Θανάση Π. Ξένου

Αριθμητική Ανάλυση

Για τους φοιτητές Θετικών Επιστημών και Πολυτεχνείου

Περιέχει:

- Βασικές έννοιες
- Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων
- Πολυωνυμική παρεμβολή
- Πολυωνυμική Προσέγγιση
- Αριθμητική ολοκλήρωση
- Επίλυση γραμμικών συστημάτων
- Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων
- Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-084-4

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Θετικών Επιστημών και Πολυτεχνείου και περιέχει την ύλη του μαθήματος της Αριθμητικής Ανάλυσης (ή των Υπολογιστικών Μαθηματικών).

Αριθμητική Ανάλυση είναι ο κλάδος της μαθηματικής επιστήμης που σχεδιάζει και κατασκευάζει αριθμητικές μεθόδους για την κατά προσέγγιση επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων.

Η ανάπτυξή της συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Εφαρμόζεται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η Στατιστική, η Μηχανική, η Μετεωρολογία.

Μερικά από τα προβλήματα που επιλύει προσεγγιστικά είναι τα εξής:

- **Η επίλυση γραμμικών συστημάτων** με μεγάλο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων.
- **Ο υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων**, όταν το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα δεν εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις.
- **Η επίλυση διαφορικών εξισώσεων**, όταν η γενική λύση είναι αδύνατο να βρεθεί ή είναι περίπλοκη.

Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

1. Βασικές έννοιες
2. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων
3. Πολυωνυμική παρεμβολή
4. Πολυωνυμική προσέγγιση
5. Αριθμητική ολοκλήρωση
6. Επίλυση γραμμικών συστημάτων
7. Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων
8. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων.

Ακολουθούν *ανακεφαλαίωση* κατά κεφάλαιο, *γενικά παραδείγματα* και *σύντομες λύσεις των ασκήσεων*.

Ιανουάριος 2008 *Θ. Ξένος*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4

Πολυωνυμική Προσέγγιση

Κεφάλαιο 5

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Κεφάλαιο 6

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Κεφάλαιο 7

Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 1ο

Βασικές έννοιες

1.1 Σφάλματα

Θ. Ξένος

- Σε πολλές περιπτώσεις είναι πρακτικά αδύνατο να βρεθεί η ακριβής αριθμητική τιμή ενός μεγέθους και χρησιμοποιούμε μια **προσεγγιστική τιμή**.
  Αν η προσεγγιστική τιμή είναι μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή, τότε ονομάζεται **προσέγγιση με υπέρβαση ή υπεροχή**, ενώ αν είναι μικρότερη από την πραγματική, ονομάζεται **προσέγγιση με έλλειψη.**
  Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{3}=1{,}732\ldots$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Μια προσέγγιση αυτού με έλλειψη είναι το $1{,}73$ και με υπέρβαση το $1{,}74$.

- Με την αριθμητική προσέγγιση της λύσης ενός προβλήματος δημιουργούνται σφάλματα. Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της προσεγγιστικής τιμής ενός μεγέθους ονομάζεται **σφάλμα προσέγγισης** ή απλώς **σφάλμα**. Αν συμβολίσουμε με $\overline{x}$ (ή $\tilde{x}$ ή x^*) μια προσέγγιση του x, τότε η ποσότητα

$$e_x = |x-\overline{x}|$$

ονομάζεται **απόλυτο σφάλμα** (ή απλώς σφάλμα) της προσέγγισης $x \cong \overline{x}$, ενώ η ποσότητα

$$\delta = \left|\frac{x-\overline{x}}{x}\right| = \frac{e_x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

ονομάζεται **απόλυτο σχετικό σφάλμα** (ή απλώς σχετικό σφάλμα) της προσέγγισης $x \cong \overline{x}$ και συχνά εκφράζεται με ποσοστό %.
Στην πράξη δε γνωρίζουμε το απόλυτο σφάλμα, εφόσον δε γνωρίζουμε την πραγματική τιμή x. Το απόλυτο σφάλμα έχει ένα προκαθορισμένο **όριο ανοχής**, δηλαδή, με άλλα λόγια, έχει ένα **άνω φράγμα** $\boldsymbol{\sigma}$.

Έτσι, έχουμε

$$|x-\overline{x}|\leq \sigma \quad ή \quad \overline{x}-\sigma\leq x\leq \overline{x}+\sigma$$

και συχνά γράφουμε

$$x=\overline{x}\pm\sigma \ .$$

Λέμε τότε ότι το $\overline{x}$ είναι μια προσεγγιστική τιμή του x με **ακρίβεια προσέγγισης** $\boldsymbol{\sigma}$.

