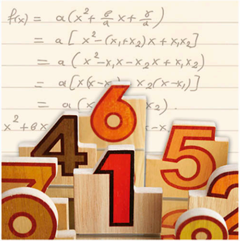
Θανάση Π. Ξένου



2η έκδοση
Σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

• Θεωρία • Παραδείγματα • Ασκήσεις με υποδείξεις - απαντήσεις
• Διαγωνίσματα • Λύσεις ασκήσεων σχολικού βιβλίου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-293-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Στον αδελφό μου
και εξαιρετικό μαθηματικό,
Γιώργο Ξένο

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο με βάση την αναμορφωμένη έκδοση του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου, που θα διδάσκεται από το σχολικό έτος 2010-2011.

Είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους μαθητές, αλλά και οι συνάδελφοι καθηγητές θα βρουν πλούσιο υλικό για το έργο τους.

✓ Κάθε ενότητα περιλαμβάνει:

- **Θεωρία**, γραμμένη με κάθε λεπτομέρεια.
- **Παραδείγματα και εφαρμογές** για όλες τις περιπτώσεις.
- **Ασκήσεις Α΄ και Β΄ ομάδας**

✓ Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνονται:

- **Ερωτήσεις κατανόησης** (Σωστού-Λάθους, πολλαπλής επιλογής, συμπλήρωσης κενού, αντιστοίχισης και σύντομης απάντησης)
- **Γενικές ασκήσεις,** κυρίως για μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.
- **Διαγώνισμα** με τέσσερα αντιπροσωπευτικά θέματα.

✓ Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

Εισαγωγικό κεφάλαιο: Το λεξιλόγιο της Λογικής – Σύνολα.

Κεφάλαιο 1: Οι πραγματικοί αριθμοί (ιδιότητες πράξεων, διάταξη, απόλυτη τιμή, ρίζες)

Κεφάλαιο 2: Εξισώσεις (Εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, διώνυμη εξίσωση).

Κεφάλαιο 3: Ανισώσεις (Ανισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, ανισώσεις γινόμενο, ανισώσεις πηλίκο).

Κεφάλαιο 4: Βασικές έννοιες των συναρτήσεων (Η έννοια της συνάρτησης, γραφική παράσταση συνάρτησης, μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης, άρτιες και περιττές συναρτήσεις).

Κεφάλαιο 5: Μελέτη των βασικών συναρτήσεων

$$f(x) = \alpha x^2, \quad g(x) = \frac{\alpha}{x} \quad \text{και} \quad h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0.$$

Κεφάλαιο 6: Πιθανότητες (δειγματικός χώρος - ενδεχόμενα, η έννοια της πιθανότητας)

Κεφάλαιο 7: Πρόοδοι (αριθμητικές, γεωμετρικές)

✓ Στο τέλος του βιβλίου γίνεται μια επανάληψη με όλη τη θεωρία σε ερωτήσεις και κατάλληλα επιλεγμένες επαναληπτικές ασκήσεις.

Το βιβλίο **συνοδεύεται από CD**, το οποίο περιέχει:

- **Απαντήσεις** ή **υποδείξεις** για όλες τις ερωτήσεις και ασκήσεις του παρόντος βιβλίου**.**
- **Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου**.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Μάρτιος 2012

Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Ε.1 Το λεξιλόγιο της Λογικής

Η συνεπαγωγή

- Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, έτσι ώστε, αν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και συμβολικά γράφουμε **P & Q**.

  Ο ισχυρισμός «**P & Q**» ονομάζεται **συνεπαγωγή**, ο P ονομάζεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής και ο Q **συμπέρασμα** αυτής. Ο συμβολισμός **P & Q** διαβάζεται επίσης «**αν P, τότε Q**».

συνεπαγωγή:	**P**	&	**Q**
	(υπόθεση)		(συμπέρασμα)

  Για παράδειγμα, έχουμε

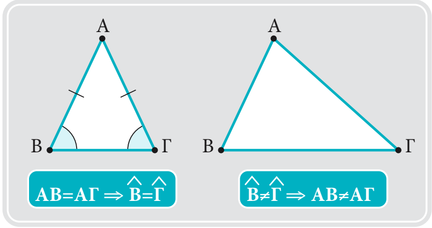
  1) $x = 2$ & $x^2 = 4$

  2) $\alpha = \beta$ & $\alpha^2 = \beta^2$

  3) $\alpha = \beta$ & $\alpha^\nu = \beta^\nu$

- Αν αληθεύει η συνεπαγωγή «P & Q», τότε αληθεύει και η συνεπαγωγή «όχι Q & όχι P», που είναι γνωστή ως **νόμος της αντιθετοαντιστροφής**. Πράγματι, αν δεν αληθεύει ο ισχυρισμός Q, τότε δεν μπορεί να αληθεύει και ο P.

  Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι, αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε έχει δύο γωνίες ίσες. Επίσης, αν ένα τρίγωνο δεν έχει δύο γωνίες ίσες, τότε δεν είναι ισοσκελές.



Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Αν αληθεύουν συγχρόνως οι συνεπαγωγές

$$P \ \& \ Q \quad \text{και} \quad Q \ \& \ P,$$

τότε λέμε ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και συμβολικά γράφουμε **P + Q**. Ο ισχυρισμός «**P + Q**» ονομάζεται **ισοδυναμία** και διαβάζουμε «**P ισοδυναμεί Q**» *ή* «**P αν και μόνο αν Q**».

P + Q σημαίνει P & Q και Q & P

Αν ισχύει μια συνεπαγωγή P & Q, δε σημαίνει ότι ισχύει και η **αντίστροφη συνεπαγωγή** Q & P.

Για παράδειγμα, ενώ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\alpha = \beta \ \& \ \alpha^2 = \beta^2,$$

αν έχουμε $\alpha^2 = \beta^2$, τότε δε σημαίνει απαραίτητα ότι $\alpha = \beta$, αφού μπορεί να είναι $\alpha = -\beta$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ισοδυναμιών είναι τα παρακάτω.

1) $\alpha = \beta \ + \ \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

2) $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

3) $\alpha^2 = \beta^2 \ + \ \alpha = \beta$ *ή* $\alpha = -\beta$

4) $\alpha^3 = \beta^3 \ + \ \alpha = \beta$

5) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν οι γωνίες του είναι ίσες.

Διάζευξη και σύζευξη ισχυρισμών

- Αν αληθεύει ένας τουλάχιστον από τους ισχυρισμούς P και Q, τότε λέμε ότι αληθεύει ο ισχυρισμός «**P ή Q**», που λέγεται **διάζευξη των P και Q.**

  Τέτοια παραδείγματα είναι τα εξής:

  1) $\alpha \cdot \beta = 0 \ + \ \alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$

  2) $x^2 = 4 \ + \ x = 2$ *ή* $x = -2$

  3) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \ + \ \alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0$

  4) $x^2 = x \ + \ x^2 - x = 0 \ + \ x(x-1) = 0 \ + \ x = 0$ *ή* $x = 1$.

- Αν αληθεύουν συγχρόνως δύο ισχυρισμοί P και Q, τότε λέμε ότι αληθεύει ο ισχυρισμός «**P *και* Q**», που λέγεται **σύζευξη των P και Q**.

Τέτοια παραδείγματα είναι τα εξής:

1) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \;+\; \alpha \neq 0$ *και* $\beta \neq 0$

2) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \;+\; \alpha = 0$ *και* $\beta = 0$

3) $\alpha^2 \neq \beta^2 \;+\; \alpha \neq \beta$ *και* $\alpha \neq -\beta$

4) $x^2 = 1$ *και* $x > 0 \;+\; x = 1$

5) $\alpha^2 = \beta^2$ *και* $\alpha\beta \geq 0 \;+\; \alpha = \beta$

- Η άρνηση του ισχυρισμού «P *ή* Q» είναι ο ισχυρισμός «όχι P και όχι Q», ενώ η άρνηση του ισχυρισμού «P και Q» είναι ο ισχυρισμός «όχι P ή όχι Q».

Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός $\alpha\beta = 0$ σημαίνει $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, ενώ ο ισχυρισμός $\alpha\beta \neq 0$ σημαίνει $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. *Χαρακτήρισε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω συνεπαγωγές και ισοδυναμίες.*

α) ☐ $x^2 = 0 \;+\; x = 0$

β) ☐ $x^2 = 9 \;+\; x = 3$

γ) ☐ $\alpha^2 = \beta^2 \;\&\; \alpha = \beta$

δ) ☐ $\alpha = \beta \;\&\; \alpha^3 = \beta^3$

ε) ☐ $\alpha\beta \neq 0 \;+\; \alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0$

στ) ☐ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \;+\; \alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$

ζ) ☐ $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \;+\; x = 1$ *ή* $x = 2$ *ή* $x = 3$

η) ☐ $\alpha < 1 \;\&\; \alpha^2 < 1$

θ) ☐ $(\alpha-1)^2 > 0 \;+\; \alpha > 1$

ι) ☐ $x < 1$ *και* $y < 1 \;\&\; xy < 1$

ια) ☐ $x^2 < 1 \;+\; x < 1$

ιβ) ☐ $x^2 = 2x \;+\; x = 0$ *ή* $x = 2$

ιγ) ☐ $x^2 \neq 3x \;\&\; x \neq 3$

2. Από τις συνεπαγωγές P & Q και Q & R, προκύπτει η συνεπαγωγή P & R;

3. Γράψε την άρνηση για καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις.

α) $x \neq 2$ *και* $y \neq 3$ ....

β) $x = 1$ *ή* $y = 3$ ....

γ) $\alpha > 0$ *ή* $\beta > 0$ ....

δ) $\alpha \geq 0$ *και* $\beta \leq 0.$ ....

4. Εξήγησε γιατί ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές και ισοδυναμίες.

α) $\alpha > 2$ & $\alpha + 1 > 2$

β) $\alpha^2 = \beta^2$ *και* $\alpha\beta \leq 0$ + $\alpha = -\beta$

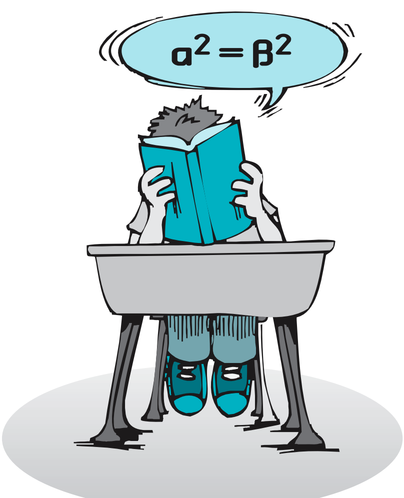
γ) α = φυσικός αριθμός & α = ακέραιος αριθμός

δ) $(\alpha-2)^2 + (\beta+1)^2 \neq 0$ + $\alpha \neq 2$ *ή* $\beta \neq -1.$

5. Βρες όλες τις ισοδυναμίες που υπάρχουν ανάμεσα σ' έναν ισχυρισμό του πίνακα Α′ και σ' έναν ισχυρισμό του πίνακα Β′.

Πίνακας Α′	
α)	$x^2 - x = 0$
β)	$x^2 \neq x$
γ)	$\alpha^2 = 1$ *και* $\alpha < 0$
δ)	$x^2 = 4$ *και* $x(x-2) = 0$
ε)	$(x-1)^2 > 0$

Πίνακας Β′	
1)	$x \neq 1$
2)	$x = 2$
3)	$x = 0$ *ή* $x = 1$
4)	$\alpha = -1$



Κεφάλαιο 2: Εξισώσεις

2.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

- Μια εξίσωση της μορφής **$\alpha x+\beta=0$** επιλύεται ως εξής:
  Η εξίσωση γράφεται $\alpha x=-\beta$.
  i) Αν $\alpha\neq 0$, τότε έχει ακριβώς μια λύση (ή ρίζα), την $x=\dfrac{-\beta}{\alpha}$.
  ii) Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει καμιά λύση).
  iii) Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό x (είναι ταυτότητα ή αόριστη).

- Αν στην εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ οι συντελεστές α και β δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά γράμματα, τότε η εξίσωση αυτή ονομάζεται **παραμετρική** και τα γράμματα ονομάζονται **παράμετροι**. Η διαδικασία για την εύρεση του πλήθους των ριζών της εξίσωσης, ονομάζεται **διερεύνηση**.

  Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\lambda^2(x-2)-3\lambda=x+1,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

  με παράμετρο λ.

