Θανάσης Ξένος

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Για τους φοιτητές των Α.Ε.Ι & Τ.Ε.Ι

- Διανυσματικός λογισμός
- Αναλυτική γεωμετρία του επιπέδου
- Το επίπεδο στο χώρο
- Η ευθεία στο χώρο
- Η σφαίρα
- Επιφάνειες δεύτερου βαθμού

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Για επικοινωνία με το συγγραφέα:
/ fax 2310 348086
e-mail: stranger@internet.gr

ISBN 960-431-915-9

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920-72.229
e-mail: info@ziti.gr

www.ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310-203.720, Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι. και περιέχει την ύλη του μαθήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο (**Διανυσματικός Λογισμός**) παρουσιάζονται η έννοια του διανύσματος, οι συντεταγμένες στο επίπεδο και το χώρο, τα διάφορα γινόμενα διανυσμάτων και η αλλαγή συστήματος συντεταγμένων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο (**Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου**) παρουσιάζονται οι γνωστές γραμμές του επιπέδου, που είναι η ευθεία, ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή.

Στο τρίτο κεφάλαιο (**Το επίπεδο στο χώρο**), αρχικά γίνεται μια σύντομη αναφορά στις βασικές γνώσεις της Στερεομετρίας, που πρέπει να έχει ο φοιτητής, και στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά οι διάφορες περιπτώσεις για την εύρεση της εξίσωσης επιπέδου με τις σχετικές ιδιότητες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο (**Η ευθεία στο χώρο**) γίνεται διεξοδική μελέτη των διαφόρων μορφών εξίσωσης ευθείας στο χώρο, των σχετικών θέσεων ευθειών και επιπέδων, της κοινής κάθετης ασύμβατων ευθειών και της απόστασης σημείου από ευθεία.

Στο πέμπτο κεφάλαιο (**Η σφαίρα**) παρουσιάζονται οι σχετικές έννοιες με τη σφαίρα στο χώρο.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο (**Επιφάνειες δεύτερου βαθμού**) παρουσιάζονται οι κυλινδρικές επιφάνειες, οι κωνικές επιφάνειες και οι επιφάνειες εκ περιστροφής. Επίσης, γίνεται μια ταξινόμηση των επιφανειών δεύτερου βαθμού.

Σε κάθε κεφάλαιο λύνονται πολλά **παραδείγματα** για την κατανόηση όλων των εννοιών που αναπτύσσονται. Επίσης, περιέχονται αντιπροσωπευτικές **ασκήσεις**, οι οποίες λύνονται συνοπτικά στο τέλος του βιβλίου.

Τέλος, το βιβλίο περιέχει **ευρετήριο όρων** με όλες τις έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Θανάσης Ξένος
Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2004.

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1.1 Η έννοια του διανύσματος και πράξεις διανυσμάτων 13

1.1.1 Βασικές έννοιες 13

1.1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων 14

1.1.3 Τριγωνική ανισότητα 15

1.1.4 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα 16

1.1.5 Γραμμικώς ανεξάρτητα και εξαρτημένα διανύσματα 18

1.1.6 Απλός και διπλός λόγος σημείων 19

1.2 Συντεταγμένες στο επίπεδο 20

1.2.1 Άξονας 20

1.2.2 Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων 20

1.2.3 Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων 21

1.2.4 Συντεταγμένες και μέτρο διανύσματος από τα άκρα του ...21

1.2.5 Συντεταγμένες του μέσου διανύσματος 21

1.2.6 Συνθήκη συγγραμμικότητας διανυσμάτων του επιπέδου ..22

1.2.7 Σύστημα πολικών συντεταγμένων 23

1.3 Συντεταγμένες στο χώρο 23

1.3.1 Τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων 23

1.3.2 Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο χώρο 24

1.3.3 Σφαιρικές (ή γεωγραφικές) συντεταγμένες 26

1.3.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες 27

1.4 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 27

1.5 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 29
1.6 Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων 30
1.7 Δισεξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων 31
1.8 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων 31
1.8.1 Παράλληλη μεταφορά αξόνων 31
1.8.2 Στροφή των αξόνων 32
1.8.3 Η γενική περίπτωση στο χώρο 34
Παραδείγματα 36
Ασκήσεις 73

ΜΕΡΟΣ 2ο

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

2.1 Η ευθεία στο επίπεδο 81
2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας 81
2.1.2 Εξίσωση ευθείας 82
2.1.3 Σχετική θέση δύο ευθειών 83
2.1.4 Απόσταση σημείου από ευθεία 84
2.1.5 Εμβαδόν τριγώνου 84
2.1.6 Γωνία δύο ευθειών 84
2.1.7 Δέσμη ευθειών 85
2.2 Ο κύκλος 85
2.2.1 Εξίσωση κύκλου 85
2.2.2 Σχετική θέση ευθείας και κύκλου 86
2.2.3 Σχετική θέση δύο κύκλων 86
2.2.4 Εφαπτομένη κύκλου 87
2.3 Η παραβολή 88
2.3.1 Ορισμός και στοιχεία της παραβολής 88
2.3.2 Εξίσωση παραβολής 88

2.3.3 Εφαπτομένη της παραβολής 89
2.4 Η έλλειψη 90
2.4.1 Ορισμός και στοιχεία της έλλειψης 90
2.4.2 Εξίσωση έλλειψης 91
2.4.3 Εφαπτομένη έλλειψης 92
2.5 Η υπερβολή 93
2.5.1 Ορισμός και στοιχεία της υπερβολής 93
2.5.2 Εξίσωση υπερβολής 94
2.5.3 Συζυγείς υπερβολές 95
2.5.4 Εφαπτομένη υπερβολής 96
2.6 Η εξίσωση $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0$ 96
2.6.1 Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ 96
2.6.2 Η εξίσωση $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$ 98
Παραδείγματα 102
Ασκήσεις 144

ΜΕΡΟΣ 3ο

ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

3.1 Βασικές γνώσεις Στερεομετρίας 151
3.1.1 Καθορισμός ενός επιπέδου 151
3.1.2 Η τομή δύο επιπέδων 151
3.1.3 Σχετικές θέσεις ευθειών στο χώρο 152
3.1.4 Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου 152
3.1.5 Καθετότητα ευθείας και επιπέδου 152
3.1.6 Παραλληλία και καθετότητα επιπέδων 153
3.1.7 Ορθογώνιες ευθείες 154
3.1.8 Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών 155
3.2 Επιφάνειες και καμπύλες στον τρισδιάστατο χώρο 155

3.3 Εξίσωση επιπέδου 157

3.3.1 Επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο και είναι παράλληλο προς δύο μη συγγραμμικά διανύσματα 157

3.3.2 Επίπεδο που διέρχεται από δύο σημεία και είναι παράλληλο προς διάνυσμα 158

3.3.3 Επίπεδο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία ..159

3.3.4 Επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο και είναι κάθετο σε διάνυσμα 159

3.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου 160

3.4.1 Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ 160

3.4.2 Διάνυσμα κάθετο προς επίπεδο 161

3.4.3 Επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο και είναι παράλληλο σε δοσμένο επίπεδο 162

3.4.4 Ειδικές περιπτώσεις επιπέδων 162

3.5 Οι ανισώσεις $Ax + By + \Gamma z + \Delta > 0$ και $Ax + By + \Gamma z + \Delta < 0$ 163