Για παράδειγμα, αν έχουμε $x=27,4\pm0,2$, αυτό σημαίνει ότι $27,4-0,2\leq x\leq 27,4+0,2$, δηλαδή $27,2\leq x\leq 27,6$.

Ο αριθμός

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{|\overline{x}|}$$

είναι ένα άνω φράγμα (όριο ανοχής) του σχετικού σφάλματος.

Η ισότητα $x=\overline{x}\pm\sigma$ γράφεται και ως εξής

$$x=\overline{x}(1\pm\varepsilon)$$

και το ε ονομάζεται **σχετική ακρίβεια προσέγγισης**.

Για παράδειγμα, έστω ότι μετράμε το μήκος l ενός τμήματος με ακρίβεια $\sigma=0,9$ cm και βρίσκουμε $l=45\pm0,9$ cm.

Ένα άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος της προσέγγισης $l\cong 45$ cm είναι

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{|\overline{l}|}=\frac{0,9}{45}=0,02=2\%$$

και έτσι γράφουμε $l=45(1\pm0,02)$ cm.

- Αν η προσεγγιστική τιμή $\overline{x}$ του x γράφεται ως δεκαδικός αριθμός, τότε ένα ψηφίο αυτού θεωρείται **βέβαιο ή σωστό**, όταν το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει τη μονάδα της θέσης στην οποία βρίσκεται το ψηφίο. Για παράδειγμα, στην τιμή $x=8,14\pm0,03$ το ψηφίο 8, που δηλώνει μονάδες, είναι βέβαιο, επειδή $\sigma=0,03<1$. Το ψηφίο 1 (δέκατα) είναι κι αυτό βέβαιο, επειδή $0,03<0,1$, ενώ το ψηφίο 4 (εκατοστά) δεν είναι βέβαιο, επειδή $0,03>0,01$.

  Για να δηλώσουμε ότι όλα τα ψηφία μιας προσεγγιστικής τιμής $\overline{x}$ της x είναι βέβαια, γράφουμε $x\approx\overline{x}$ και αυτό σημαίνει ότι το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει τη μονάδα της θέσης του τελευταίου ψηφίου του $\overline{x}$, το οποίο μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο κατά μία μονάδα από το αναγραφόμενο.

  Για παράδειγμα, η γραφή $x\approx 13,23$ σημαίνει ότι $x=13,23\pm0,01$, δηλαδή $13,22\leq x\leq 13,24$. Επίσης, η γραφή $x\approx 7,1306$ σημαίνει ότι $x=7,1306\pm0,0001$.

Η προσεγγιστική τιμή γράφεται συχνά με **τυποποιημένη ή εκθετική μορφή**, δηλαδή με τη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$, όπου $1 \le |\alpha| < 10$ και ν ακέραιος αριθμός.
Για παράδειγμα, η γραφή $x \approx 5{,}1 \cdot 10^{9}$ σημαίνει ότι $x = (5{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{9}$, ενώ η γραφή $x \approx 7{,}23 \cdot 10^{-7}$ σημαίνει ότι $x = (7{,}23 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-7}$.

- Κάθε ψηφίο ενός αριθμού που δεν είναι μηδενικό στην αρχή του αριθμού, ονομάζεται **σημαντικό ψηφίο**.
Έτσι, ο αριθμός 85,3 έχει 3 σημαντικά ψηφία, ενώ ο αριθμός 0,02380 έχει 4 σημαντικά ψηφία (αφού δεν προσμετρούνται τα δύο πρώτα μηδενικά).

- Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε ένα συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων κι επομένως κάνουμε στρογγυλοποίηση (ή στρογγύλευση) του αριθμού. Έτσι, στους υπολογισμούς υπεισέρχεται το λεγόμενο **σφάλμα στρογγυλοποίησης**.
Για παράδειγμα, αν $x = 3{,}5623$ και $y = 0{,}37812$, η στρογγυλοποίηση σε δύο δεκαδικά ψηφία (στρογγυλοποίηση εκατοστού) δίνει $x \cong 3{,}56$ και $y \cong 0{,}38$. Το απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης στην πρώτη περίπτωση είναι $0{,}0023$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι 0,00188.
Γενικά, ισχύει

$$|e| = |x - \overline{x}| < 0{,}5 \cdot 10^{-\nu},$$

όταν γίνεται στρογγυλοποίηση σε ν δεκαδικά ψηφία. Αν η στρογγυλοποίηση γίνεται με ν σημαντικά ψηφία, τότε