  Η εξίσωση γράφεται

$$\lambda^2x-2\lambda^2-3\lambda=x+1 \Leftrightarrow \lambda^2x-x=2\lambda^2+3\lambda+1$$
$$\Leftrightarrow x(\lambda^2-1)=2\lambda^2+3\lambda+1 \Leftrightarrow x(\lambda-1)(\lambda+1)=2\lambda^2+3\lambda+1.$$

  - Αν $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την

$$x=\frac{2\lambda^2+3\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{(2\lambda^2+2\lambda)+(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}$$
$$=\frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}.$$

  - Αν $\lambda=1$, η εξίσωση γράφεται $0x=6$ και είναι αδύνατη.
  - Αν $\lambda=-1$, η εξίσωση γράφεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

Πολλές εξισώσεις, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

- Οι **εξισώσεις με βαθμό $\nu \geq 2$** λύνονται με παραγοντοποίηση του 1ου μέλους και χρήση της ιδιότητας

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad ή \quad \beta = 0.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^3 = 9x$ γράφεται

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ή \;\; x = 3 \;\; ή \;\; x = -3.$$

- Μια **κλασματική εξίσωση** λύνεται με απαλοιφή παρονομαστών, αφού γίνουν και οι απαιτούμενοι περιορισμοί.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{5 - x^2}{1 - x^2},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 - 5}{(x-1)(x+1)}$$

και ορίζεται όταν $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $(x-1)(x+1)$, οπότε η εξίσωση γράφεται

$$(x-1)(x+1) \cdot \frac{3}{x+1} - (x-1)(x+1) \cdot \frac{2}{x-1} = (x-1)(x+1) \cdot \frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1) - 2(x+1) = x^2 - 5 \Leftrightarrow 3x - 3 - 2x - 2 = x^2 - 5$$
$$\Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ή \quad x = 1.$$

Αλλά, η λύση $x = 1$ απορρίπτεται. Άρα, η εξίσωση έχει λύση μόνο την $x = 0$.

- Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής **$|f(x)| = |g(x)|$**, όπου $f(x)$, $g(x)$ παραστάσεις με τον άγνωστο x, εφαρμόζουμε την ιδιότητα

$$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad ή \quad \alpha = -\beta.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $|3x - 5| = |2x + 1|$ γράφεται

$$3x - 5 = 2x + 1 \quad ή \quad 3x - 5 = -2x - 1$$
$$\Leftrightarrow 3x - 2x = 5 + 1 \quad ή \quad 3x + 2x = 5 - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 6 \quad ή \quad x = \frac{4}{5}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να λυθεί και μια εξίσωση της μορφής **$|f(x)| = g(x)$**, με τον περιορισμό $g(x) \geq 0$.

Σχόλιο:

Όταν ζητείται η επίλυση μιας εξίσωσης με άγνωστο τον x, δε σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή είναι μια ισότητα που αληθεύει, αλλά ζητάμε να βρούμε τον άγνωστο x, ώστε να αληθεύει η ισότητα.

Γι' αυτό, η επίλυση μιας εξίσωσης αποτελείται από **ισοδύναμα βήματα** και επομένως ο σωστός συμβολισμός ανάμεσα στα διαδοχικά βήματα είναι « + » και όχι « & ».

Φυσικά, το ίδιο συμβαίνει και με την επίλυση ανισώσεων και συστημάτων.

Παραδείγματα και εφαρμογές

1.

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(\lambda x-1)-4\lambda(x+1)=4$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^3x-\lambda^2-4\lambda x-4\lambda=4 \quad + \quad \lambda^3x-4\lambda x=\lambda^2+4\lambda+4$$

$$+ \quad \lambda x(\lambda^2-4)=(\lambda+2)^2 \quad + \quad \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)x=(\lambda+2)^2$$

- Αν $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την

$$x=\frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda-2)}.$$

- Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γράφεται $0x=4$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=2$, η εξίσωση γράφεται $0x=16$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=-2$, η εξίσωση γράφεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

2.

Να διερευνηθεί και να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{\lambda x-\mu}{3}+\frac{1}{2}x=\lambda-\frac{x}{3},$$

με παραμέτρους $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$.

Λύση:

Κάνουμε, πρώτα, απαλοιφή παρονομαστών και η εξίσωση γράφεται:

$$6\cdot\frac{\lambda x-\mu}{3}+6\cdot\frac{1}{2}x=6\lambda-6\cdot\frac{x}{3}\Leftrightarrow 2(\lambda x-\mu)+3x=6\lambda-2x$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda x-2\mu+3x=6\lambda-2x\Leftrightarrow 2\lambda x+3x+2x=2\mu+6\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda x+5x=2\mu+6\lambda\Leftrightarrow (2\lambda+5)x=2\mu+6\lambda \qquad (1)$$

- Η (1) έχει ακριβώς μια λύση, όταν $2\lambda+5\neq 0$, δηλαδή $\lambda\neq-\frac{5}{2}$.