3.6 Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων 164

3.7 Απόσταση σημείου από επίπεδο 165

3.8 Αξονική δέσμη επιπέδων 166

3.9 Σχετική θέση τριών επιπέδων 166

Παραδείγματα 168

Ασκήσεις 192

ΜΕΡΟΣ 4ο

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

4.1 Η εξίσωση ευθείας 197

4.1.1 Ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο και είναι παράλληλη σε διάνυσμα 197

4.1.2 Ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία 198

4.1.3 Ειδικές περιπτώσεις ευθειών 199
4.2 Η ευθεία ως τομή δύο επιπέδων 199
4.3 Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου 201
4.3.1 Ευθεία παράλληλη σε επίπεδο 201
4.3.2 Ευθεία και επίπεδο που τέμνονται 201
4.4 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο 202
4.4.1 Συνεπίπεδες ευθείες 202
4.4.2 Ασύμβατες ευθείες 204
4.5 Η κοινή κάθετη δύο ασύμβατων ευθειών 204
4.5.1 Εξίσωση της κοινής κάθετης 204
4.5.2 Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών 206
4.6 Απόσταση σημείου από ευθεία 207
Παραδείγματα 209
Ασκήσεις 230

ΜΕΡΟΣ 5ο

ΣΦΑΙΡΑ

5.1 Εξίσωση σφαίρας 235
5.2 Παραμετρικές εξισώσεις σφαίρας 236
5.3 Εξίσωση σφαίρας που διέρχεται από τέσσερα σημεία 238
5.4 Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας 240
5.5 Εφαπτόμενο επίπεδο σφαίρας 241
5.6 Σχετικές θέσεις δύο σφαιρών 242
5.7 Δύναμη σημείου ως προς σφαίρα .244
Παραδείγματα 246
Ασκήσεις 254

ΜΕΡΟΣ 6ο

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

6.1 Ευθειογενείς επιφάνειες - Επιφάνειες εκ περιστροφής 257

6.2 Ταξινόμηση των επιφανειών δευτέρου βαθμού 260

Παραδείγματα 262

Ασκήσεις 274

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σύντομες λύσεις των ασκήσεων 277

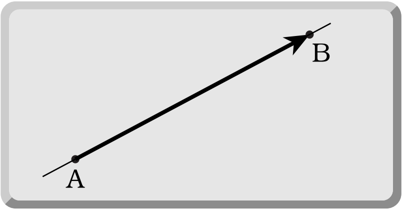
Ευρετήριο όρων 303

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 307

1 Διανυσματικός λογισμός

1.1 Η έννοια του διανύσματος και πράξεις διανυσμάτων

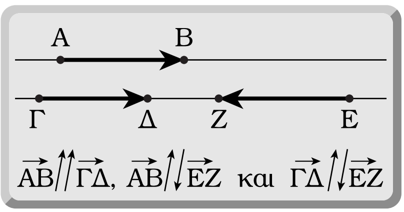
1.1.1. Βασικές έννοιες



- Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με ορισμένη αρχή και ορισμένο τέλος, ονομάζεται **διάνυσμα**. Το διάνυσμα με αρχή Α και τέλος (ή πέρας) Β συμβολίζεται με $\vec{\mathrm{AB}}$ ή $\vec{\mathrm{AB}}$. Αν τα άκρα ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα ονομάζεται **μηδενικό** και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται **μέτρο** του $\vec{\mathrm{AB}}$ και συμβολίζεται με $|\vec{\mathrm{AB}}|$.

  Η ευθεία ΑΒ ονομάζεται **φορέας** του διανύσματος $\vec{\mathrm{AB}}$.

  Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{\mathrm{AA}}$ έχει ως φορέα οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το σημείο Α.



- Δύο μη μηδενικά διανύσματα με τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ή λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση**. Αν έχουν την ίδια φορά ονομάζονται **ομόρροπα**, ενώ αν έχουν αντίθετη φορά ονομάζονται **αντίρροπα.**

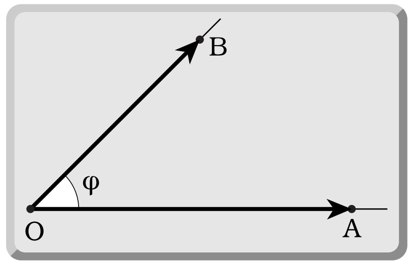
  Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται παράλληλο (ομόρροπο ή αντίρροπο) προς οποιοδήποτε διάνυσμα. Έτσι, αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά ($\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$), τότε ισχύει $\vec{\alpha}\parallel\vec{0}$ και $\vec{\beta}\parallel\vec{0}$.

◆ Δύο ομόρροπα διανύσματα με ίσα μέτρα ονομάζονται **ίσα**, ενώ δύο αντίρροπα διανύσματα με ίσα μέτρα ονομάζονται **αντίθετα**. Έτσι έχουμε:

i) $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ $\quad$ $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}$ **και** $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

ii) $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$ $\quad$ $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$ **και** $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

◆ Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε η κυρτή γωνία $\varphi=\widehat{AOB}$ των ημιευθειών ΟΑ και ΟΒ ονομάζεται **γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$**, η οποία συμβολίζεται με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.



Προφανώς, ισχύει $\mathbf{0}\leq(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})\leq\boldsymbol{\pi}$.

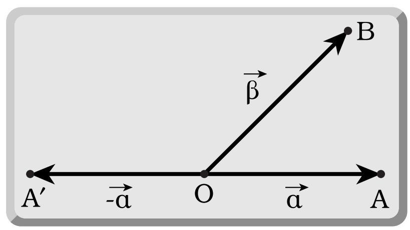
Επίσης, ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

α) $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}$ $\quad$ $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0$.

β) $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$ $\quad$ $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \pi$.

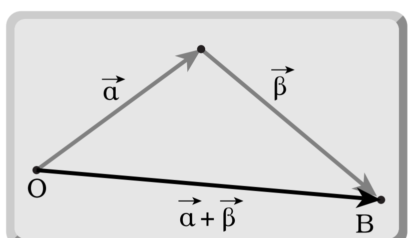
γ) $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + (\widehat{-\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \pi$.

Θεωρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία $\varphi\in[0, \pi]$ με κάθε άλλο διάνυσμα.



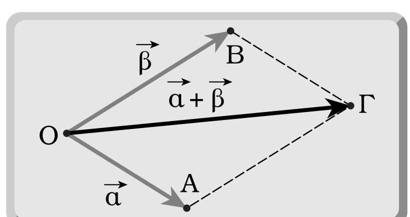
1.1.2. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

◆ Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ ονομάζεται **άθροισμα ή συνισταμένη των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$** και γράφουμε $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.



Το άθροισμα των **$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$** βρίσκεται και με το λεγόμενο **κανόνα του παραλληλογράμμου**.

Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και σχηματίσουμε το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ, τότε προφανώς ισχύει $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.



◆ Η **διαφορά** του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το $-\vec{\beta}$, δηλαδή

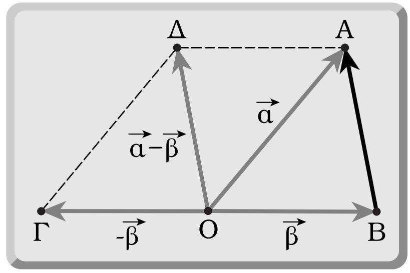
$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \overrightarrow{O A} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{BA},$$

εφόσον τα τετράπλευρα ΟΑΔΓ και ΟΒΑΔ είναι παραλληλόγραμμα.

