ΠΟΛΥΧΡΟΝΗ ΙΑΚ. ΞΕΝΙΚΑΚΗ
Επίκουρου Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Θεωρία
- Ασκήσεις

Β' έκδοση
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μέχρι το 4ο εξάμηνο σπουδών οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης διδάσκονται το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό για συναρτήσεις μιας και περισσοτέρων μεταβλητών. Στα μαθήματα αυτά η μελέτη περιορίζεται κυρίως στις συνεχείς, τις παραγωγίσιμες και τις συνεχείς ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις και δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στους υπολογισμούς και τις εφαρμογές παρά στη θεωρία.

Όμως οι παραπάνω κατηγορίες συναρτήσεων είναι μάλλον η εξαίρεση παρά ο κανόνας μέσα στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Γι' αυτό ένα μάθημα αυστηρά θεμελιωμένης πραγματικής Ανάλυσης είναι απαραίτητο για καθένα που σπουδάζει τα Μαθηματικά. Ένα τέτοιο μάθημα εκτός του ότι διδάσκει την αυστηρή μαθηματική σκέψη, δίνει γενικεύσεις γνωστών εννοιών πολλές από τις οποίες έδωσαν τεράστια ώθηση στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης και των εφαρμογών της, όπως π.χ. η έννοια του μέτρου και του ολοκληρώματος του Lebesgue.

Στο βιβλίο αυτό αναπτύσσονται διεξοδικά πολλά κεφάλαια της Πραγματικής Ανάλυσης, όπως οι μονότονες συναρτήσεις, οι συναρτήσεις πεͅρατωμένης μεταβολής, οι απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις, οι κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, οι ακολουθίες συναρτήσεων και το ολοκλήρωμα του Riemann. Κεντρική όμως θέση τόσο στο βιβλίο αυτό όσο και στο αντίστοιχο μάθημα των Πραγματικών Συναρτήσεων για το οποίο αποτελεί βοήθημα, κατέχουν τα κεφάλαια του μέτρου, των μετρητών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος του Lebesgue.

Για την εισαγωγή του ολοκληρώματος του Lebesgue χρησιμοποίησα τη μέθοδο των άνω και κάτω αθροισμάτων ενώ άφησα τη μέθοδο των απλών συναρτήσεων για το κατ' επιλογήν μάθημα "Θεωρία μέτρου και Ολοκλήρωσης" η ύλη του οποίου περιέχεται στο ομώνυμο βιβλίο μου που έχει κυκλοφορήσει ήδη από πενταετίας. Αυτό έγινε για το λόγο ότι η μέθοδος των αθροισμάτων είναι, κατά τη γνώμη μου, πιο εύληπτη από τους φοιτητές που διδάσκονται για πρώτη φορά το ολοκλήρωμα του Lebesgue και έχουν ως μοναδικό εφόδιο το ολοκλήρωμα του Riemann. Νομίζω ότι η ομοιότητα των ορισμών των *δύο ολοκληρωμάτων βοηθά πολύ περισσότερο το φοιτητή να κατανοήσει τη νέα έννοια, από τον ορισμό με τη χρήση των απλών συναρτήσεων που βρίσκεται στα όρια ενός μεταπτυχιακού μαθήματος.*

Η νέα αυτή έκδοση του βιβλίου διαφέρει σημαντικά της προηγουμένης. Διορθώθηκαν ορισμένες τυπογραφικές αβλεψίες και προστέθηκαν νέες παράγραφοι. Στο κεφάλαιο 6 προστέθηκε η §6.9.6 με το Κριτήριο των Cauchy-Maclaurin που συνδέει τη σύγκλιση αριθμητικών σειρών και μη γνησίων ολοκληρωμάτων και η §6.10 όπου δίνονται εναλλακτικοί ορισμοί του ολοκληρώματος του Riemann και αποδεικνύεται η ισοδυναμία τους. Στο κεφάλαιο 7 προστέθηκαν η §7.7 που περιέχει το σημαντικό θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass και η §7.8 με το θεώρημα των Arzela-Ascoli των ισοσυνεχών συναρτήσεων. Στο κεφάλαιο 8 προστέθηκε η §8.3.6 με μια συντομότερη απόδειξη του θεωρήματος του Lusin. Στο κεφάλαιο 9 προστέθηκε η §9.9.7 με ένα θεώρημα σχετικό με το βασικό θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. Τέλος προστέθηκε ολόκληρο το κεφάλαιο 10 στο οποίο αναπτύσσεται μια ακόμη γενίκευση του ολοκληρώματος του Riemann, το ολοκλήρωμα του Stieltjes. Εκεί γενικεύουμε τους 3 ορισμούς της §6.10. και παρατηρούμε με έκπληξη ότι τρεις ισοδύναμοι ορισμοί οδηγούν σε τρεις μη ισοδύναμες γενικεύσεις, δηλαδή σε τρία διαφορετικά ολοκληρώματα τύπου Stieltjes.