$$\delta = \left| \frac{x - \overline{x}}{x} \right| < 5 \cdot 10^{-\nu}.$$

Αν σε μια σειρά, όπως είναι η $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, μας ενδιαφέρουν αριθμητικοί υπολογισμοί, δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλοι οι όροι της, οπότε αποκόπτονται άπειροι όροι και έχουμε το λεγόμενο **σφάλμα αποκοπής**. Γενικά, τα σφάλματα αυτά δημιουργούνται, όταν άπειρες μαθηματικές διαδικασίες αντικαθιστώνται με πεπερασμένο αριθμό διαδικασιών. Με άλλα λόγια, έχουμε μετάβαση από το μαθηματικό μοντέλο στο διακριτό μοντέλο.
Εκτός από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης και αποκοπής υπάρχουν και άλλα είδη σφαλμάτων, τα οποία εμφανίζονται στα αριθμητικά δεδομένα ή αναπτύσσονται στη διάρκεια των υπολογισμών.

Παράδειγμα 1.1

Να υπολογισθεί το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα στην προσέγγιση

α) του $x=\frac{1}{3}$ από το $\overline{x}=0,33$ και

β) του $x=e$ από το $\overline{x}=2,718$.

Λύση

α) Απόλυτο σφάλμα: $|x-\overline{x}|=\left|\frac{1}{3}-0,33\right|=\frac{1}{3}-\frac{33}{100}=\frac{1}{300}\cong 0,003$.

Απόλυτο σχετικό σφάλμα: $\left|\frac{x-\overline{x}}{x}\right|=\frac{1}{900}\cong 0,001=0,1\,\%$.

β) Αν θεωρήσουμε την τιμή του e με προσέγγιση 5 δεκαδικών ψηφίων, $e=2,71828$, τότε το απόλυτο σφάλμα είναι $2,71828-2,718=0,00028$

και το απόλυτο σφάλμα είναι $\frac{0,00028}{0,71828}\simeq 0,0001$.

Παράδειγμα 1.2

Να βρεθεί σε ποιο διάστημα μεταβάλλεται ο x ώστε ο $\overline{x}=2,43$ να τον προσεγγίζει με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

Πρέπει να ισχύει $|x-\overline{x}|<0,5\cdot 10^{-2}$ ή $-0,005<x-2,43<0,005$ ή $2,425<x<2,435$

Παράδειγμα 1.3

Ποιοι αριθμοί βρίσκονται κοντά στο $0,02$ με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων;

Λύση

Πρέπει να ισχύει $\left|\frac{x-\overline{x}}{x}\right|<5\cdot 10^{-2}$, οπότε έχουμε

$$\left|1-\frac{0,02}{x}\right|<0,05 \qquad ή \qquad -0,05<1-\frac{0,02}{x}<0,05$$

$$ή \quad 0,95<\frac{0,02}{x}<1,05 \qquad ή \qquad \frac{2}{105}<x<\frac{2}{95}\ .$$

Επομένως, $0,019<x<0,021$.

1.2 Μετάδοση των σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς

Θ. Ξένος

Θεωρούμε τις προσεγγιστικές τιμές $\overline{x}, \overline{y}$ δύο αριθμών x, y και τα αντίστοιχα σφάλματα $e_x = x - \overline{x}$, $e_y = y - \overline{y}$.

α) Για την προσέγγιση $x + y \cong \overline{x} + \overline{y}$ έχουμε σφάλμα e_{x+y} με

$$|e_{x+y}| \le |e_x| + |e_y| \qquad (1)$$

β) Για την προσέγγιση $x - y \cong \overline{x} - \overline{y}$ έχουμε σφάλμα e_{x-y} με

$$|e_{x-y}| \le |e_x| + |e_y| \qquad (2)$$

Η αιτιολόγηση των (1) και (2) προκύπτει από τις ισότητες

$e_{x+y} = (x+y) - (\overline{x} + \overline{y}) = (x - \overline{x}) + (y - \overline{y}) = e_x + e_y$, δηλαδή

$$\boxed{e_{x+y} = e_x + e_y}$$

$e_{x-y} = (x-y) - (\overline{x} - \overline{y}) = (x - \overline{x}) - (y - \overline{y}) = e_x - e_y$, δηλαδή

$$\boxed{e_{x-y} = e_x - e_y} \; .$$

γ) Το σφάλμα της προσέγγισης $xy \cong \overline{x}\,\overline{y}$ είναι

$$\boxed{e_{xy} \cong \overline{x} \cdot e_y + \overline{y} \cdot e_x} \; .$$

δ) Το σφάλμα της προσέγγισης $\frac{x}{y} \cong \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$ είναι

$$e_{\frac{x}{y}} \cong \frac{\overline{y} \cdot e_x - \overline{x} \cdot e_y}{\overline{y}^2} \; .$$