Επομένως, ισχύει

$$\mathbf{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}}$$



- Αν Ο είναι ένα σταθερό σημείο του χώρου, τότε για κάθε σημείο Μ ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα** του σημείου Μ, ενώ το Ο ονομάζεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

iii) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

iv) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

v) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\gamma} \qquad \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

vi) $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\beta} \qquad \vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

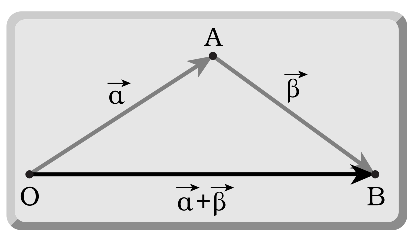
1.1.3. Τριγωνική ανισότητα

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και θέσουμε $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, τότε στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει

$$\left||\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{AB}|\right| < |\overrightarrow{OB}| < |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}|,$$

δηλαδή

αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$, τότε $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

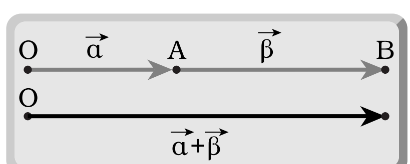


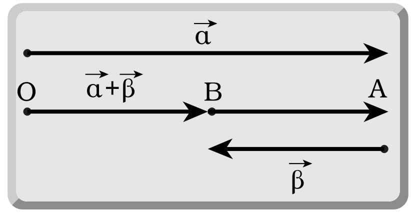
β) Αν $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$, τότε προφανώς ισχύει

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \text{ και } |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|>\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|,$$

δηλαδή

αν $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$, τότε $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$





γ) Αν $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$, τότε προφανώς ισχύει

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$,

δηλαδή

αν $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$, τότε $||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

δ) Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε προφανώς ισχύει

$$||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

ε) Επειδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ και $|-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}|$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει και

$$||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$

Αν $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||$, ενώ αν $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.
Γενικά, λοιπόν, έχουμε

$$||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι ισχύει

$$|\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\ldots+\vec{\alpha}_\nu| \leq |\vec{\alpha}_1| + |\vec{\alpha}_2| + \ldots + |\vec{\alpha}_\nu|$$

1.1.4. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

- **Γινόμενο** του αριθμού $\lambda\pi 0$ επί το διάνυσμα $\vec{\alpha}\pi\vec{0}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\lambda\cdot\vec{\alpha}$, το οποίο είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda>0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda<0$. Το μέτρο του $\lambda\cdot\vec{\alpha}$ ισούνται με $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$.

  Αν $\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$.

- Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα με $\vec{\beta}\pi\vec{0}$ και θέσουμε $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} = \kappa$, δηλαδή $|\vec{\alpha}|=\kappa|\vec{\beta}|$, τότε:

  i) αν $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta}$, ισχύει $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$

  ii) αν $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta}$, ισχύει $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$

  Επομένως, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$. Ισχύει και το αντίστροφο, επειδή το διάνυσμα $\lambda\vec{\beta}$, από τον ορισμό, είναι παράλληλο προς το $\vec{\beta}$. Έχουμε, λοιπόν, το συμπέρασμα

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \qquad \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \quad (\vec{\beta}\pi\vec{0})$$

Γενικότερα, έχουμε

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \qquad \lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\beta} \quad (|\lambda|+|\mu|\pi 0)$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda=0$ και $\mu=0$, αφού, αν υποθέσουμε π.χ. ότι $\lambda\pi 0$. τότε $\vec{\alpha} = \frac{\mu}{\lambda}\vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, που είναι άτοπο.

Έχουμε, λοιπόν και το εξής συμπέρασμα

αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$, τότε $\lambda = \mu = 0$

◆ Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

i) $\lambda\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

ii) $(\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

iii) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\,\vec{\alpha}$

iv) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \qquad \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

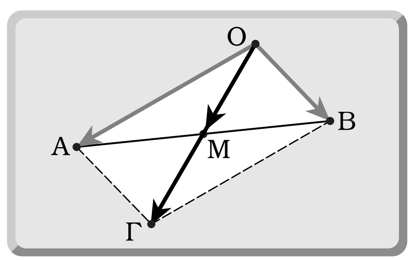
v) αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\pi 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

vi) αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\,\pi\,\vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$

◆ Αν κατασκευάσουμε το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ, τότε έχουμε

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{OM},$$

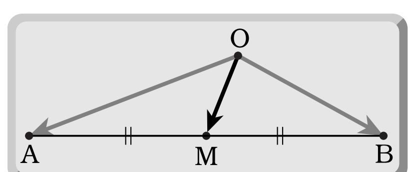
όπου Μ το μέσο του ΑΒ.



Αντιστρόφως, αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, τότε

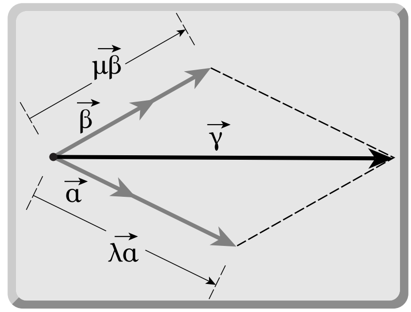
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad ή \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

ή $\mathbf{2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}$



▶ Συμπέρασμα: Μ μέσο του $\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

1.1.5. Γραμμικώς ανεξάρτητα και εξαρτημένα διανύσματα



- **Γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ με λ, $\mu\in\mathbb{R}$. Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά, τότε κάθε διάνυσμα του επιπέδου τους γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

  Είναι φανερό, ότι και όταν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, τότε το $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ είναι συνεπίπεδο με τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

  Έχουμε, λοιπόν, το συμπέρασμα:

  Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα, αν και μόνον αν ένα τουλάχιστον απ' αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο.

  Γενικότερα, γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa$ με λ_1, λ_2, ..., $\lambda_\kappa\in\mathbb{R}$.

- Τα διανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**, όταν κάθε ισότητα της μορφής $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa=\vec{0}$ αληθεύει μόνον όταν $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\kappa=0$.

  Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν υπάρχει ισότητα της μορφής $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa=\vec{0}$ με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές λ_1, λ_2, ..., λ_κ μη μηδενικό, τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ ονομάζονται **γραμμικώς εξαρτημένα**.

  Είναι φανερό ότι:

  i) Δύο παράλληλα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

  ii) Δύο μη παράλληλα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

  iii) Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα θεωρείται γραμμικώς ανεξάρτητο (αφού η ισότητα $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ ισχύει μόνον όταν $\lambda=0$).

  iv) Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται γραμμικώς εξαρτημένο.

  v) Τα διανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνον αν ένα τουλάχιστον απ' αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

  vi) Αν τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$, $\vec{v}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το $\vec{v}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$.

vii) Αν τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$, $\vec{v}_{\kappa+1}$, ..., $\vec{v}_\lambda$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

viii) Αν τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$, $\vec{v}_{\kappa+1}$, ..., $\vec{v}_\lambda$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_\kappa$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ix) Τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου δεν είναι συνεπίπεδα, ενώ τρία γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του χώρου είναι συνεπίπεδα. Επομένως, **τρία διανύσματα του επιπέδου είναι γραμμικώς εξαρτημένα, όπως και τέσσερα διανύσματα του χώρου.**

1.1.6. Απλός και διπλός λόγος σημείων

◆ Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ και το σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται **απλός (ή μερικός) λόγος** της τριάδας (Α, Β, Μ) και γράφουμε λ=(ΑΒΜ).