Κατεβλήθη προσπάθεια ώστε τα διάφορα αποτελέσματα να διατυπωθούν με τις λιγότερες (κατά το δυνατό) προϋποθέσεις.

Αρκετά παραδείγματα και άλυτες ασκήσεις πλαισιώνουν τα διάφορα κεφάλαια.

Εκτός όμως από τις ασκήσεις των διαφόρων κεφαλαίων υπάρχει στο τέλος του βιβλίου παράρτημα με 92 λυμένες ασκήσεις. Σε ορισμένες από τις λύσεις παραλείπονται κάποιες λεπτομέρειες. Αν ο αναγνώστης συμπληρώσει μόνος του τις λεπτομέρειες αυτές θα έχει από τις λυμένες αυτές ασκήσεις το μεγαλύτερο δυνατό όφελος.

Οι ασκήσεις των διαφόρων κεφαλαίων που σημειώνονται με το σημείο ● λύνονται πίσω στο παράρτημα όχι αναγκαστικά με την ίδια σειρά. Στο παράρτημα όμως υπάρχουν συχνά και άλλες ασκήσεις που δεν εμφανίζονται στα διάφορα κεφάλαια.

Τελειώνοντας θέλω να ευχαριστήσω και από τη θέση αυτή το τυπογραφείο της κ. Π. Ζήτη για την ωραία εμφάνιση του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη Ιανουάριος 1996 *Π. Ιακ. Ξενικάκης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4. *Μονότονες συναρτήσεις και συναρτήσεις περατωμένης μεταβολής*

5. *Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις*

6. *Το ολοκλήρωμα του Riemann*

7. *Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων*

Το ολοκλήρωμα του Stieltjes 10

10.1. Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 6 ορίσαμε και μελετήσαμε διεξοδικά το ολοκλήρωμα του *Riemann*. Οι διάφοροι ορισμοί βασίστηκαν σε πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} m_i l(I_i)\,, \quad \sum_{i=1}^{n} M_i l(I_i)$$

που είναι γνωστά ως αθροίσματα του *Darboux*. Οι αριθμοί $l(\mathrm{I_i})$ που εμφανίζονται ως παράγοντες των όρων των αθροισμάτων αυτών, είναι τα μήκη των διαστημάτων I_i και μπορούν να σημειωθούν επίσης με το συμβολισμό $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Αν στα παραπάνω αθροίσματα εισαγάγουμε τους αριθμούς $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ στη θέση των $l(I_i) = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όπου g μία περισσότερο ή λιγότερο αυθαίρετη συνάρτηση, παίρνουμε μια γενίκευση της κατασκευής του *Riemann* η οποία ανάγεται στην κατασκευή του γνωστού ολοκληρώματος του *Riemann* στην ειδική περίπτωση που έχουμε τη συνάρτηση $g(x)=x$.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα γενικότερα αθροίσματα μπορούμε να δώσουμε ορισμούς ανάλογους με εκείνους του ολοκληρώματος του *Riemann,* οι οποίοι οδηγούν σε γενικεύσεις γνωστές ως ολοκληρώματα του *Stieltjes*(1).