Η μέγιστη τιμή του απόλυτου σχετικού σφάλματος για το γινόμενο και το πηλίκο είναι το άθροισμα των απόλυτων σχετικών σφαλμάτων των αριθμών, δηλαδή

$$\boxed{\delta_{xy} \le |\delta_x| + |\delta_y| \quad \text{και} \quad \delta_{\frac{x}{y}} \le |\delta_x| + |\delta_y|} \; .$$

Γενικά, για το σφάλμα e μιας ποσότητας $f(x, y)$ ισχύει ο τύπος

$$\boxed{e \cong e_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \; ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(\overline{x}, \overline{y})$.

Παράδειγμα 1.4

Να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της έκφρασης $z = 2,3x + 1,4y$, αν οι x και y είναι στρογγυλοποιημένοι σε δύο δεκαδικά ψηφία.

Λύση

Αν τα σφάλματα στρογγυλοποίησης των x και y είναι e_x και e_y αντίστοιχα, τότε το σφάλμα της έκφρασης z είναι

$$e_z = e_x . \frac{\partial z}{\partial x} + e_y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2,3e_x + 1,4e_y .$$

Επειδή, όμως οι x και y είναι στρογγυλοποιημένοι σε δύο δεκαδικά ψηφία, ισχύει

$$|e_x| \le 0,5 \cdot 10^{-2} \quad \text{και} \quad |e_y| \le 0,5 \cdot 10^{-2}$$

Επομένως,

$$|e_z| \le 2,3|e_x| + 1,4|e_y| \le (2,3 + 1,4) \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,0185$$

Παράδειγμα 1.5

Αν τα απόλυτα σχετικά σφάλματα των x και y έχουν μέγιστη τιμή 0,2 και 0,3 αντίστοιχα, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του απόλυτου σχετικού σφάλματος του $z = x^2 y$.

Λύση

Αν e_x, e_y, e_z είναι τα σφάλματα των x, y, z αντίστοιχα και $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ τα σχετικά σφάλματα αυτών, τότε έχουμε

$$e_z = e_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + e_y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = e_x \cdot 2xy + e_y \cdot x^2 \quad \text{και}$$

και $$\delta_z = \frac{e_z}{z} = \frac{2xy \cdot e_x + x^2 \cdot e_y}{x^2 y} = 2\frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} = 2\delta_x + \delta_y .$$

Επομένως,

$$|\delta_z| \le 2|\delta_x| + |\delta_x| = 2 \cdot 0,2 + 0,3 = 0,7 .$$

1.3 Πεπερασμένες διαφορές

Θ. Ξένος

Η έννοια των πεπερασμένων διαφορών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην προσέγγιση μιας συνάρτησης με πολυώνυμο, η οποία θα παρουσιαστεί στο τρίτο κεφάλαιο.

- Θεωρούμε τα διακεκριμένα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $f(x)$.
  Οι διαφορές

  $$\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) \quad \text{ή} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad \text{ή} \quad \Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

  ονομάζονται **προς τα εμπρός διαφορές πρώτης τάξης**, ενώ οι διαφορές

  $$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k) = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

  ονομάζονται **προς τα εμπρός διαφορές δεύτερης τάξης.**
  Γενικά, οι **προς τα εμπρός διαφορές n τάξης,** ορίζονται από τη σχέση

  $$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \,,$$

  όπου με το συμβολισμό f_k εννοούμε την τιμή $f(x_k)$

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_1	f_1					
		Δf_1				
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$			
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$	
		Δf_4		$\Delta^3 f_3$		
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$			
		Δf_5				
x_6	f_6					

- Οι διαφορές

  $$\nabla f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f_k - f_{k-1} \quad \text{ή} \quad \nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$

ονομάζονται **προς τα πίσω διαφορές πρώτης τάξης**, ενώ οι **προς τα πίσω διαφορές n τάξης** ορίζονται από τον αναγωγικό τύπο

$$\nabla^n f_k = \nabla(\nabla^{n-1} f_k) = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$$

x	f(x)	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^2
x_1	f_1					
		∇f_2				
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$			
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$		
x_3	f_3		$\nabla^2 f_4$		$\nabla^4 f_5$	
		∇f_4		$\nabla^3 f_5$		$\nabla^5 f_6$
x_4	f_4		$\nabla^2 f_5$		$\nabla^4 f_6$	
		∇f_5		$\nabla^3 f_6$		
x_5	f_5		$\nabla^2 f_6$			
		∇f_6				
x_6	f_6					