σχ. α

σχ. β

Δηλαδή ισχύει

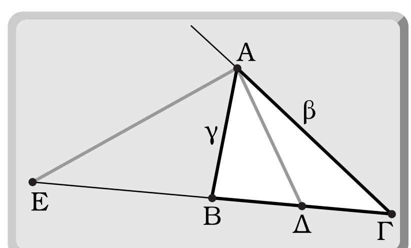
$$(AB M) = \lambda \qquad \vec{AM} = \lambda\vec{MB}$$

Αν λ>0, το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ (σχ. α), ενώ αν λ<0, το Μ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ (σχ. β).

◆ **Διπλός λόγος** τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ μιας ευθείας, με τη σειρά που δόθηκαν, ονομάζεται ο αριθμός

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}$$

Για παράδειγμα, σε τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ<ΑΓ, φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ και την εξωτερική διχοτόμο ΑΕ.



Επειδή $\dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$,

ισχύει $\vec{B\Delta} = \dfrac{\gamma}{\beta}\vec{\Delta\Gamma}$, δηλαδή $(B\Gamma\Delta) = \dfrac{\gamma}{\beta}$.

Επίσης, επειδή $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ και $\overrightarrow{BE} \neq \overrightarrow{E\Gamma}$, ισχύει $\overrightarrow{BE} = -\frac{\gamma}{\beta}\overrightarrow{E\Gamma}$, δηλαδή

$$(B\Gamma E) = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

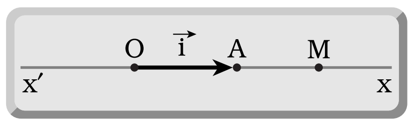
Έτσι, έχουμε

$$(B\Gamma\Delta E) = \frac{(B\Gamma\Delta)}{(B\Gamma E)} = -1.$$

Στην περίπτωση που ισχύει $(AB\Gamma\Delta) = -1$, λέμε ότι τα Α, Β, Γ, Δ αποτελούν **αρμονική τετράδα** ή ότι τα Α, Β είναι **αρμονικά συζυγή** των Γ, Δ.

1.2 Συντεταγμένες στο επίπεδο

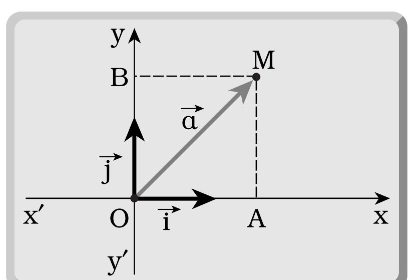
1.2.1. Άξονας



Αν σε μια ευθεία x x εκλέξουμε δύο σημεία Ο και Α με $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ και $|\vec{i}| = 1$, όπου το Α ανήκει στην ημιευθεία Ox, τότε η ευθεία αυτή ονομάζεται **άξονας με αρχή το Ο και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$**. Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας**, ενώ η Ox λέγεται **αρνητικός ημιάξονας**.

Για ένα οποιοδήποτε σημείο Μ του άξονα x x, επειδή $\overrightarrow{OM} // \vec{i}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός x με $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, ο οποίος ονομάζεται τετμημένη του Μ και γράφουμε Μ(x).

1.2.2 Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων



Αν θεωρήσουμε στο επίπεδο δύο κάθετους άξονες x x και y y με κοινή αρχή Ο, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** και το συμβολίζουμε με **Oxy**.

Ο άξονας x x ονομάζεται **άξονας των τετμημένων**, ενώ ο y y **άξονας των τεταγμένων**.

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου και Α, Β είναι οι προβολές του στους άξονες x x, y y αντίστοιχα, τότε υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί x και y με $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **συντεταγμένες** του Μ (**τετμημένη και τεταγμένη**) και γράφουμε **Μ(x, y)**.

Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OM}$ ισχύει $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Οι αριθμοί x, y λέγονται, επίσης, **συντεταγμένες του** $\vec{\alpha}$ και γράφουμε $\vec{\alpha}=(x, y)$. Έτσι, έχουμε

$$\vec{\alpha} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

1.2.3. Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε ισχύουν

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

ii) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1-x_2, y_1-y_2)$

iii) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1), \lambda\in\mathbb{R}$

iv) $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2), \lambda, \mu\in\mathbb{R}$.

1.2.4. Συντεταγμένες και μέτρο διανύσματος από τα άκρα του

Για οποιαδήποτε σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ισχύουν

i) $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

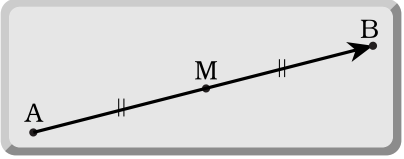
ii) $|\overrightarrow{AB}| = (AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Επίσης, αν $\vec{\alpha}=(x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}|= \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.2.5. Συντεταγμένες του μέσου διανύσματος

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ είναι το σημείο

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



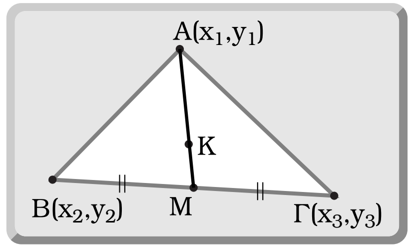
Γενικά, αν το σημείο Μ διαιρεί το $\overrightarrow{AB}$ εσωτερικά ή εξωτερικά σε λόγο λ, τότε έχουμε

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \quad \text{ή} \quad (x_M-x_1, y_M-y_1) = \lambda(x_2-x_M, y_2-y_M)$$

και έτσι βρίσκουμε

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Για παράδειγμα, το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ διαιρεί το $\overrightarrow{AM}$ σε λόγο 2 και επομένως έχει συντεταγμένες



$$\left(\frac{x_1 + 2x_M}{1 + 2}, \frac{y_1 + 2y_M}{1 + 2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

1.2.6. Συνθήκη συγγραμμικότητας διανυσμάτων του επιπέδου

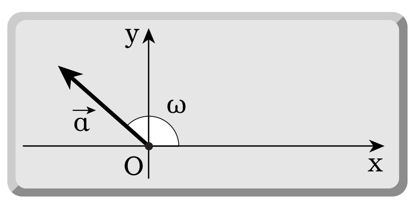
Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε ισχύει

i) $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ $\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

ii) $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ $\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \pi\ 0$

Στην πρώτη περίπτωση ισχύει $x_1y_2=x_2y_1$ κι αν είναι $x_1 \cdot x_2 \pi 0$, τότε έχουμε $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

Ο αριθμός $\lambda = \frac{y}{x}$ για το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x, y)$ με $x \pi 0$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και ισχύει **λ=εφω**, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα Ox.