Στα ολοκληρώματα του *Stieltjes* μια συνάρτηση f που ονομάζεται *ολοκληρωτέα συνάρτηση,* ολοκληρώνεται ως προς μια άλλη συνάρτηση g που ονομάζεται *ολοκληρωτής*. Οι χρησιμοποιούμενοι συμβολισμοί $\int_a^b fdg$

(1) Ο Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) ήταν Ολλανδός μαθηματικός και αστρονόμος. Σπούδασε στο Παρίσι κοντά στον *Hermite* και έγινε καθηγητής στην Τουλούζη. Οι κυριότερες εργασίες του ήταν, ένα υπόμνημα στα συνεχή κλάσματα, το πρόβλημα των ροπών και το ολοκλήρωμα του *Stieltjes* που δημοσιεύθηκε τον τελευταίο χρόνο της σύντομης ζωής του.

και $\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dg(x)$ για τα ολοκληρώματα αυτά, τονίζουν αυτό ακριβώς το πράγμα.

Στο κεφάλαιο 6 είδαμε ότι το ολοκλήρωμα του *Riemann* μπορεί να οριστεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους που εκφράζονται με τους ορισμούς *(A), (B)* και *(C)*. Είναι όμως αξιοσημείωτο και απρόσμενο το γεγονός ότι ενώ οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι για το ολοκλήρωμα του *Riemann*, στη γενίκευση οδηγούν σε τρία διαφορετικά ολοκληρώματα τύπου *Stieltjes* τα οποία δεν απαιτούν τους ίδιους περιορισμούς για τις συναρτήσεις f και g. Όπως θα φανεί πιο κάτω, το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον ορισμό *(C)* είναι το πιο γενικό από τα τρία.

Αντίθετα απ' ότι έγινε στο κεφάλαιο 6, εδώ θα αρχίσουμε τη μελέτη μας με τον ορισμό *(B)* που βασίζεται σε διαιρέσεις και ενδιάμεσες διαιρέσεις.

10.2. Το ολοκλήρωμα του *Stieltjes*

10.2.1. Θεωρούμε δύο τυχαίες συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, b]$ και μία διαίρεση

$$D: \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

του διαστήματος $[\alpha, b]$. Σημειώνουμε με $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1, 2, \ldots, n$ τα διαστήματα της διαίρεσης D και για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$ εκλέγουμε ένα τυχόν σημείο $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Το σύνολο $P = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ ονομάζεται *ενδιάμεση διαίρεση* της D. Το άθροισμα

$$S(f, g, D, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i \tag{10.2.1α}$$

όπου $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ ονομάζεται *άθροισμα Stieltjes* (ή σύντομα S-άθροισμα) της f ως προς τη g που αντιστοιχεί στη διαίρεση D και την ενδιάμεση διαίρεση P.

Η ομοιότητα των αθροισμάτων (10.2.1α) με τα αθροίσματα *Riemann* που συναντήσαμε στον ορισμό *(B)* του ολοκληρώματος του *Riemann* (Κεφλ. 6 §6.10) και το θεώρημα 6.2.2. είναι φανερή. Το μόνο επιπλέον στοιχείο είναι η παρουσία της δεύτερης συνάρτησης g. Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος του *Stieltjes* τον οποίο θα ονομάσουμε ορισμό *(B)* για να θυμόμαστε την ομοιότητα με τον ορισμό *(B)* του ολοκληρώματος του *Riemann.*

Ορισμός (B). Λέμε ότι ο αριθμός I_B είναι το ολοκλήρωμα του *Stieltjes* της συνάρτησης f ως προς τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha, b]$ και η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$ ακριβώς τότε όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαίρεση D του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D να ισχύει

$$|S(f, g, D, P)-I_B| < \varepsilon \ .$$

Τον αριθμό I_B θα τον σημειώνουμε με το σύμβολο $\displaystyle (S)\!\!\int_\alpha^b fdg$.

Το γράμμα S στο σύμβολο του ολοκληρώματος μπαίνει για να διακρίνουμε το ολοκλήρωμα αυτό από το ολοκλήρωμα του *Riemann* καθώς και από τις άλλες δύο μορφές ολοκληρωμάτων που θα οριστούν πιο κάτω με τους ορισμούς *(A)* και *(C)*.

