών εξισώσεων
- Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους
- Διαφορικές εξισώσεις και σειρές
- Μετασχηματισμός Laplace
- Σειρές Fourier

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-081-3

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές ΑΕΙ - ΤΕΙ και περιέχει την ύλη του μαθήματος των Διαφορικών Εξισώσεων.

Η θεωρία και κυρίως οι μέθοδοι επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων είναι απαραίτητες γνώσεις για έναν επιστήμονα των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Ηλεκτρολογίας, της Μηχανολογίας, των Ηλεκτρονικών, της Οικονομίας κ.λπ.

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές έννοιες και οι μέθοδοι επίλυσης των διαφόρων μορφών Διαφορικών Εξισώσεων. Ακολουθούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα, γραμμένα με προσιτό και κατανοητό τρόπο.

Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

1. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
2. Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης
3. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων
4. Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους
5. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με σειρές
6. Μετασχηματισμός Laplace
7. Σειρές Fourier.

Δεκέμβριος 2007 *Θ. Ξένος*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Κεφάλαιο 2
Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

Κεφάλαιο 3
Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 4
Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 5
Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με σειρές

Κεφάλαιο 6
Μετασχηματισμοί Laplace

Κεφάλαιο 7
Σειρές Fourier

Κεφάλαιο 1ο

Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

❖ Εισαγωγικές έννοιες

Μια εξίσωση που περιέχει ανεξάρτητες μεταβλητές, άγνωστες συναρτήσεις και παραγώγους ή διαφορικά των άγνωστων συναρτήσεων, ονομάζεται **διαφορική εξίσωση (Δ.Ε).**

Αν οι άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από μία ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε η εξίσωση ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**.

Θα μελετήσουμε διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

όπου x ανεξάρτητη μεταβλητή και $y = y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση.

Η τάξη n της μεγαλύτερης παραγώγου της y ονομάζεται **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης. Αν η διαφορική εξίσωση είναι πολυώνυμο ως προς τις παραγώγους της, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού (ως προς την παράγωγο με τη μεγαλύτερη τάξη) ονομάζεται **βαθμός** της διαφορικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα,

i) η διαφορική εξίσωση $3x + 4y - 2y' + y'' = 0$ έχει τάξη 2 και βαθμό 1,

ii) η διαφορική εξίσωση $2x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 = 0$ έχει τάξη 1 και βαθμό 5.

❖ Σχηματισμός διαφορικής εξίσωσης

Μια εξίσωση της μορφής

$$g(x, y, c) = 0\,, \tag{1}$$

όπου c σταθερά, παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.
Αν παραγωγίσουμε την (1) ως προς x, έχουμε:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot y'=0 \ . \tag{2}$$

Αν από τις (1), (2) απαλείψουμε το c, παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής $F(x,y,y')=0$, η οποία εκφράζει μια ιδιότητα της κλίσης μιας καμπύλης της οικογένειας (1), που περνά από το σημείο (x, y).
Έτσι, **από μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων προκύπτει διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.**
Γενικά, θεωρούμε μια οικογένεια καμπύλων με εξίσωση

$$g(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0, \quad c_1,c_2,\ldots,c_n \ \text{ αυθαίρετες σταθερές} \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή διαδοχικά n φορές και απαλείφοντας τα $c_1,c_2,\ldots,c_n$ από τις $n+1$ σχέσεις που έχουμε, προκύπτει μια διαφορική εξίσωση n τάξης της μορφής

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \, . \tag{2}$$

Κάθε συνάρτηση που ορίζεται από την (1) ονομάζεται **μερικό ολοκλήρωμα** της διαφορικής εξίσωσης (2), ενώ το σύνολο των μερικών ολοκληρωμάτων ονομάζεται **γενικό ολοκλήρωμα** της (2) ή **γενική λύση**.
Είναι δυνατόν, με την απαλοιφή των $c_1,c_2,\ldots,c_n$, να προκύψει διαφορική εξίσωση με τάξη $k<n$. Αυτό θα συνέβαινε στην περίπτωση που η οικογένεια (1) εξαρτάτο στην πραγματικότητα από k παραμέτρους.
Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2+y^2=\alpha\beta$ εξαρτάται ουσιαστικά από μία παράμετρο, την $c=\alpha\beta$.
Επίσης, είναι δυνατόν η διαφορική εξίσωση (2) να έχει, εκτός από την (1), και άλλη λύση.

Παράδειγμα 1

Να σχηματιστεί η διαφορική εξίσωση που αντιστοιχεί στην οικογένεια των παραβολών $y=\alpha x^2$.