  Η λύση της τότε είναι η $x=\dfrac{2\mu+6\lambda}{2\lambda+5}$.

- Η (1) είναι αδύνατη, όταν $2\lambda+5=0$ και $2\mu+6\lambda\neq 0$, δηλαδή

$$\lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad 2\mu+6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad 2\mu-15\neq 0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \mu\neq\frac{15}{2}.$$

- Η (1) είναι ταυτότητα, όταν $2\lambda+5=0$ και $2\mu+6\lambda=0$, δηλαδή

$$\lambda=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \mu=\frac{15}{2}.$$

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3-x^2=x-1$ **β)** $x^3-3x^2-4x+12=0$ **γ)** $(x^2-4)^2=(x^2+4x+4)(5x+4)$

Λύση:

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

α) $x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=-1$.

β) $x^3-3x^2-4x+12=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-4(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=3$ *ή* $x=2$ *ή* $x=-2$.

γ) $[(x-2)(x+2)]^2=(x+2)^2(5x+4) \Leftrightarrow (x-2)^2(x+2)^2-(x+2)^2(5x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2\cdot[(x-2)^2-(5x+4)]=0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-4x+4-5x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2-9x)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2\cdot x(x-9)=0 \Leftrightarrow x=-2$ *ή* $x=0$ *ή* $x=9$.

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x$

β. $\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-4}{5}=2+\dfrac{3x-1}{15}$

γ. $\dfrac{7y+4}{5}-y=\dfrac{3y-5}{2}$

δ. $\dfrac{t-1}{7}+\dfrac{23-t}{5}=7-\dfrac{4+t}{4}$

ε. $\dfrac{1}{6}(8-\omega)+\omega-\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{2}(\omega+6)-\dfrac{\omega}{3}$

στ. $12-\left[\dfrac{3\upsilon+1}{4}+\dfrac{2\upsilon+1}{3}\right]=10-\dfrac{5\upsilon-1}{4}+\dfrac{\upsilon+5}{6}$

ζ. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3x-5}{2}-1\right]-\dfrac{4}{9}(2x-7)=\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{5}{3}(x-2)-3\right\}$

η. $(x+5)(x+4)-\dfrac{1}{2}(x-1)(x+2)-\dfrac{1}{2}(x-3)^2=0$

θ. $\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{4}(y+2)^2=\left[\dfrac{y-1}{2}\right]^2+\dfrac{5}{3}.$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. $\lambda x+\lambda+1=-x$

β. $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$

γ. $\lambda x+8x=2(\lambda-1)x+10$

δ. $\lambda^2(x-2)=x-2\lambda$

ε. $\dfrac{x+\lambda}{5}=\dfrac{\lambda x-1}{15}+\dfrac{\lambda^2-4\lambda+5}{3}$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με παραμέτρους α και β.

α. $\alpha x+\alpha=\beta x+\beta$

β. $\alpha^2x-\alpha=\beta^2x-\beta$

γ. $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{x}{\beta}=1\quad(\alpha\beta\neq 0)$

δ. $\alpha x-\dfrac{3x+2\alpha\beta}{3}=\dfrac{1}{2}-\beta$

ε. $\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{x}{\beta}=\alpha-\beta\quad(\alpha\beta\neq 0)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: Πιθανότητες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο: Πρόοδοι

6.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

Πείραμα τύχης

Αιτιοκρατικό πείραμα (ή προσδιορίσιμο) ονομάζεται ένα πείραμα που το αποτέλεσμά του είναι γνωστό πριν την εκτέλεση, ενώ **πείραμα τύχης** ονομάζεται εκείνο το πείραμα, που όσες φορές κι αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος και συμβολίζεται με Ω.

Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται με **N(Ω).**

Π.χ. **α)** Στη ρίψη ενός νομίσματος ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{\text{Κ}, \Gamma\} \quad \text{και} \quad N(\Omega) = 2.$$

β) Στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{και} \quad N(\Omega) = 6.$$

Ενδεχόμενα

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος.

Π.χ. αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ένα ενδεχόμενο του Ω είναι το σύνολο

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

- Αν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του, είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου Α του πειράματος, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο Α **πραγματοποιείται.** Τα στοιχεία του Α λέγονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του και το πλήθος τους συμβολίζεται με N(A).