Όπως και στο ολοκλήρωμα του *Riemann* έτσι και εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό I_B ως το όριο των αθροισμάτων 10.2.1α και να γράψουμε

(10.2.1β) $$(S)\!\!\int_\alpha^b fdg = \lim_{\lambda(D)\to 0} S(f, g, D, P) \ .$$

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ του ορίου συνάρτησης και του ορίου της ισότητας (10.2.1β). Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα 10.2.1α δεν εξαρτώνται μόνο από τη διαίρεση D αλλά και από την αυθαίρετη ενδιάμεση διαίρεση P.

Γράφουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα ως όριο των αθροισμάτων, γιατί το όριο αυτό συμπεριφέρεται όπως το όριο συνάρτησης και μας δίνει τα επιθυμητά αποτελέσματα, εν γνώσει μας ότι δεν ταυτίζεται απόλυτα με το όριο συνάρτησης.

Οποτεδήποτε χρειαζόμαστε την ακριβή σημασία του ορίου της σχέσης (10.2.1β) πρέπει να ανατρέχουμε στο περιεχόμενο του ορισμού (B).

Τέλος ορίζουμε $\displaystyle (S)\!\!\int_b^\alpha fdg = -(S)\!\!\int_\alpha^b fdg$ και $\displaystyle (S)\!\!\int_\alpha^\alpha fdg = 0$ όταν $\alpha<b$.

10.2.2. Θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$ ακριβώς τότε όταν υπάρχει ένας αριθμός $I\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε ακολουθία διαιρέσεων $\{D_n\}$ του διαστήματος $[\alpha, b]$ με $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(D_n) = 0$ να είναι*

$$\lim_{n\to\infty} S(f, g, D_n, P_n) = I$$

οποιαδήποτε κι αν είναι η ενδιάμεση διαίρεση P_n της D_n.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. Τότε υπάρχει $I\in\mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει $\delta>0$ ώστε όταν $\lambda(D)<\delta$ και για οποιαδήποτε ενδιάμεση διαίρεση P της D να είναι

$$|S(f, g, D, P)-I| < \varepsilon . \tag{1}$$

Αν $\{D_n\}$ ακολουθία διαιρέσεων του $[\alpha, b]$ με $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(D_n) = 0$ και P_n ενδιάμεση διαίρεση της D_n, τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να είναι $\lambda(D_n) < \delta$ και χάρη στην (1) είναι $|S(f, g, D_n, P_n)-I| < \varepsilon$. Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, g, D_n, P_n) = I$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος αλλά ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει διαίρεση D_δ του $[\alpha, b]$ *με* $\lambda(D_\delta)<\delta$ και ενδιάμεση διαίρεση P_δ της D_δ ώστε να είναι

$$|S(f, g, D_\delta, P_\delta)-I| \geq \varepsilon_0 . \tag{2}$$

Αν θέσουμε $\delta = \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ τότε μπορούμε να εκλέξουμε ακολουθία διαιρέσεων $\{D_n\}$ με $\lambda(D_n) < \frac{1}{n}$ και ενδιάμεσες διαιρέσεις P_n της D_n ώστε, χάρη στη (2), να είναι

$$|S(f, g, D_n, P_n)-I| \geq \varepsilon_0 , \quad \forall\ n\in\mathbb{N} .$$

Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. ▲

10.2.3. Θα δώσουμε τώρα δύο απλά παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων του *Stieltjes* που είναι χρήσιμα για τα επόμενα.

Παράδειγμα 1. Ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση f και μια σταθερή συνάρτηση $g=k$. Ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, b]$. Για τυχαία διαίρεση D του $[\alpha, b]$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση P της D έχουμε,

$$S(f, g, D, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ [g(x_i)-g(x_{i-1})] = 0 .$$

Άρα προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς ένα σταθερό ολοκληρωτή και είναι

$$\int_{\alpha}^{b} f dk = 0 \ .$$

Παράδειγμα 2. Ας θεωρήσουμε τώρα μια σταθερή συνάρτηση $f=k$ στο διάστημα $[\alpha, b]$ και μια τυχαία συνάρτηση g στο ίδιο διάστημα. Για τυχαία διαίρεση D του $[\alpha, b]$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση P της D έχουμε

$$\begin{aligned} S(f, g, D, P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i)-g(x_{i-1})] = k \sum_{i=1}^{n} [g(x_i)-g(x_{i-1})] = \\ &= k[g(b)-g(\alpha)] \ . \end{aligned}$$

Άρα όλες οι σταθερές συναρτήσεις στο $[\alpha, b]$ είναι ολοκληρώσιμες κατά *Stieltjes* ως προς τυχαίο ολοκληρωτή και ισχύει $\int_{\alpha}^{b} k dg = k[g(b)-g(\alpha)]$.