Λύση

Παραγωγίζουμε ως προς x την $\quad y=\alpha x^2 \quad (1)$

και έχουμε $\quad y'=2\alpha x \quad (2).$

Από τη (2) προκύπτει $\alpha = \dfrac{y'}{2x}$ και η (1) γράφεται

$$y = \frac{y'}{2x} \cdot x^2 \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{2} x y',$$

που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση όλων των υπερβολών του επιπέδου με κοινές εστίες.

Λύση

Η οικογένεια των υπερβολών του επιπέδου με κοινές εστίες έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + c} - \frac{y^2}{\beta^2 - c} = 1 \qquad (1),$$

όπου α, β σταθερές και c παράμετρος. Αναζητούμε τη διαφορική εξίσωση της οποίας η (1) είναι λύση. Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε την εξίσωση

$$\frac{2x}{\alpha^2 + c} - \frac{2yy'}{\beta^2 - c} = 0 \ . \qquad (2)$$

Θεωρώντας τις (1) και (2) ως γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους

$\dfrac{1}{\alpha^2 + c}$ και $\dfrac{1}{\beta^2 - c}$, έχουμε

$$\frac{1}{\alpha^2 + c} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y^2 \\ 0 & -2yy' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & -y^2 \\ 2x & -2yy' \end{vmatrix}} = \frac{-2yy'}{2xy^2 - 2x^2yy'} = \frac{x'}{x^2y' - xy}$$

$$\frac{1}{\beta^2 - c} = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}}{2xy^2 - 2x^2yy'} = \frac{-2x}{2xy^2 - 2x^2yy'} = \frac{1}{xyy' - y^2}$$

Έτσι, $\alpha^2+c=\dfrac{x^2y'-xy}{y'}$ και $\beta^2-c=xyy'-y^2$,

οπότε με πρόσθεση αυτών προκύπτει η ζητούμενη διαφορική εξίσωση

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{x^2y'-xy}{y'}+xyy'-y^2$$

ή $(\alpha^2+\beta^2)y'=x^2y'-xy+xy(y')^2-y^2y'$

ή $xy(y')^2+(x^2-y^2-\alpha^2-\beta^2)y'-xy=0$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση όλων των κύκλων του επιπέδου.

Λύση

Κάθε κύκλος του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \tag{1}$$

όπου A, B, Γ είναι παράμετροι.

Παραγωγίζουμε τρεις φορές την (1) (αφού οι παράμετροι είναι τρεις) και έχουμε τις εξισώσεις

$$2x+2yy'+A+By'=0\ , \tag{2}$$

$$2+2(y')^2+2yy''+By''=0 \tag{3}$$

και

$$4y'y''+2y'y''+2yy'''+By'''=0 \quad \text{ή} \quad 6y'y''+2yy'''+By'''=0 \tag{4}$$

Από την (4) προκύπτει ότι $B=-\dfrac{6y'y''+2yy'''}{y'''}$ και η (3) γράφεται

$$2+2(y')^2+2yy''-(6y'y''+2yy''')\frac{y''}{y'''}=0 \quad \text{ή} \quad \left(1+(y')^2\right)y'''-3y'(y'')^2=0\,.$$

1.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Θ. Ξένος

Οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού έχουν γενικά τη μορφή

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0 \quad \text{ή} \quad P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 .$$

Η απλούστερη απ' αυτές είναι εκείνη για την οποία είναι

$$P(x,y)=g(x) \qquad \text{και} \quad Q(x,y)=h(y)$$

ή $$P(x,y)=g(x)\cdot h(y) \qquad \text{και} \quad Q(x,y)=\varphi(x)\cdot\sigma(y) .$$

Στην πρώτη περίπτωση η διαφορική εξίσωση **λύνεται με απευθείας ολοκλήρωση**, ενώ στη δεύτερη περίπτωση διαιρούμε πρώτα με $h(y)\cdot\varphi(x)$ και έχουμε διαφορική εξίσωση της πρώτης περίπτωσης. Γενικά, λοιπόν, μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών έχει τη μορφή

$$\boxed{f(x)dx=g(y)dy .}$$

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(x^2-4)y'=y$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται

$$(x^2-4)\frac{dy}{dx}=y \quad \text{ή} \quad (x^2-4)dy=y\,dx \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{x^2-4}=\frac{dy}{y}$$

και με ολοκλήρωση έχουμε

$$\int\frac{dx}{(x-2)(x+2)}=\int\frac{dy}{y} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4}\int\frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}dx=\int\frac{1}{y}dy \quad \begin{pmatrix} x\neq\pm2 \\ y\neq 0\end{pmatrix}$$

ή $$\frac{1}{4}\left(\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{x+2}dx\right)=\int\frac{1}{y}dy \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)=\ln|y|+\ln c$$

ή $$\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=4\ln|cy| \quad \text{ή} \quad \frac{x-2}{x+2}=c^4y^4 \quad \text{ή} \quad x-2=c_1(x+2)y^4 .$$

Η συνάρτηση $y=0$ είναι, επίσης, λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Σχόλιο: Μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών παίρνει τελικά τη μορφή

$y' = f(x)\cdot g(y)$ και γράφεται $f(x)dx = \dfrac{dy}{g(y)}$, με $g(y) \neq 0$.