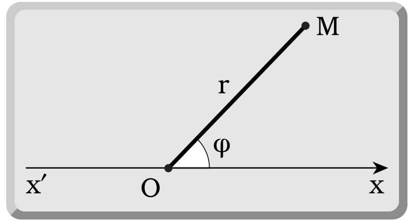


Προφανώς, δύο συγγραμμικά διανύσματα, μη παράλληλα στον άξονα Oy, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Ένα διάνυσμα παράλληλο στον άξονα Ox έχει συντεταγμένες της μορφής (x, 0), ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στον Oy έχει συντεταγμένες της μορφής (0, y).

1.2.7. Σύστημα πολικών συντεταγμένων

◆ Θεωρούμε στο επίπεδο έναν άξονα x x με αρχή O. Κάθε σημείο M του επιπέδου προσδιορίζεται από την απόσταση **r=(OM)** και τη γωνία **$\varphi=\widehat{MOx}$** που διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox, όταν περιστραφεί γύρω από το O, κατά τη θετική φορά, μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OM.



Οι αριθμοί r, φ ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του M και ισχύει **$r\geq 0$ και $0\leq\varphi<2\pi$**.

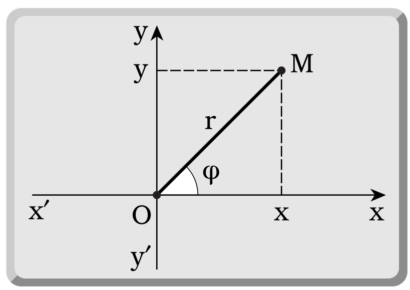
Το r ονομάζεται **πολική ακτίνα**, ενώ το φ **πολική γωνία**.

Το σημείο O ονομάζεται **πόλος** και ο x x **πολικός άξονας**.

Η αρχή O έχει πολική ακτίνα r=0 και οποιαδήποτε πολική γωνία. Σε κάθε σημείο M του επιπέδου, διαφορετικού του πόλου O, αντιστοιχεί μοναδικό ζεύγος (r, φ) πολικών συντεταγμένων και αντιστρόφως.

◆ Οι πολικές συντεταγμένες (r, φ) και οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου M συνδέονται με τις σχέσεις

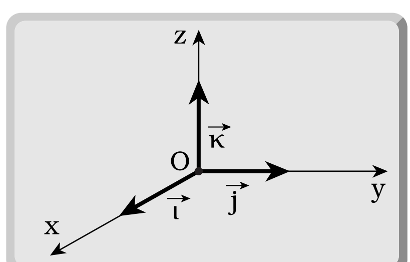
$$x = r\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y = r\eta\mu\varphi$$



1.3 Συντεταγμένες στο χώρο

1.3.1. Τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

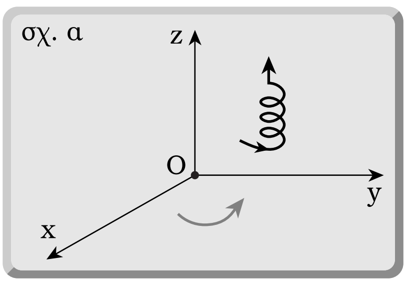
◆ Θεωρούμε τρεις μη συνεπίπεδους άξονες x x, y y, z z με κοινή αρχή O, κάθετους ανά δύο και με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$ αντίστοιχα. Λέμε τότε ότι ορίζεται ένα **τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** στο χώρο και συμβολίζεται με **Oxyz**.

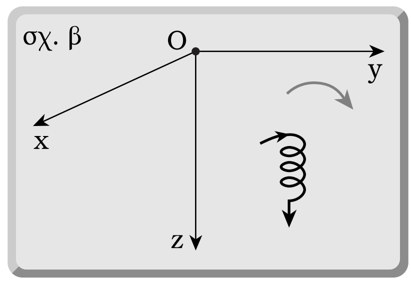


Οι άξονες Ox, Oy, Oz λέγονται αντίστοιχα άξονες των **τετμημένων, τεταγμένων, κατηγμένων**.

Τα τρία επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη (Ox, Oy), (Oy, Oz), (Oz, Ox) λέγονται **συντεταγμένα επίπεδα** και συμβολίζονται με Oxy, Oyz, Ozx αντίστοιχα.

◆ Ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να είναι **δεξιόστροφο** (σχ. α) ή και **αριστερόστροφο** (σχ. β)

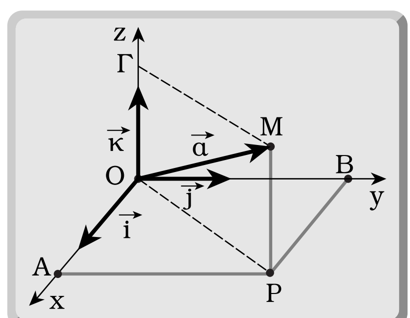




Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων και είναι αυτό στο οποίο η θετική φορά του άξονα Oz συμπίπτει με την κατεύθυνση που κινείται ο άξονας ενός κοχλία, όταν στρέφεται στο επίπεδο Oxy κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού.

1.3.2. Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο χώρο

◆ Θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz και ένα σημεία M του χώρου. Η παράλληλη από το M στον άξονα Oz τέμνει το επίπεδο Oxy στο σημείο P (δηλαδή MP Oxy), ενώ οι παράλληλες από το P στους άξονες Oy, Ox τέμνουν τους Ox, Oy αντίστοιχα στα A, B. Η παράλληλη από το M στην OP τέμνει τον άξονα Oz στο σημείο Γ.



Υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί x, y, z με $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=x\vec{j}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=z\vec{\kappa}$. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **συντεταγμένες του M** και γράφουμε M(x, y, z). Το x λέγεται τετμημένη, το y τεταγμένη και το z κατηγμένη.

Ισχύει

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{\kappa}$$

Τα διανύσματα $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{\kappa}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$, ενώ οι συντελεστές x, y, z του γραμμικού συνδυασμού $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{\kappa}$ ονομάζονται **συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$** και γράφουμε $\vec{\alpha}=(x, y, z)$. Έτσι, έχουμε

$$\vec{\alpha} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{\kappa} = (x, y, z)$$

Είναι φανερό ότι:

i) $\vec{0} = (0, 0, 0)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{\kappa} = (0, 0, 1)$.

ii) Ένα σημείο του άξονα Ox έχει συντεταγμένες (x, 0, 0), του Oy έχει συντεταγμένες (0, y, 0) και του Oz συντεταγμένες (0, 0, z).

iii) Ένα σημείο του επιπέδου Oxy έχει συντεταγμένες (x, y, 0), του επιπέδου Oyz έχει συντεταγμένες (0, y, z) και του Ozx έχει συντεταγμένες (x, 0, z).

◆ Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$ έχουμε:

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

ii) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$

ii) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

iv) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ $\quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ και $z_1 = z_2$

v) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

vi) $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ $\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$

Αν είναι $x_2y_2z_2\pi 0$, τότε ισχύει

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Η συνθήκη παραλληλίας (ή συγγραμμικότητας) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \quad x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2 \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Θυμίζουμε ότι δύο συγγραμμικά διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

◆ Αν έχουμε τα σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$, τότε

i) $\vec{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

ii) $(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

iii) Μέσο του AB είναι το $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

◆ Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{\gamma}=(x_3, y_3, z_3)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (επομένως συνεπίπεδα), αν και μόνον αν ισχύει

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (δηλαδή μη συνεπίπεδα), αν και μόνον αν ισχύει $D \pi 0$.