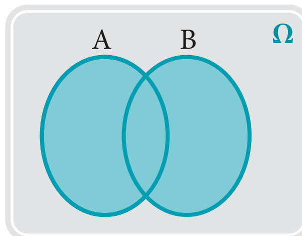
Π.χ. αν ρίξουμε ένα ζάρι και φέρουμε αποτέλεσμα 3, τότε το ενδεχόμενο $A = \{1, 3, 5\}$ πραγματοποιείται και είναι $N(A) = 3$.

- Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ενδεχόμενο του πειράματος (αφού $\Omega \subseteq \Omega$) και λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο.**

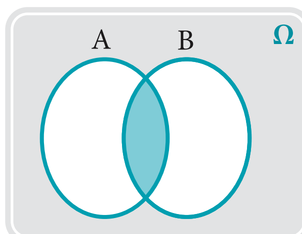
  Το κενό σύνολο ∅ είναι υποσύνολο του Ω και αφού δεν πραγματοποιείται ποτέ, ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο.**

Πράξεις ενδεχομένων

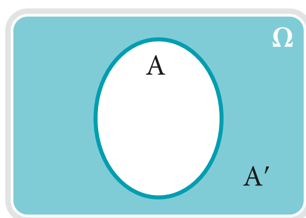
Ένωση δύο ενδεχομένων Α και Β ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cup B$ που πραγματοποιείται, όταν **πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β.**



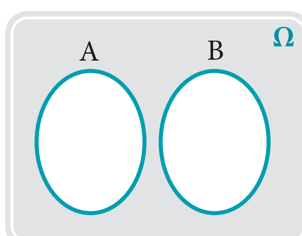
- **Τομή** δύο ενδεχομένων Α και Β ονομάζεται το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cap B}$ που πραγματοποιείται όταν **πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.**



- **Συμπλήρωμα** ή **αντίθετο** ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται το ενδεχόμενο **Α′** που πραγματοποιείται, όταν **δεν πραγματοποιείται το Α.**



- Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα,** όταν $\mathbf{A \cap B} = \varnothing$.



Παραδείγματα και εφαρμογές

1.

Να γράψετε το δειγματικό χώρο των παρακάτω πειραμάτων.

i) **Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές.**

ii) **Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές.**

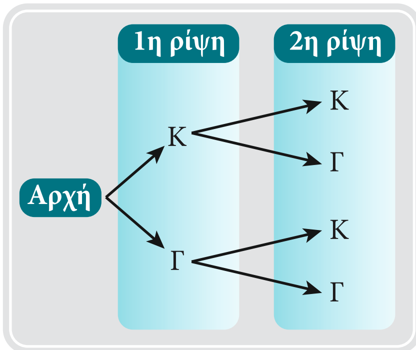
iii) **Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να φέρουμε γράμματα (Γ), αλλά το πολύ 4 φορές.**

iv) **Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.**

Λύση:

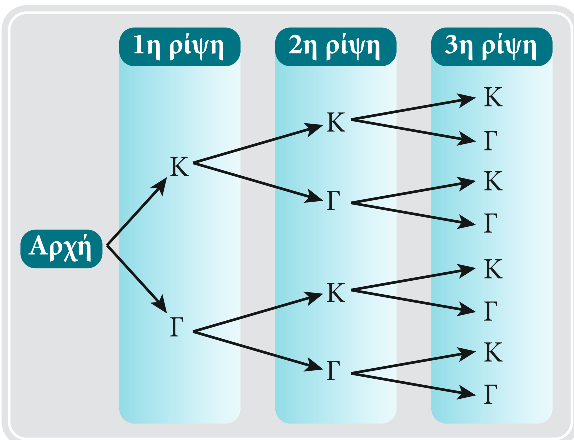
i) Κάθε νόμισμα έχει δύο όψεις, κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ). Τα διαδοχικά βήματα του πειράματος φαίνονται στο διπλανό **δενδροδιάγραμμα.**
Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$.



ii) Ομοίως έχουμε το διπλανό δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.



iii) $\Omega = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ\}$

iv) Αν π.χ. την πρώτη φορά φέρουμε 3 και τη δεύτερη 5, έχουμε ως αποτέλεσμα του πειράματος το ζεύγος (3,5). Στην περίπτωση αυτή δεν είναι πρακτικό να γίνει δενδροδιάγραμμα, αλλά μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα.