Αν η εξίσωση $g(y) = 0$ έχει ως λύση π.χ. $y = \alpha$, τότε η συνάρτηση $y = \alpha$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης, αφού $y' = 0$ και η διαφορική εξίσωση επαληθεύεται.

Παράδειγμα 5

Σε μια σταθερή οικονομία η αξία μιας τηλεόρασης μειώνεται συνεχώς, με ρυθμό ανάλογο της τιμής της. Μια τέτοια τηλεόραση πωλείται σήμερα 320 € και σε τρία χρόνια υπολογίζεται ότι θα πωλείται 240 €. Πόσα θα πωλείται σε 12 χρόνια;

Λύση

Έστω $Q(t)$ η αξία της τηλεόρασης σε t χρόνια $(t \geq 0)$, οπότε έχουμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση.

$$Q'(t) = -\alpha Q(t), \quad \alpha \text{ θετική σταθερά,}$$

η οποία γράφεται $\dfrac{dQ}{dt} = -\alpha Q$ ή $\dfrac{dQ}{Q} = -\alpha dt$.

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\alpha \int dt \quad \text{ή} \quad \ln Q = -\alpha t + \ln c \quad \text{ή} \quad Q = ce^{-\alpha t}.$$

Αλλά $Q(0) = 320$, οπότε $c = 320$.

Επίσης, $Q(3) = 240$ ή $ce^{-3\alpha} = 240$ ή $e^{-3\alpha} = \dfrac{240}{320} = \dfrac{3}{4}$.

Η τιμή της τηλεόρασης σε 12 χρόνια θα είναι

$$Q(12) = c\cdot e^{-12\alpha} = 320\cdot(e^{-3\alpha})^4 = 320\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 101{,}25 \text{ €.}$$

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της διαφορικής εξίσωσης $y\ln y - \dfrac{dy}{dx}\sin x = 0$, η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{\pi}{2}, e\right)$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y\ln y dx=\sin x dy \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$$

και με ολοκλήρωση έχουμε

$$\int\frac{\frac{1}{y}dy}{\ln y}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \quad \text{ή} \quad \int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$\text{ή} \quad \ln|\ln y|=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$\text{ή} \quad \ln|\ln y|=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+\ln c \quad \text{ή} \quad \ln|\ln y|=\ln\left|c\,\text{εφ}\frac{x}{2}\right|,\ c>0$$

$$\text{ή} \quad \ln y=c_1\text{εφ}\frac{x}{2},\ c_1\neq 0 \quad \text{ή} \quad y=e^{c_1\text{εφ}\frac{x}{2}} \quad (c_1=\pm c).$$

Η γενική λύση για $x=\frac{\pi}{2}$ και $y=e$ δίνει $e=e^{c_1}$, δηλαδή $c_1=1$.

Άρα, η ζητούμενη καμπύλη είναι η $y=e^{\text{εφ}\frac{x}{2}}$.

1.2 Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

Θ. Ξένος

Ομογενής λέγεται η διαφορική εξίσωση που έχει τη μορφή

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

όπου οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι ομογενείς* με τον ίδιο βαθμό.

---

* Υπενθυμίζουμε ότι η $f(x,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού k, όταν για κάθε $t>0$ ισχύει $f(tx,ty)=t^k\cdot f(x,y)$. Π.χ. η $f(x,y)=x^2+3xy$ είναι ομογενής 2ου βαθμού.

Η εξίσωση αυτή γράφεται και με τη μορφή

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right).}$$

όπου η $f\left(\frac{y}{x}\right)$ είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού 0.

Για να λύσουμε αυτή τη διαφορική εξίσωση, θέτουμε $\frac{y}{x} = u$, δηλαδή $y = xu$ και έχουμε νέες μεταβλητές x και u, όπου $u = u(x)$.

Έτσι, καταλήγουμε σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(x^2 + y^2)dx + xy\,dy = 0$.