- Οι διαφορές

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}} = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k$$

ονομάζονται **κεντρικές διαφορές πρώτης τάξης** στο σημείο x_{k+1}.
Οι διαφορές

$$\delta^2 f_k = \delta(\delta f_k) = \delta f_{k+\frac{1}{2}} - \delta f_{k-\frac{1}{2}}$$

ονομάζονται **κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης** στο σημείο x_k.
Γενικά, οι κεντρικές διαφορές περιττής και άρτιας τάξης ορίζονται από τους αναγωγικούς τύπους

$$\delta^{2n-1} f_{k+\frac{1}{2}} = \delta(\delta^{2n-2} f_{k+\frac{1}{2}}) = \delta^{2n-2} f_{k+1} - \delta^{2n-2} f_k$$

και $$\delta^{2n} f_k = \delta(\delta^{2n-1} f_k) = \delta^{2n-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{2n-1} f_{k-\frac{1}{2}}$$

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
x_1	f_1					
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$				
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$			
		$\delta f_{\frac{5}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{5}{2}}$		
x_3	f_3		$\delta^2 f_3$		$\delta^4 f_3$	
		$\delta f_{\frac{7}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{7}{2}}$		$\delta^5 f_{\frac{7}{2}}$
x_4	f_4		$\delta^2 f_4$		$\delta^4 f_4$	
		$\delta f_{\frac{9}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{9}{2}}$		
x_5	f_5		$\delta^2 f_5$			
		$\delta f_{\frac{11}{2}}$				
x_6	f_6					

- Για τις τιμές $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ και τις εικόνες τους $f(x_k)$ ορίζουμε τις **διαιρεμένες διαφορές** ως εξής:

i) Διαιρεμένη διαφορά πρώτης τάξης

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ii) Διαιρεμένη διαφορά δεύτερης τάξης

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

iii) Διαιρεμένη διαφορά n τάξης

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Αν οι τιμές x_k ισαπέχουν μεταξύ τους, δηλαδή $\mathbf{x_{k+1} - x_k = h}$ για κάθε k, τότε ισχύει

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{h^n \cdot n!}.$$

Ο αριθμός h ονομάζεται **βήμα της πινακοποίησης**.

Παράδειγμα 1.6

Να εκφραστεί η διαφορά 4ης τάξης $\Delta^4 y_0$ συναρτήσει των τιμών y_0, y_1, y_2, y_3 και y_4 μιας συνάρτησης $y = f(x)$.

Λύση

Έχουμε

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0,$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0 \\ &= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0\end{aligned}$$

και $$\begin{aligned}\Delta^3 y_1 &= \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = (\Delta y_3 - \Delta y_2) - (\Delta y_2 - \Delta y_1) = \Delta y_3 - 2\Delta y_2 + \Delta y_1 \\ &= (y_4 - y_3) - 2(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Delta^4 y_0 = (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0.$$

Γενικά, με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, διαπιστώνουμε ότι

$$\boxed{\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_{n-k}.}$$

Για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta^5 y_0 &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} y_{5-k} = y_5 - \binom{5}{1} y_4 + \binom{5}{2} y_3 - \binom{5}{3} y_2 + \binom{5}{4} y_1 - \binom{5}{5} y_0 \\ &= y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.7

Να κατασκευαστούν οι πίνακες διαφορών Δ, ∇, δ μέχρι και τρίτης τάξης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 1$ για τις ακέραιες τιμές του x από 1 έως 6.

Λύση

Από τους ορισμούς που δώσαμε για τις προς τα μπρος διαφορές, τις προς τα πίσω διαφορές και τις κεντρικές διαφορές, καθώς και τους πίνακες που κατασκευάσαμε γι' αυτές, συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta f_n = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+\frac{1}{2}} \quad \text{και γενικά} \quad \Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+\frac{k}{2}}.$$

Έτσι, βρίσκοντας τις προς τα μπρος διαφορές, γνωρίζουμε και τα άλλα δύο είδη διαφορών, αφού έχουμε τις ίδιες τιμές στις ίδιες θέσεις, με μόνη διαφορά το συμβολισμό.

x	$y=f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
1	0			
		3		
2	3		2	
		5		0
3	8		2	
		7		0
4	15		2	
		9		0
5	24		2	
		11		
6	35			

(Κάθε στοιχείο της 2ης, 3ης και 4ης στήλης ισούται με τη διαφορά των δύο πλησιέστερων στοιχείων της προηγούμενης στήλης).