1η ρίψη	2η ρίψη					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$, δηλαδή

$\Omega = \{(\alpha, \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ με $1 \leq \alpha \leq 6$ και $1 \leq \beta \leq 6\}$.

2.

Έστω Α, Β και Γ τρία ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Πραγματοποιείται μόνο το Α.

ii) Πραγματοποιούνται τα Α, Β και όχι το Γ.

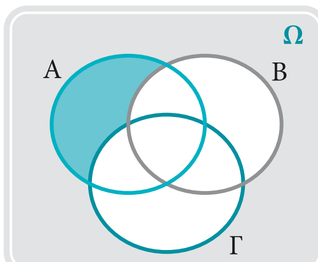
iii) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α, Β και Γ.

Λύση:

i) Μας ενδιαφέρει να πραγματοποιείται το Α και να μην πραγματοποιούνται τα Β και Γ.

Επομένως, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Α που είναι εκτός των Β και Γ. Στην περίπτωση αυτή πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α, Β′ και Γ′ (Α και όχι Β και όχι Γ).

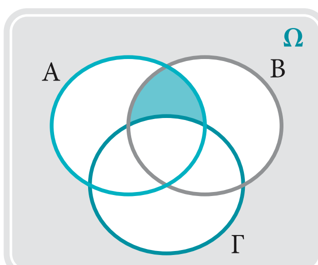
Άρα, συμβολικά το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι $A \cap B' \cap \Gamma'$.



ii) Μας ενδιαφέρει να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β, αλλά να μην πραγματοποιείται το Γ.

Επομένως, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του $A \cap B$ που είναι εκτός του Γ.

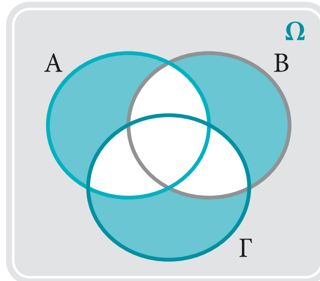
Συμβολικά το ενδεχόμενο αυτό είναι $A \cap B \cap \Gamma'$.



iii) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α, Β, Γ σημαίνει ότι πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β ή μόνο το Γ.

Επομένως, έχουμε το ενδεχόμενο

$$(Α\cap Β'\cap Γ')\cup(Β\cap Α'\cap Γ')\cup(Γ\cap Α'\cap Β').$$



3.

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $Ω = \{1, 2, 3, ..., 8, 9, 10\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $Α = \{x\inΩ$, όπου x πρώτος$\}$ και $Β = \{x\inΩ$, όπου x διαιρέτης του $10\}$.
Να προσδιοριστεί το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν

α) **Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β.**
β) **Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.**
γ) **Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.**
δ) **Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α και Β.**

Λύση:

$Α = \{2, 3, 5, 7\}$ και $Β = \{1, 2, 5, 10\}$.

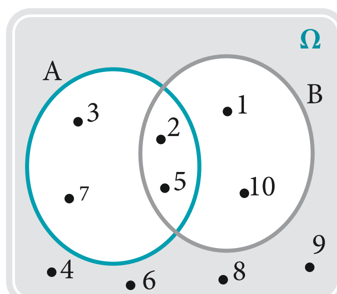
α) $Α\cup Β = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$.

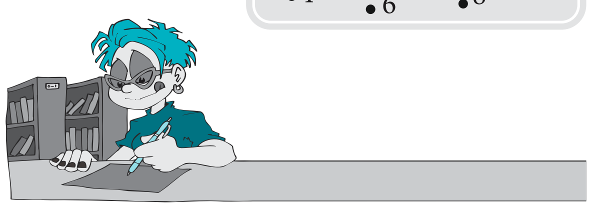
β) $Α\cap Β = \{2, 5\}$.

γ) $Α'\cap Β' = \{4, 6, 8, 9\}$.

δ) Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α και Β, σημαίνει ότι δεν πρέπει να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β. Επομένως, πρόκειται για το ενδεχόμενο

$$(Α\cap Β)' = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$





Κεντρική διάθεση:

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

www.ziti.gr

Αρμενοπούλου 27 • Θεσσαλονίκη 546 35

Τηλ.: 2310 203720 • Fax: 2310 211305 • e-mail: sales@ziti.gr