Λύση

Οι συναρτήσεις $P(x,y) = x^2 + y^2$ και $Q(x,y) = xy$ είναι ομογενείς βαθμού 2.
Έτσι, η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής και γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x^2 + y^2}{xy} \quad .$$

Θέτουμε $\frac{y}{x} = u$, δηλαδή $y = xu$, οπότε $y' = u + xu'$ και η εξίσωση γράφεται

$$u + xu' = -\frac{x^2 + x^2u^2}{x^2u} \quad ή \quad u + xu' = -\frac{1+u^2}{u} \quad ή \quad u^2 + xuu' = -1 - u^2$$

$$ή \quad 2u^2 + 1 = -xu\frac{du}{dx} \quad ή \quad \frac{udu}{2u^2+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{1}{4}\ln(2u^2+1) = -\ln|x| + \ln c \quad ή \quad \ln\left(\frac{2y^2}{x^2} + 1\right) = \ln\left(\frac{c}{|x|}\right)^4$$

$$ή \quad \frac{2y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x^4} \quad ή \quad 2x^2y^2 + x^4 = C.$$

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'=\dfrac{y(2x^3-y^3)}{x(x^3-2y^3)}$ με την αρχική συνθήκη $y(1)=2$.

Λύση

Θέτουμε $y=xu$, οπότε $y'=u+xu'$ και η εξίσωση γράφεται

$$u+xu'=\frac{xu(2x^3-x^3u^3)}{x(x^3-2x^3u^3)} \quad \text{ή} \quad u+xu'=\frac{2u-u^4}{1-2u^3}$$

ή $$u-2u^4+x(1-2u^3)\frac{du}{dx}=2u-u^4$$

ή $$x(1-2u^3)\frac{du}{dx}=u+u^4 \qquad \text{ή} \quad \frac{dx}{x}=\frac{1-2u^3}{u+u^4}du$$

Επομένως

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2u^3}{u(1+u^3)}du=\int\frac{(1+u^3)-3u^3}{u(1+u^3)}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{3u^2}{1+u^3}\right)du$$

ή $$\ln|x|=\ln|u|-\ln\left|1+u^3\right|+\ln c \quad (c>0)$$

ή $$\ln|x|=\ln\left|\frac{cu}{1+u^3}\right| \quad \text{ή} \quad \left|x(1+u^3)\right|=|cu|$$

ή $$\left|x\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)\right|=\left|c\frac{y}{x}\right| \quad \text{ή} \quad \left|\frac{x^3+y^3}{x^2}\right|=\left|\frac{cxy}{x^2}\right|$$

ή $$x^3+y^3=c_1xy \quad (c_1\in\mathbb{R}).$$

Για $x=1$ και $y=2$ η γενική λύση δίνει $c_1=\dfrac{9}{2}$ κι έτσι έχουμε τη μερική λύση $x^3+y^3=\dfrac{9}{2}xy$.

1.3 Διαφορικές εξισώσεις αναγόμενες σε ομογενείς

Θ. Ξένος

Θα λύσουμε διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\boxed{y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\kappa x + \lambda y + \mu}\right), \quad \beta \neq 0 \text{ ή } \lambda \neq 0.}$$

Θέτουμε $\alpha x + \beta y + \gamma = X$ και $\kappa x + \lambda y + \mu = \Upsilon$ (1)

Διαφορίζοντας παίρνουμε τις ισότητες

$$\alpha dx + \beta dy = dX \quad \text{και} \quad \kappa dx + \lambda dy = dY \qquad (2)$$

i) Έστω ότι $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \kappa & \lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda - \beta\kappa \neq 0$.

Λύνουμε το σύστημα των (2) ως προς dx, dy και η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής με μεταβλητές Χ και Υ.

ii) Έστω ότι $D = \alpha\lambda - \beta\kappa = 0$. Τότε $\frac{\kappa}{\alpha} = \frac{\lambda}{\beta} = \rho$ και η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\rho(\alpha x + \beta y) + \mu}\right).$$

Αν τώρα θέσουμε $\alpha x + \beta y = u$, τελικά έχουμε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, με νέες μεταβλητές x και u.

Παράδειγμα 9

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(3x + 2y + 1)dy + (4x + 3y + 1)dx = 0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$.

Θέτουμε

$$4x + 3y + 1 = X \quad \text{και} \quad 3x + 2y + 1 = Y$$

οπότε με διαφόριση παίρνουμε

$$4dx + 3dy = dX \quad \text{και} \quad 3dx + 2dy = dY.$$

Το τελευταίο σύστημα έχει τη λύση

$$dx=\frac{\begin{vmatrix} dX & 3 \\ dY & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=3dY-2dX,\quad dy=\frac{\begin{vmatrix} 4 & dX \\ 3 & dY \end{vmatrix}}{-1}=3dX-4dY\,.$$

Έτσι, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{3dX-4dY}{3dY-2dX}=-\frac{X}{Y} \quad \text{ή} \quad 3YdX-4YdY=-3XdY+2XdX$$

$$\text{ή} \quad (3X-4Y)dY=(2X-3Y)dX \quad \text{ή} \quad Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{2X-3Y}{3X-4Y}$$

και είναι ομογενής διαφορική εξίσωση με μεταβλητές X και Y.