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές δεύτερης τάξης είναι όλες ίσες με 2, ενώ οι διαφορές τρίτης τάξης είναι 0.

Γενικά, *οι διαφορές k τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού k είναι σταθερές, ενώ οι διαφορές τουλάχιστον $k+1$ τάξης είναι μηδέν.*

Παράδειγμα 1.8

Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο k ισχύει $\Delta^2 c^k = c^k(c-1)^2$.

Λύση

Έχουμε

$$\Delta^2 c^k = \Delta(\Delta c^k) = \Delta(c^{k+1} - c^k) = \Delta c^{c+1} - \Delta c^k$$

$$= (c^{k+2} - c^{k+1}) - (c^{k+1} - c^k) = c^{k+2} - 2c^{k+1} + c^k = c^k(c^2 - 2c + 1) = c^k(c-1)^2 .$$

Παράδειγμα 1.9

Για ένα πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας διαφορών.

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	0			
		6		
2	6		12	
		18		6
3	24		18	
		36		6
4	60		24	
		60		–
5	120		–	
		–		
6	–			

Λύση

Επειδή το f(x) είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, οι διαφορές τρίτης τάξης θα είναι σταθερές, δηλαδή όλες ίσες με 6.

Έτσι, έχουμε $\Delta^3 f_3 = 6$.

Αλλά $\Delta^3 f_3 = \Delta^2 f_4 - \Delta^2 f_3$, οπότε $6 = \Delta^2 f_4 - 24$, δηλαδή $\Delta^2 f_4 = 30$.

Ακόμη, έχουμε

$$\Delta^2 f_4 = \Delta f_5 - \Delta f_4 \quad \text{ή} \quad 30 = \Delta f_5 - 60 \quad \text{ή} \quad \Delta f_5 = 90 .$$

Τέλος, επειδή $\Delta f_5 = f_6 - f_5$, έχουμε $f_6 = 90 + 120 = 210$.

1.4 Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Θ. Ξένος

Αν κάποια από τις τιμές μιας συνάρτησης $y=f(x)$ είναι λανθασμένη και κατασκευάσουμε τον πίνακα διαφορών, τότε **μεταδίδεται το σφάλμα στις διαφορές ανώτερης τάξης με διωνυμικούς συντελεστές**.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει σφάλμα ε στην τιμή $y_5=f(x_5)$ και κατασκευάζουμε έναν πίνακα διαφορών.

x	f(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_1	y_1				
		Δy_1			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1+\varepsilon$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2+\varepsilon$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3+\varepsilon$		$\Delta^4 y_2-4\varepsilon$
		$\Delta y_4+\varepsilon$		$\Delta^3 y_3-3\varepsilon$	
x_5	$y_5+\varepsilon$		$\Delta^2 y_4-2\varepsilon$		$\Delta^4 y_3+6\varepsilon$
		$\Delta y_5-\varepsilon$		$\Delta^3 y_4+3\varepsilon$	
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5+\varepsilon$		$\Delta^4 y_4-4\varepsilon$
		Δy_6		$\Delta^3 y_5-\varepsilon$	
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$		$\Delta^4 y_5+\varepsilon$
		Δy_7		$\Delta^3 y_6$	
x_8	y_8		$\Delta^2 y_7$		
		Δy_8			
x_9	y_9				

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα επηρεάζει μια τριγωνική περιοχή και δημιουργεί τους συντελεστές του αναπτύγματος του $(\alpha-\beta)^n$ στις διαφορές ανώτερης τάξης, πολλαπλασιασμένους επί το σφάλμα ε.
Στον παραπάνω πίνακα το μέγιστο απόλυτο σφάλμα είναι $|6\varepsilon|$ και η λανθασμένη τιμή της συνάρτησης βρίσκεται στην ίδια οριζόντια ευθεία με το 6ε. Σε περίπτωση που δύο διαφορές περιέχουν το μέγιστο απόλυτο σφάλμα (όπως στον πίνακα οι διαφορές Δ^3 περιέχουν μέγιστο απόλυτο σφάλμα $|3\varepsilon|$), τότε η λανθασμένη τιμή της συνάρτησης βρίσκεται μεταξύ των διαφορών αυτών.

Παράδειγμα 1.10

Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχει μια λανθασμένη τιμή του τριτοβάθμιου πολυωνύμου $f(x)$. Να διορθωθεί η τιμή αυτή.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–21	–4	1	0	1	4	21	56	115

Λύση

Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα διαφορών μέχρι 4ης τάξης.