◆ Τέλος, έχουμε και τις εξής ιδιότητες

1) $\vec{\alpha}//Ox \quad \vec{\alpha} = (x, 0, 0)$

   $\vec{\alpha}//Oy \quad \vec{\alpha} = (0, y, 0)$

   $\vec{\alpha}//Oz \quad \vec{\alpha} = (0, 0, z)$

2) $\vec{\alpha}//Oxy \quad \vec{\alpha} = (x, y, 0)$

   $\vec{\alpha}//Oyz \quad \vec{\alpha} = (0, y, z)$

   $\vec{\alpha}//Ozx \quad \vec{\alpha} = (x, 0, z)$

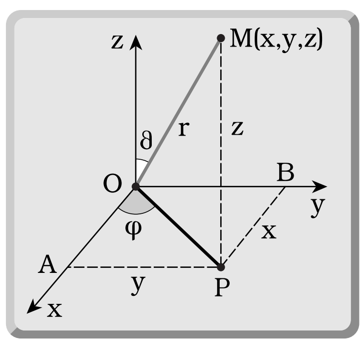
1.3.3. Σφαιρικές (ή γεωγραφικές) συντεταγμένες

Η απόσταση $r=(OM)$ και οι γωνίες

$$\varphi=\widehat{POx} \text{ και } \vartheta=\widehat{MOz}$$

ονομάζονται **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου $M(x, y, z)$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$x = r\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y = r\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi, \quad z = r\sigma\upsilon\nu\vartheta$$
$$r \geq 0, \quad \varphi\in[0, 2\pi), \quad \vartheta\in[0, \pi]$$
,



οι οποίες αποδεικνύονται εύκολα, αφού στα ορθογώνια τρίγωνα OAP και MOP ισχύει

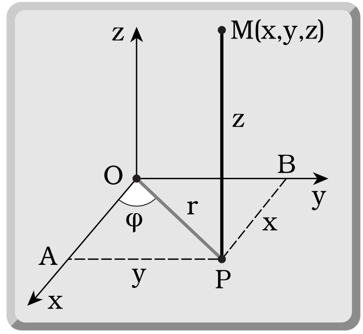
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{(OP)}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{(OP)}, \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{(MP)}{r} = \frac{z}{r},$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = \eta\mu\vartheta = \frac{(OP)}{r}.$$

1.3.4. Κυλινδρικές συντεταγμένες

Η απόσταση $r=(OP)=x^2+y^2$, η γωνία $\varphi=\widehat{POx}$ και ο αριθμός z ονομάζονται **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου M(x, y, z) και ισχύουν οι σχέσεις



$x = r\sigma\upsilon\nu\varphi$,	$y = r\eta\mu\varphi$,	$z = z$
$z\in\mathbb{R}$,	$r \geq 0$	$\varphi\in[0,\ 2\pi)$

1.4 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός **Εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται ο αριθμός

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}})$$

Για παράδειγμα, αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

Ιδιότητες:

1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
3) $\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = (\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})$, $\lambda\in\mathbb{R}$
4) Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$
5) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \quad \vec{\alpha} \ \vec{\beta}$
6) $\vec{\alpha}\neq\neq\vec{\beta} \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
7) $\vec{\alpha}\neq\ \vec{\beta} \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
8) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

9) Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$

και $συν(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

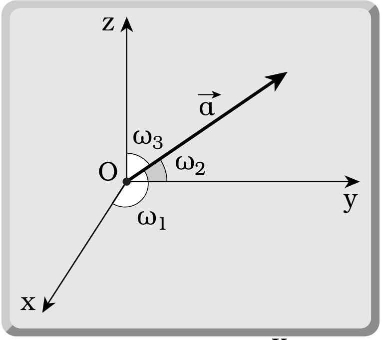
10) Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$, τότε

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

11) Αν το διάνυσμα

$\vec{\alpha}=(x, y, z)$

σχηματίζει γωνίες ω_1, ω_2, ω_3 με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$ αντίστοιχα, τότε οι αριθμοί



$συν\omega_1 = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{i}}{|\vec{\alpha}||\vec{i}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

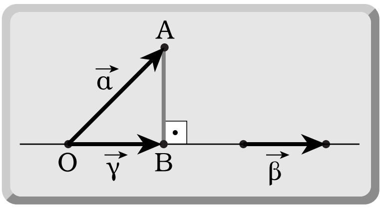
$συν\omega_2 = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$συν\omega_3 = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

ονομάζονται **συνημίτονα κατεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$. Οι αριθμοί αυτοί συνδέονται με τη σχέση

$$συν^2\omega_1 + συν^2\omega_2 + συν^2\omega_3 = 1.$$

12) Αν η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο φορέα του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, δηλαδή $\vec{\gamma}=προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$, τότε ισχύει $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}}$.



► Προσοχή: Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

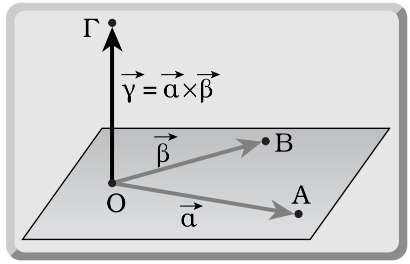
1.5 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$. **Εξωτερικό γινόμενο** του $\vec{\alpha}$ επί το $\vec{\beta}$ ονομάζεται το **διάνυσμα** $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\ \vec{\beta}$, με $\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$, που έχει:

i) διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

ii) φορά τέτοια, ώστε η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ να ορίζει δεξιόστροφο σύστημα και

iii) μέτρο ίσο με $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, δηλαδή



$$|\vec{\alpha}\ \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$$

Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\ \vec{\beta}=\vec{0}$.

Ιδιότητες:

1) $\vec{\alpha}\ \vec{\beta} = -\vec{\beta}\ \vec{\alpha}$

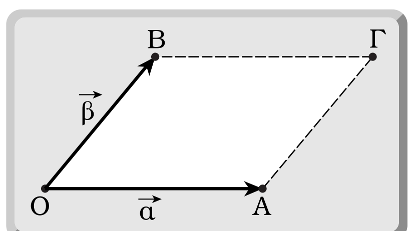
2) $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\quad \vec{\alpha}\ \vec{\beta} = \vec{0}$ (π.χ. $\vec{\alpha}\ \vec{\alpha}=\vec{0}$)

3) $\vec{i}\ \vec{j} = \vec{\kappa}$, $\vec{j}\ \vec{\kappa} = \vec{i}$, $\vec{\kappa}\ \vec{i} = \vec{j}$

4) $\lambda(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\lambda\vec{\alpha})\ \vec{\beta} = \vec{\alpha}\ (\lambda\vec{\beta})$

5) $\vec{\alpha}\ (\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) + (\vec{\alpha}\ \vec{\gamma})$

6) Το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ έχει εμβαδόν $E=|\vec{\alpha}\ \vec{\beta}|$



7) Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$, τότε

$$\vec{\alpha}\ \vec{\beta} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

και γράφουμε

$$\vec{\alpha}\ \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

1.6 Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων

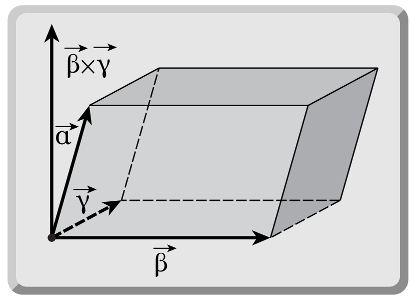
Ορισμός **Μικτό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, β και $\vec{\gamma}$, με τη σειρά αυτή, ονομάζεται ο **αριθμός** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\ \ \vec{\gamma})$ και συμβολίζεται με $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}]$. Δηλαδή ισχύει

$$[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\ \vec{\gamma})$$

ή αλλιώς

$$[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\cdot \eta\mu(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})\cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\ \vec{\gamma}})$$

Ιδιότητες: 1) Η απόλυτη τιμή του αριθμού $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}]$ είναι ό όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, όπου $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=\vec{\gamma}$.