Θέτουμε, τώρα, $Y=uX$, οπότε $Y'=u+Xu'$ και η εξίσωση γράφεται

$$u+Xu'=\frac{2X-3uX}{3X-4uX} \quad \text{ή} \quad u+Xu'=\frac{2-3u}{3-4u}$$

$$\text{ή} \quad 3u-4u^2+X(3-4u)\frac{du}{dX}=2-3u \quad \text{ή} \quad X(3-4u)du=2(2u^2-3u+1)dX$$

$$\text{ή} \quad \frac{dX}{X}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4u-3}{2u^2-3u+1}du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{d(2u^2-3u+1)}{2u^2-3u+1}$$

και με ολοκλήρωση έχουμε

$$\ln|X|=-\frac{1}{2}\ln\left|2u^2-3u+1\right|+c \quad \text{ή} \quad \ln|X|=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left|2u^2-3u+1\right|}}\right)+c$$

$$\text{ή} \quad \ln|X|=\ln\left(\frac{c_1}{\sqrt{\left|2u^2-3u+1\right|}}\right) \quad \text{ή} \quad |X|=\frac{c_1}{\sqrt{\left|2u^2-3u+1\right|}}$$

$$\text{ή} \quad |X|\cdot\sqrt{\left|\frac{2Y^2}{X^2}-\frac{3Y}{X}+1\right|}=c_1 \quad \text{ή} \quad \left|2Y^2-3XY+X^2\right|=c_1^2\,.$$

Έχουμε, λοιπόν, τη λύση

$$2(3x+2y+1)^2-3(4x+3y+1)(3x+2y+1)+(4x+3y+1)^2=c_2$$

$$\text{ή} \quad 2x^2+y^2+3xy+x+y=c\,.$$

Παράδειγμα 10

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(3x-2y+1)dx+(-6x+4y+5)dy=0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-2y+1}{2(3x-2y)-5}$.

Θέτουμε $3x-2y=u$, οπότε $y=\dfrac{1}{2}(3x-u)$ και $y'=\dfrac{1}{2}(3-u')$.

Έτσι, έχουμε

$$\frac{1}{2}(3-u')=\frac{u+1}{2u-5} \quad \text{ή} \quad 3-u'=\frac{2u+2}{2u-5} \quad \text{ή} \quad u'=\frac{4u-17}{2u-5}$$

$$\text{ή} \quad \frac{du}{dx}=\frac{4u-17}{2u-5} \qquad \text{ή} \quad \frac{(2u-5)du}{4u-17}=dx.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\int\frac{4u-10}{4u-17}du=\int dx \qquad \text{ή} \quad \int\frac{(4u-17)+7}{4u-17}du=2x$$

$$\text{ή} \quad \int\left(1+\frac{7}{4u-17}\right)du=2x \qquad \text{ή} \quad u+\frac{7}{4}\ln|4u-17|=2x+c$$

$$\text{ή} \quad 3x-2y+\frac{7}{4}\ln|12x-8y-17|=2x+c$$

$$\text{ή} \quad x-2y+\frac{7}{4}\ln|12x-8y-17|=c.$$

1.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Θ. Ξένος

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης έχουν τη μορφή

$$\boxed{y'+P(x)\cdot y+Q(x)=0.}$$

(Η ονομασία «γραμμική» οφείλεται στο γεγονός ότι η άγνωστη συνάρτηση y και η παράγωγός της y' συνδέονται μεταξύ τους γραμμικά).

- **Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης επί** $e^{\int P(x)dx}$. και έχουμε:

$$y'\cdot e^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)\cdot y=-Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

ή $$\left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)'=-Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

ή $$y\cdot e^{\int P(x)dx}=-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+c$$

ή $$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[c-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right].}$$

- Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι η εξής:
  Αν y_1, y_2 **είναι δύο μερικές λύσεις της, τότε ισχύει**

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=c.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $y=c(y_2-y_1)+y_1$, που σημαίνει ότι **η γενική λύση είναι γραμμική συνάρτηση της αυθαίρετης σταθεράς c**.

Παράδειγμα 11

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'+y\varepsilon\varphi x=\eta\mu 2x,\ \left(x\in 0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με $P(x)=\varepsilon\varphi x$ και $\int P(x)dx=-\ln(\sigma\upsilon\nu x)$.