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
–3	–21				
		17			
–2	–4		–12		
		5		6	
–1	1		–6		2
		–1		8	
0	0		2		–8
		1		0	
1	1		2		12
		3		12	
2	4		14		–8
		17		4	
3	21		18		2
		35		6	
4	56		24		
		59			
5	115				

Επειδή το $f(x)$ είναι τριτοβάθμιο πολυώνυμο, οι διαφορές $\Delta^4 y$ θα έπρεπε να ήταν όλες μηδέν, ενώ τώρα είναι ίσες με τα γινόμενα του σφάλματος ε επί τους συντελεστές $1, -4, 6, -4, 1$ του διωνύμου $(\alpha-\beta)^4$, οπότε είναι $\varepsilon=2$.
Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα 12 βρίσκεται στην ίδια οριζόντια ευθεία με την τιμή $f(1)=1$, στην οποία υπάρχει σφάλμα $\varepsilon=2$. Άρα, η σωστή τιμή είναι

$$f(1)=1-2=-1.$$

1.5 Γραμμικοί τελεστές

Θ. Ξένος

Τα σύμβολα Δ, ∇ και δ που γνωρίσαμε στην παράγραφο 1.3 ονομάζονται **τελεστές διαφορών**. Αν L είναι ένας απ' αυτούς, τότε για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και οποιεσδήποτε σταθερές λ, μ ισχύει

$$L\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda L\big(f(x)\big)+\mu L\big(g(x)\big)$$

και γι' αυτό ο L ονομάζεται και **γραμμικός τελεστής**.
Άλλοι γνωστοί γραμμικοί τελεστές είναι

α) ο **τελεστής μετατόπισης E,** που ορίζεται από τη σχέση

$$Ef(x)=f(x+h) \quad ή \quad Ey_k=y_{k+1} \quad \text{και}$$

β) ο **διαφορικός τελεστής D**, που ορίζεται από τη σχέση

$$Df(x)=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Δύο τελεστές L_1 και L_2 ονομάζονται **ίσοι**, όταν για κάθε συνάρτηση $f(x)$ ισχύει

$$L_1f(x)=L_2f(x).$$

Άθροισμα των τελεστών L_1 και L_2 ονομάζεται ο τελεστής L_1+L_2 με

$$(L_1+L_2)f(x)=L_1f(x)+L_2f(x)$$

για κάθε συνάρτηση $f(x)$.
Ομοίως, για τη **διαφορά** L_1-L_2 ισχύει $(L_1-L_2)f(x)=L_1f(x)-L_2f(x)$.
Γινόμενο των τελεστών L_1 και L_2, με τη σειρά αυτή, ονομάζεται ο τελεστής L_1L_2 με

$$(L_1L_2)f(x)=L_1\big(L_2f(x)\big).$$

Προφανώς, ισχύει $L_1L_2\neq L_2L_1$. Δύο τελεστές L_1,L_2 ονομάζονται **αντίστροφοι**, όταν ισχύει $L_1L_2=L_2L_1=1$ και τότε γράφουμε $L_2=L_1^{-1}$ ή $L_1=L_2^{-1}$.
Οι τελεστές Δ, ∇, δ και D εκφράζονται συναρτήσει του τελεστή E ως εξής:

$$\Delta=E-1,\quad \nabla=1-E^{-1},\quad \delta=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad D=\frac{1}{h}\ln E.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),\quad \nabla f(x)=f(x)-f(x-h) \quad \text{και} \quad \delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

θεωρώντας ότι δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές τιμές του x διαφέρουν κατά h.

Παράδειγμα 1.11

Να αποδειχθούν οι ισότητες

α) $\Delta = E - 1$, **β)** $E\Delta = \Delta E$ και **γ)** $\Delta = \delta E^{\frac{1}{2}}$.

Λύση

α) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ έχουμε

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$

που σημαίνει ότι $\Delta = E - 1$.

β) Ισχύει

$$E\Delta f(x) = E(\Delta f(x)) = E\big(f(x+h) - f(x)\big) = Ef(x+h) - Ef(x)$$
$$= f\big((x+h)+h\big) - f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$$

και

$$\Delta E f(x) = \Delta\big(Ef(x)\big) = \Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h),$$ οπότε $E\Delta = \Delta E$.

γ) Έχουμε

$$\delta E^{\frac{1}{2}} f(x) = \delta\big(E^{\frac{1}{2}} f(x)\big) = \delta\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) = f\left(\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}\right) - f\left(\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}\right)$$
$$= f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

κι επομένως $\delta E^{\frac{1}{2}} = \Delta$.