2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$

3) Αν δύο τουλάχιστον από τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι παράλληλα, τότε $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}]=0$. Π.χ. είναι $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}]=0$.

4) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}) = \vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}\ \ \vec{\alpha}) = \vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta})$, δηλαδή
$[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = [\vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}\ \ \vec{\alpha}] = [\vec{\gamma}\ \ \vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}]$

5) $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = -[\vec{\beta}\ \ \vec{\alpha}\ \ \vec{\gamma}]$

6) $[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = 0 \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ συνεπίπεδα

7) Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3, y_3, z_3)$, τότε

$$[\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta}\ \ \vec{\gamma}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

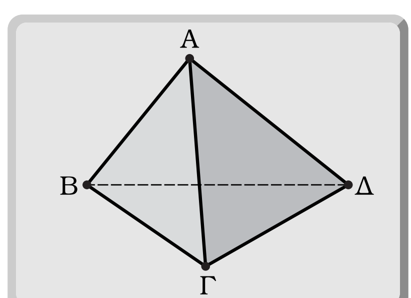
8) Ο όγκος του τετραέδρου με κορυφές τα μη συνεπίπεδα σημεία

$A(x_1, y_1, z_1)$,

$B(x_2, y_2, z_2)$,

$\Gamma(x_3, y_3, z_3)$

και $\Delta(x_4, y_4, z_4)$



ισούται με το $\frac{1}{6}$ του όγκου του παραλληλεπιπέδου με ακμές ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Επομένως

$$V = \frac{1}{6}\,|[\overrightarrow{AB}\quad \overrightarrow{A\Gamma}\quad \overrightarrow{A\Delta}]| = \frac{1}{6}\,\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\,\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

1.7 Δισεξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων

Ορισμός **Δισεξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, με τη σειρά αυτή, ονομάζεται το εξωτερικό γινόμενο του $\vec{\alpha}$ επί το $\vec{\beta}\;\vec{\gamma}$, δηλαδή το **διάνυσμα $\vec{\alpha}\;(\vec{\beta}\;\vec{\gamma})$**.

Είναι φανερό ότι $\vec{\alpha}\;(\vec{\beta}\;\vec{\gamma})$ π $(\vec{\alpha}\;\vec{\beta})\;\vec{\gamma}$.

Ιδιότητες: 1) $\vec{\alpha}\;(\vec{\beta}\;\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}$

2) Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\beta}=(x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3, y_3, z_3)$, τότε

$$\vec{\alpha}\;(\vec{\beta}\;\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1.8 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

1.8.1. Παράλληλη μεταφορά αξόνων

◆ Θεωρούμε στο επίπεδο δύο ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων Oxy και O XY, όπου η αρχή O του δεύτερου έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) ως προς το πρώτο και οι άξονες X X, Y Y είναι παράλληλοι και ομόρροποι προς τους άξονες x x, y y αντίστοιχα.

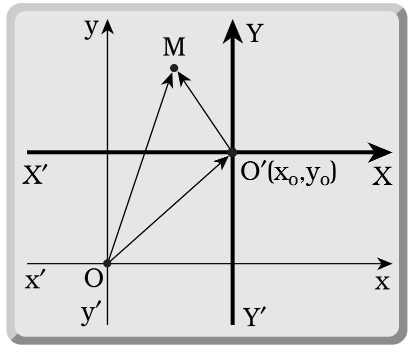
Αν ένα σημείο Μ του επιπέδου έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το σύστημα Oxy και (X, Y) ως προς το O XY, τότε από την ισότητα

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{O\ M}$ προκύπτει ότι

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (X, Y)$$

ή $x = x_0 + X$ και $y = y_0 + Y$

ή $x - x_0 = X$ και $y - y_0 = Y$

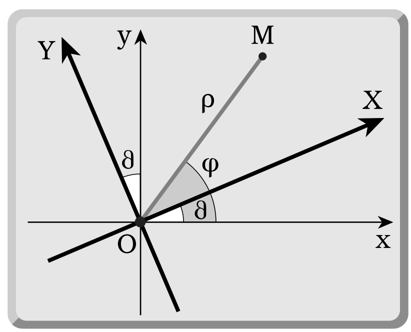


◆ Αν θεωρήσουμε στο χώρο δύο ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων Oxyz και O XYZ, όπου το O έχει συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) ως προς το Oxyz και οι άξονες X X, Y Y, Z Z είναι παράλληλοι και ομόρροποι προς τους άξονες x x, y y, z z αντίστοιχα, τότε οι συντεταγμένες (x, y, z) και (X, Y, Z) ενός σημείου Μ ως προς τα δύο συστήματα συνδέονται με τις σχέσεις

$$x - x_0 = X, \quad y - y_0 = Y, \quad z - z_0 = Z$$

1.8.2. Στροφή των αξόνων

α) Υποθέτουμε ότι οι άξονες x x και y y στρέφονται γύρω από την αρχή O κατά γωνία θ και παίρνουν τις θέσεις των αξόνων X X και Y Y αντίστοιχα. Αναζητούμε τις σχέσεις των συντεταγμένων (x, y) και (X, Y) ενός σημείου Μ ως προς τα συστήματα συντεταγμένων Oxy και OXY αντίστοιχα.



Αν ρ, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες του Μ, τότε

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{και} \quad y = \rho\eta\mu\varphi$$

Ισχύει

- $X = \rho\sigma\upsilon\nu\widehat{XOM} = \rho\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + \eta\mu\varphi\,\eta\mu\vartheta)$
  $= (\rho\sigma\upsilon\nu\varphi)\sigma\upsilon\nu\vartheta + (\rho\eta\mu\varphi)\eta\mu\vartheta = x\sigma\upsilon\nu\vartheta + y\eta\mu\vartheta$

- $Y = \rho\eta\mu\widehat{XOM} = \rho\eta\mu(\varphi-\vartheta) = \rho(\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi)$
  $= (\rho\eta\mu\varphi)\sigma\upsilon\nu\vartheta - (\rho\sigma\upsilon\nu\varphi)\eta\mu\vartheta = y\sigma\upsilon\nu\vartheta - x\eta\mu\vartheta$

Έτσι, έχουμε

$$X = x\sigma\upsilon\nu\vartheta + y\eta\mu\vartheta, \quad Y = y\sigma\upsilon\nu\vartheta - x\eta\mu\vartheta$$

Το σύστημα $\begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\vartheta + y\eta\mu\vartheta = X \\ -x\eta\mu\vartheta + y\sigma\upsilon\nu\vartheta = Y \end{cases}$ έχει τη μοναδική λύση