Η εξίσωση γράφεται:

$$y'\cdot e^{-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}+y\varepsilon\varphi x\cdot e^{-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}=\eta\mu 2x\cdot e^{-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}$$

ή $$y'\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+y\cdot\varepsilon\varphi x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu 2x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

ή $$y'\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+y\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2\eta\mu x \quad \text{ή} \quad \left(y\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=2\eta\mu x$$

κι επομένως

$$y\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\int 2\eta\mu x\,dx+c=-2\sigma\upsilon\nu x+c$$

ή $y=c\,\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

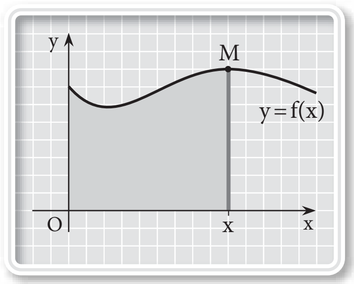
Παράδειγμα 12

Να βρεθεί καμπύλη $y=f(x)$, με $x\geq 0$ και $y\geq 0$, τέτοια ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ’ αυτήν, τους ημιάξονες Ox, Oy και την κάθετη από το σημείο $M(x,f(x))$ στον Ox, να ισούται με $y-2x$, για κάθε $x>0$.

Λύση

Θα πρέπει για κάθε $x>0$ να ισχύει

$$\int_0^x f(t)dt=y-2x \qquad (1)$$



Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x, παίρνουμε την εξίσωση

$$f(x)=y'-2 \quad \text{ή} \quad y'-y-2=0,$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της επί $e^{\int P(x)dx}=e^{\int(-1)dx}=e^{-x}$ και έχουμε

$$e^{-x}\cdot y'-e^{-x}\cdot y=2e^{-x} \quad \text{ή} \quad (e^{-x}\cdot y)'=2e^{-x}.$$

Επομένως,

$$e^{-x}\cdot y=-2e^{-x}+c \quad \text{ή} \quad y=ce^x-2 \qquad (2)$$

Για $x=0$ η (1) δίνει $y=0$ και η (2) για $x=y=0$ δίνει $c=2$.

Άρα, η ζητούμενη καμπύλη είναι η

$$y=2e^x-2,\ \ x\geq 0.$$

Σημείωση: Για την επίλυση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'+P(x)\cdot y+Q(x)=0$, μπορούμε να χρησιμοποιούμε απευθείας τον τύπο:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[c-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

1.5 Διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli

Θ. Ξένος

Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη μορφή

$$\boxed{y'+P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^n=0},$$

όπου $n\in\mathbb{R}$ με $n\neq 0$ και $n\neq 1$.

(Για $n=0$ ή $n=1$ η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο).

Διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης με y^n **και θέτουμε** $u=y^{1-n}$, οπότε καταλήγουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$u'+(1-n)P(x)u+(1-n)Q(x)=0.$$

Παράδειγμα 13

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^2y^3$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $y'+\dfrac{1}{x}\cdot y-x^2y^3=0$ και είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $P(x)=\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=-x^2$ και $n=3$. Διαιρούμε τα μέλη της με y^3 και η εξίσωση γράφεται $y^{-3}\cdot y'+\dfrac{1}{x}\cdot y^{-2}-x^2=0$.

Θέτουμε τώρα, $y^{-2}=u$, οπότε

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx},\quad \text{δηλαδή}\quad u'=-2y^{-3}y'.$$

Έτσι, η εξίσωση γράφεται

$$-\frac{1}{2}u'+\frac{1}{x}\cdot u-x^2=0 \quad \text{ή} \quad u'-\frac{2}{x}u+2x^2=0,$$

η οποία είναι γραμμική με $P(x)=-\dfrac{2}{x}$ και $Q(x)=2x^2$.

Σύμφωνα με το γνωστό τύπο της γενικής λύσης, έχουμε

$$u=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[c-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right]=e^{\int\frac{2}{x}dx}\cdot\left[c-\int 2x^2\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right]$$

$$=e^{2\ln|x|}\cdot\left[c-\int 2x^2\cdot e^{-2\ln|x|}dx\right]$$

ή $u=e^{\ln x^2}\cdot\left(c-\int 2x^2\cdot\frac{1}{e^{\ln x^2}}dx\right)=x^2\left(c-\int 2x^2\cdot\frac{1}{x^2}dx\right)$

ή $u=x^2(c-2x)=cx^2-2x^3$.

Τελικά, έχουμε $\frac{1}{y^2}=cx^2-2x^3$, δηλαδή $y^2(cx^2-2x^3)=1$.

Παράδειγμα 14

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(x)-x\,f(x)=2x^3\cdot f^2(x) \quad \text{και} \quad f(0)=1.$$

Λύση

Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση Bernoulli

$$y'-xy-2x^3y^2=0.$$

Διαιρώντας με y^2 γράφεται $y^{-2}\cdot y'-\frac{x}{y}-2x^3=0$.

Θέτουμε $y^{-1}=u$, οπότε $u'=\left(\frac{1}{y}\right)'=-\frac{1}{y^2}y'$ και η εξίσωση γράφεται

$$-u'-xu-2x^3=0 \quad ή \quad u'+xu+2x^3=0,$$

η οποία είναι γραμμική και έχει γενική λύση

$$u=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(c-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

ή $u=e^{-\int xdx}\cdot\left(c-\int 2x^3\cdot e^{\int xdx}\right)$ ή $u=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(c-\int 2x^3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\right)$.