Παράδειγμα 1.12

Να αποδειχθεί ότι:

α) $E^k y_0 = y_k$, **β)** $y_k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \Delta^n y_0$ και **γ)** $\Delta^k y_0 = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n} y_{k-n}$.

Λύση

α) Ισχύει $E^2 y_0 = E(Ey_0) = Ey_1 = y_2$, αφού $Ey_0 = y_1$ και $Ey_1 = y_2$.

Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο k ισχύει $E^k y_0 = y_k$, τότε έχουμε

$$E^{k+1}y_0 = E(E^k y_0) = Ey_k = y_{k+1}.$$

Άρα, για κάθε θετικό ακέραιο k ισχύει $\boxed{E^k y_0 = y_k}$.

β) Έχουμε

$$y_k = E^k y_0 \quad \text{και} \quad E^k = (\Delta+1)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \Delta^n \cdot 1^{k-n} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \Delta^n,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

γ) Έχουμε

$$\Delta^k y_0 = (E-1)^k y_0 = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} E^{k-n} (-1)^n y_0 = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n} y_{k-n},$$

επειδή ισχύει $E^{k-n} y_0 = y_{k-n}$.

Παράδειγμα 1.13

Για τον τελεστή μέσης τιμής $\mu = \frac{1}{2}(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}})$, να αποδειχθεί ότι $\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$.

Λύση

Για τον **τελεστή μέσης τιμής** έχουμε

$$\boxed{\mu f(x) = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} f(x) + E^{-\frac{1}{2}} f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right)}$$

Η ζητούμενη σχέση είναι άμεση συνέπεια των ισοτήτων

$$\mu^2 = \frac{1}{4}(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{4}(E + 2E^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{1}{2}} + E^{-1}) = \frac{1}{4}(E + 2 + E^{-1})$$

και

$$\delta^2 = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^2 = E - 2 + E^{-1}.$$

Προτεινόμενες ασκήσεις στο 1ο Κεφάλαιο

Άσκηση 1.1

Ποια από τις προσεγγίσεις

α) $350 \pm 0,5$ m, **β)** $35 \pm 0,02$ m, **γ)** $3,5 \pm 0,01$ m

έχει το μικρότερο άνω φράγμα για το απόλυτο σχετικό σφάλμα;

Άσκηση 1.2

Χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό τύπο $\text{συν}x \cong 1 - \frac{x^2}{2}$, x σε rad, να υπολογιστεί το απόλυτο σφάλμα και ένα άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος στον υπολογισμό του $\text{συν}\frac{\pi}{3}$.

Άσκηση 1.3

Να υπολογισθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της έκφρασης $x - 2y + 4{,}5z$, αν οι αριθμοί x, y και z είναι στρογγυλοποιημένοι σε τρία δεκαδικά ψηφία.

Άσκηση 1.4

Να υπολογισθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα του $0{,}255 + 6{,}23 - 17{,}2$, αν όλοι οι αριθμοί είναι στρογγυλοποιημένοι σε τρία σημαντικά ψηφία.

Άσκηση 1.5

Να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του γινομένου $6{,}50 \cdot 25{,}2$, αν οι δύο παράγοντες είναι στρογγυλοποιημένοι σε τρία σημαντικά ψηφία.

Άσκηση 1.6

Οι αριθμοί $x \cong 1{,}25$ και $y \cong 2{,}00$ είναι στρογγυλοποιημένοι σε δύο δεκαδικά ψηφία. Να υπολογισθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της παράστασης $z = x - y + xy$.

Άσκηση 1.7

Ο παρακάτω πίνακας τιμών

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	–3	–16	–27	0	125	;

αναφέρεται σ' ένα πολυώνυμο $f(x)$ τετάρτου βαθμού. Να βρεθεί η τιμή $f(6)$.

Άσκηση 1.8

Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχει μια λανθασμένη τιμή για το πολυώνυμο f(x), το οποίο έχει βαθμό 4. Να εντοπισθεί το σφάλμα και να διορθωθεί η λανθασμένη τιμή.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	–135	–32	–3	0	2	0	–27	–128	–375	–864

Άσκηση 1.9

Αν $z_k = x_k y_k$, με $k = 1,2,3,\ldots$, να αποδειχθεί ότι $\Delta z_k = x_k \Delta y_k + y_{k+1} \Delta x_k$.

Άσκηση 1.10

Να αποδειχθεί ότι οι τελεστές $\Delta, \nabla, E, \delta$ και μ αντιμετατίθενται ανά δύο.