Ειδικά για $k=1$ έχουμε

$$\int_{\alpha}^{b} dg = g(b)-g(\alpha) \ .$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπει η ιδιότητα

$$\int_{\alpha}^{b} k dg = k \int_{\alpha}^{b} dg$$

για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{R}$ και οποιαδήποτε συνάρτηση g ορισμένη στο $[\alpha, b]$.

10.3. Η σύγκλιση κατά *Cauchy*

Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, b]$ και ας θεωρήσουμε το σύνολο όλων των S-αθροισμάτων (βλ. 10.2.1α). Θα λέμε ότι το σύνολο των S-αθροισμάτων συγκλίνει κατά *Cauchy* ακριβώς τότε όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος διαιρέσεων D_1, D_2 του διαστήματος $[\alpha, b]$ με $\lambda(D_1)<\delta$ και $\lambda(D_2)<\delta$ και για οποιεσδήποτε ενδιάμεσες διαιρέσεις P_1, P_2 των D_1 και D_2 αντίστοιχα, να ισχύει

$$|S(f, g, D_1, P_1)-S(f, g, D_2, P_2)| < \varepsilon \ .$$

10.3.1. Θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς μια συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha, b]$ ακριβώς τότε όταν το σύνολο των αθροισμάτων $S(f, g, D, P)$ συγκλίνει κατά Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό (B), για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαίρεση D του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση P της D να έχουμε,

$$(1) \qquad \left| S(f, g, D, P) - \int_\alpha^b fdg \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Αν τώρα D_1, D_2 είναι τυχαίες διαιρέσεις με $\lambda(D_1)<\delta$ και $\lambda(D_2)<\delta$ και P_1, P_2 τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις των D_1 και D_2 αντίστοιχα, τότε χάρη στην (1) έχουμε

$$(2) \quad \left| S(f, g, D_1, P_1) - \int_\alpha^b fdg \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \left| S(f, g, D_2, P_2) - \int_\alpha^b fdg \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Συνεπώς συνδυάζοντας τις (2) έχουμε

$$|S(f, g, D_1, P_1) - S(f, g, D_2, P_2)| < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι το σύνολο των S - αθροισμάτων συγκλίνει κατά *Cauchy.*

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των S - αθροισμάτων συγκλίνει κατά *Cauchy*. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για τυχαίες διαιρέσεις D_1, D_2 με $\lambda(D_1)<\delta$, $\lambda(D_2)<\delta$ και τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις P_1, P_2 των D_1, D_2 αντίστοιχα, να είναι

$$(3) \qquad |S(f, g, D_1, P_1) - S(f, g, D_2, P_2)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία διαιρέσεων $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ όπου $x_i = \alpha + \dfrac{i(b-\alpha)}{n}$ και την ενδιάμεση ακολουθία $P_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ όπου $\xi_i = x_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{S(f, g, D_n, P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ως υποσύνολο του συνόλου των S - αθροισμάτων που συγκλίνει κατά *Cauchy*, είναι μια ακολουθία του *Cauchy* και επομένως (χάρη στην πληρότητα του $\mathbb{R}$) συγκλίνει σ' ένα πραγματικό αριθμό L. Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι

$$(4) \qquad |S(f, g, D_n, P_n) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Ας πάρουμε τώρα $\delta' = min\left\{\delta, \dfrac{1}{n_0}, \dfrac{b-\alpha}{n_0}\right\}$ και ας θεωρήσουμε $n > \dfrac{1}{\delta'}$. Τότε είναι $n>n_0$ και συνεπώς για τα D_n, P_n ισχύει η (4).

Επιπλέον $\lambda(D_n) = \frac{1}{n} < \delta'$.