Αλλά

$$\int 2x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2\int (e^{\frac{x^2}{2}})' \cdot x^2 dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 - 2\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2)' dx$$

$$= 2e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 - 4\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 - 4e^{\frac{x^2}{2}}$$

κι επομένως

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c - 2e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 + 4e^{\frac{x^2}{2}}\right) = ce^{-\frac{x^2}{2}} - 2x^2 + 4$$

ή $\quad y = f(x) = \dfrac{1}{ce^{-x^2/2} - 2x^2 + 4}$.

Από την τελευταία βρίσκουμε $f(0) = \dfrac{1}{c+4}$, οπότε

$\dfrac{1}{c+4} = 1$, δηλαδή $\quad c = -3$.

Άρα, $\quad f(x) = \dfrac{1}{4 - 2x^2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

1.6 Διαφορικές εξισώσεις του Riccati

Θ. Ξένος

Μια διαφορική εξίσωση του Riccati έχει τη μορφή

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^2 + R(x) = 0}$$

και για να βρεθεί η γενική της λύση,
είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε μια μερική λύση $y = y_1$ **αυτής**.

- Θέτουμε

$$y = y_1 + z$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\quad y_1' + P(x) \cdot y_1 + Q(x) \cdot y_1^2 + R(x) = 0$, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση $z'+(2y_1Q(x)+P(x))z+Q(x)\cdot z^2=0$, η οποία είναι διαφορική εξίσωση του Bernoulli και λύνεται αφού διαιρέσουμε με z^2 και θέσουμε

$$u=z^{1-2}=\frac{1}{z}.\,^{*}$$

Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ως προς u, οπότε η γενική της λύση έχει τη μορφή $u=c\,f(x)+g(x)$ κι επομένως

$$z=\frac{1}{c\,f(x)+g(x)} \quad \text{και} \quad y=y_1+\frac{1}{c\,f(x)+g(x)}.$$

- Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της διαφορικής εξίσωσης Riccabi είναι η εξής:

  Αν y_1, y_2, y_3 είναι τρεις διακεκριμένες μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, τότε ισχύει

  $$\frac{y-y_2}{y-y_1}=c\cdot\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1},$$

  που σημαίνει ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccatti μπορεί να βρεθεί χωρίς τετραγωνισμούς (ολοκληρώσεις), όταν γνωρίζουμε τρεις μερικές λύσεις της.

Παράδειγμα 15

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy'+2(x-1)y-y^2+x-x^2=0$, γνωρίζοντας ότι μια μερική λύση της είναι της μορφής $y=\alpha x$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $y'+\frac{2(x-1)}{x}y-\frac{1}{x}y^2+(1-x)=0$ και είναι διαφορική εξίσωση του Riccati. Η $y=\alpha x$ είναι λύση της, όταν την επαληθεύει, δηλαδή για κάθε τιμή του x ισχύει

$$\alpha+\frac{2(x-1)}{x}\cdot\alpha x-\frac{1}{x}\cdot\alpha^2x^2+1-x=0.$$

ή $\alpha+2\alpha x-2\alpha-\alpha^2x+1-x=0$ ή $(2\alpha-\alpha^2-1)x+(1-\alpha)=0$.

---

* Άρα, θέτουμε $y=y_1+\frac{1}{u}$.

Η ισότητα αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του x, όταν

$$2\alpha-\alpha^2-1=0 \quad \text{και} \quad 1-\alpha=0, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha=1.$$

Έτσι, μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_1=x$.

Θέτουμε $y=y_1+z$ και στη συνέχεια $u=\frac{1}{z}$, δηλαδή θέτουμε

$$y=y_1+\frac{1}{u}=x+\frac{1}{u}, \quad \text{οπότε} \quad y'=1-\frac{1}{u^2}u'$$

και η εξίσωση γράφεται:

$$1-\frac{1}{u^2}u'+\frac{2(x-1)}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{u}\right)^2+1-x=0$$

ή $$1-\frac{1}{u^2}u'+2x+\frac{2}{u}-2-\frac{2}{ux}-x-\frac{2}{u}-\frac{1}{xu^2}+1-x=0$$

ή $$-\frac{u'}{u^2}-\frac{2}{ux}-\frac{1}{xu^2}=0 \quad \text{ή} \quad u'+\frac{2}{x}u+\frac{1}{x}=0.$$