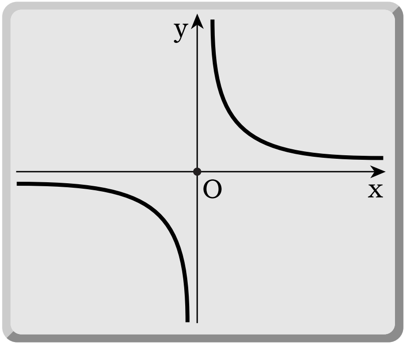
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} X & \eta\mu\vartheta \\ Y & \sigma\upsilon\nu\vartheta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta \\ -\eta\mu\vartheta & \sigma\upsilon\nu\vartheta \end{vmatrix}} = X\sigma\upsilon\nu\vartheta - Y\eta\mu\vartheta$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & X \\ -\eta\mu\vartheta & Y \end{vmatrix}}{1} = Y\sigma\upsilon\nu\vartheta + X\eta\mu\vartheta$$

Άρα, ισχύει

$$x = X\sigma\upsilon\nu\vartheta - Y\eta\mu\vartheta, \quad y = X\eta\mu\vartheta + Y\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και θα αναζητήσουμε την εξίσωσή της ως προς το σύστημα συντεταγμένων OXY που προκύπτει από το Oxy με στροφή γύρω από το O κατά γωνία $\vartheta=45°$.



Είναι

$$x = X\sigma\upsilon\nu45° - Y\eta\mu45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$$

$$y = X\eta\mu45° + Y\sigma\upsilon\nu45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$$

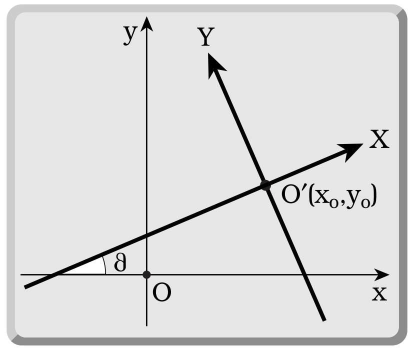
Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην υπερβολή $y = \frac{1}{x}$, αν και μόνον αν ισχύει

$$y = \frac{1}{x} \qquad xy = 1 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) = 1$$

$$\frac{1}{2}(X^2-Y^2) = 1 \qquad X^2 - Y^2 = 2$$

Άρα, η εξίσωση της υπερβολής στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση $X^2-Y^2=2$.

β) Αν έχουμε δύο ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων Oxy και Ο XY, όπου το Ο έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) ως προς το Oxy και ϑ είναι η γωνία των Ο X, Ox, τότε ισχύουν



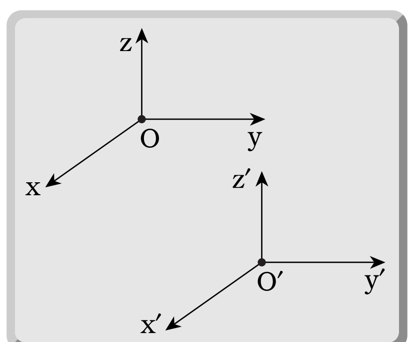
$$x = x_0 + X\sigma\upsilon\nu\vartheta - Y\eta\mu\vartheta,$$
$$y = y_0 + X\eta\mu\vartheta + Y\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

και αυτό επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έγινε πρώτα παράλληλη μεταφορά και στη συνέχεια στροφή των αξόνων κατά γωνία ϑ.

1.8.3. Η γενική περίπτωση στο χώρο

Θεωρούμε στο χώρο δύο δεξιόστροφα τρισορθογώνια συστήματα συντεταγμένων Oxyz και Ο x y z , όπου η αρχή Ο του δεύτερου έχει συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) ως προς το πρώτο.

Αν οι διανυσματικές μονάδες $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$ του δεύτερου συστήματος έχουν συντεταγμένες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ως προς το Oxyz, τότε έχουμε



$$\vec{i} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{\kappa}, \quad \vec{j} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} = \gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{\kappa} \qquad (1)$$

Αν ένα σημείο Μ του χώρου έχει συντεταγμένες (x, y, z) και (x , y , z) ως προς τα συστήματα Oxyz και Ο x y z αντίστοιχα, τότε από την ισότητα $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OM}$ έχουμε

$$x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{\kappa} = (x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{\kappa}) + (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{\kappa}\,)$$

και λόγω των ισοτήτων (1) παίρνουμε

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y = y_0 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z = z_0 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

Επίσης, ισχύουν οι ισότητες

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \; \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

(αφού $|\vec{i}\,|=|\vec{j}\,|=|\vec{\kappa}\,|=1$)

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \quad \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0,$$

$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0$ (αφού $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{\kappa} = \vec{j}\cdot\vec{\kappa} = 0$)

και

$$[\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{\kappa}\,] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

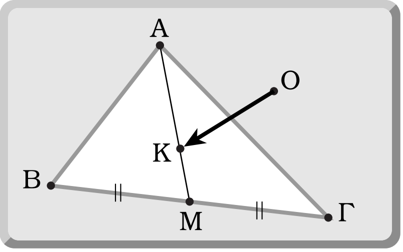
Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1

Αν Ο είναι σημείο αναφοράς του χώρου, να αποδείξετε ότι το διάνυσμα θέσης του βαρυκέντρου Κ τριγώνου ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{ΟΚ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ})$.

Απόδειξη

Το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο της διαμέσου ΑΜ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ΑΚ}=2\overrightarrow{ΚΜ}$ κι επομένως



$\overrightarrow{ΟΚ} - \overrightarrow{ΟΑ} = 2(\overrightarrow{ΟΜ}-\overrightarrow{ΟΚ})$

ή $3\overrightarrow{ΟΚ} = \overrightarrow{ΟΑ} + 2\overrightarrow{ΟΜ}$

ή $3\overrightarrow{ΟΚ} = \overrightarrow{ΟΑ} + (\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ})$
[αφού $\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}=2\overrightarrow{ΟΜ}$]

ή $\overrightarrow{ΟΚ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ})$

▶ Σχόλιο: Η ισότητα $\overrightarrow{ΟΚ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ})$ γράφεται

$3\overrightarrow{ΟΚ} = \overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΒ} + \overrightarrow{ΟΓ}$

ή $3\overrightarrow{ΟΚ} = (\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΚΑ}) + (\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΚΒ}) + (\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΚΓ})$

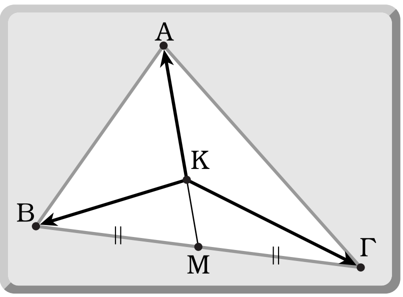
ή $\overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΚΒ} + \overrightarrow{ΚΓ} = \vec{0}$

Αντιστρόφως, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ

ισχύει $\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΚΒ}+\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}$,

τότε έχουμε $\overrightarrow{ΚΑ}+2\overrightarrow{ΚΜ}=\vec{0}$,

δηλαδή $\overrightarrow{ΚΑ}=-2\overrightarrow{ΚΜ}$.



Αυτό σημαίνει ότι το Κ ανήκει στο διάμεσο ΑΜ και επειδή (ΚΑ)=2(ΚΜ), είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.