Η τελευταία είναι διαφορική εξίσωση γραμμική ως προς u, με $P(x)=\frac{2}{x}$, $Q(x)=\frac{1}{x}$.
Η γενική της λύση είναι

$$u=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(c-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot\left(c-\int\frac{1}{x}\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)=$$

$$=e^{-2\ln|x|}\cdot\left(c-\int\frac{1}{x}\cdot e^{2\ln|x|}dx\right)=\frac{1}{x^2}\cdot\left(c-\int\frac{1}{x}\cdot x^2dx\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(c-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{c}{x^2}-\frac{1}{2}.$$

Άρα, αντικαθιστώντας την $u=\frac{c}{x^2}-\frac{1}{u}$ στην $y=x+\frac{1}{u}$, έχουμε

$$y-x=\frac{1}{\frac{c}{x^2}-\frac{1}{2}} \quad \text{ή} \quad (y-x)\left(\frac{c}{x^2}-\frac{1}{2}\right)=1 \quad \text{ή} \quad (y-x)(2c-x^2)=2x^2.$$

1.7 Εξισώσεις των ολικών διαφορών

Θ. Ξένος

Γνωρίζουμε ότι:

Η παράσταση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ **είναι ολικό (ή τέλειο) διαφορικό, αν και μόνον αν ισχύει**

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.}$$

Αν ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, τότε υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ με

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

και επειδή $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

Από τις ισότητες αυτές μπορεί να προσδιοριστεί η $u(x,y)$.

Έτσι, αν έχουμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, θα έχουμε $du=0$ και η γενική της λύση είναι $u(x,y)=c$.

Παράδειγμα 16

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(3x^2+2y)dx+(3y^2+2x)dy=0$.

Λύση

Για τις συναρτήσεις $P(x,y)=3x^2+2y$ και $Q(x,y)=3y^2+2x$ ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2.$$

Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ με $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=3x^2+2y \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=3y^2+2x \quad (2)$$

Από την (1), με ολοκλήρωση ως προς x, παίρνουμε

$$u(x,y)=\int(3x^2+2y)dx=x^3+2yx+\varphi(y) \qquad (3)$$

Η παραγώγιση της (3) ως προς y δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x+\varphi'(y) \qquad (4)$$

Από τις (2) και (4) προκύπτει ότι $\varphi'(y)=3y^2$ και με ολοκλήρωση $\varphi(y)=y^3+c$.

Άρα, η διαφορική εξίσωση γράφεται $du=0$ και η γενική της λύση είναι

$u(x,y)=c$, δηλαδή $x^3+2yx+y^3=c$.

Σχόλιο: Από τις ισότητες

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \quad (1), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y) \quad (2),$$

η συνάρτηση $u(x,y)$ βρίσκεται ως εξής:

(i) Ολοκληρώνουμε την (1) ως προς x και βρίσκουμε

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx=g(x,y)+\varphi(y) \qquad (3),$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μια συνάρτηση του y.

(ii) Παραγωγίζουμε την (3) ως προς y και βρίσκουμε

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}+\varphi'(y) \qquad (4),$$

(iii) Από τις (2), (4) βρίσκουμε την $\varphi'(y)$, οπότε με ολοκλήρωση και την $\varphi(y)$.

Έτσι, λόγω της (3), η $u(x,y)$ έχει βρεθεί.

Παράδειγμα 17

Να προσδιοριστεί η ολοκληρωτική καμπύλη της διαφορικής εξίσωσης

$$\text{συν}x\cdot\ln(y^2+1)dx+\frac{2y\,\text{ημ}x}{y^2+1}dy=0,$$

η οποία περνά από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Λύση

Για τις συναρτήσεις $P(x,y)=\text{συν}x\cdot\ln(y^2+1)$ και $Q(x,y)=\frac{2y\text{ημ}x}{y^2+1}$ ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\text{συν}x\cdot\frac{2y}{y^2+1}$$

κι επομένως υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ με $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{συν}x\cdot\ln(y^2+1) \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y\text{ημ}x}{y^2+1} \quad (2)$$

Από την (1) προκύπτει ότι

$$u(x,y)=\int\text{συν}x\cdot\ln(y^2+1)dx=\ln(y^2+1)\cdot\int\text{συν}x\,dx$$

$$=\ln(y^2+1)\cdot\text{ημ}x+\varphi(y) \qquad (3)$$

Η (3), με παραγώγιση ως προς y, δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{y^2+1}\cdot\text{ημ}x+\varphi'(y) \quad (4)$$

Οι (2) και (4) δίνουν $\varphi'(y)=0$, δηλαδή $\varphi(y)=c$.

Επομένως, η (3) γράφεται $u(x,y)=\ln(y^2+1)\cdot\text{ημ}x+c$ και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $\text{ημ}x\cdot\ln(y^2+1)=c$. Η τελευταία για $x=\frac{\pi}{2}$ και $y=1$ δίνει $c=\ln2$. Άρα, η ζητούμενη καμπύλη είναι η

$$\text{ημ}x\cdot\ln(y^2+1)=\ln2.$$