Αν τώρα D τυχαία διαίρεση του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta'$ και P τυχαία ενδιάμεση διαίρεση της D, τότε για τις D, D_n και τις P, P_n ισχύει (επειδή $\delta'<\delta$) η (3). Δηλαδή

$$|S(f, g, D, P)-S(f, g, D_n, P_n)| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{5}$$

Αν συνδυάσουμε την (5) με την (4) παίρνουμε

$$|S(f, g, D, P)-L| < \varepsilon$$

για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta'$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D. Άρα σύμφωνα με τον ορισμό *(B)* η f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. ▲

10.4. Ορισμένες συνθήκες που συνεπάγονται την ύπαρξη του ολοκληρώματος του Stieltjes

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε δύο θεωρήματα, όπου κάποιες απλές συνθήκες στην ολοκληρωτέα συνάρτηση και τον ολοκληρωτή συνεπάγονται την ύπαρξη του ολοκληρώματος του *Stieltjes.*

10.4.1. **Θεώρημα.** *Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και g αύξουσα συνάρτηση στο $[\alpha, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[\alpha, b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό. Έτσι δοθέντος $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $\xi', \xi''\in[\alpha, b]$ για τα οποία είναι $|\xi'-\xi''| < \delta$ να ισχύει

$$|f(\xi')-f(\xi'')| < \varepsilon \quad .$$

Ας είναι τώρα D', D'' οι παρακάτω τυχαίες διαιρέσεις του $[\alpha, b]$

$$D' : \alpha = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_n = b$$
$$D'' : \alpha = x''_0 < x''_1 < \ldots < x''_m = b$$

με λεπτότητα μικρότερη του δ, και

$$P' = \{\xi'_1, \xi'_2 , \ldots, \xi'_n\} \quad P'' = \{\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_m\}$$

τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις των D' και D'' αντίστοιχα. Θεωρούμε τη διαίρεση

$$D''' : \alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_\nu = b$$

όπου $D''' = D' \cup D''$ και $P''' = \{t_1, t_2, \ldots, t_\nu\}$ τυχαία ενδιάμεση διαίρεση της D'''. Τα αθροίσματα *Stieltjes* των D' και D''

$$S(f, g, D', P') = \sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)\,\big(g(x'_i)-g(x'_{i-1})\big),$$

και

$$S(f, g, D'', P'') = \sum_{k=1}^{m} f(\xi''_k)\big(g(x''_k)-g(x''_{k-1})\big)$$

μπορούν, με διαδοχικές προσθαφαιρέσεις μέσα στις παρενθέσεις του β′ μέλους, να μετασχηματιστούν ώστε να περιέχουν όλα τα σημεία της διαίρεσης D'''. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$(1)\qquad \begin{aligned} S(f, g, D', P') &= \sum_{j=1}^{\nu} f(\xi^1_j)\,\big(g(y_j)-g(y_{j-1})\big) \\ S(f, g, D'', P'') &= \sum_{j=1}^{\nu} f(\xi^2_j)\,\big(g(y_j)-g(y_{j-1})\big) \end{aligned}$$

όπου το ξ^1_j είναι ένα από τα ξ'_i και το ξ^2_j *είναι ένα από τα* ξ''_k, $j=1, 2, \ldots, \nu$ και όπου γίνονται οι απαιτούμενες επαναλήψεις.

Το αντίστοιχο S - άθροισμα για την D''' και την ενδιάμεση διαίρεση P''' είναι

$$(2)\qquad S(f, g, D''', P''') = \sum_{j=1}^{\nu} f(t_j)\,\big(g(y_j)-g(y_{j-1})\big)\ .$$

Από τις (1) και (2) έχουμε χάρη στην ομοιόμορφη συνέχεια,

$$(3)\qquad |S(f, g, D', P)-S(f, g, D''', P''')| \le \sum_{j=1}^{\nu} |f(\xi^1_j)-f(t_j)|\,\big(g(y_j)-g(y_{j-1})\big) < \\ < \varepsilon[g(b)-g(\alpha)]$$

και

$$(4)\qquad |S(f, g, D'', P'')-S(f, g, D''', P''')| \le \sum_{j=1}^{\nu} |f(\xi^2_j)-f(t_j)|\,\big(g(y_j)-g(y_{j-1})\big) < \\ < \varepsilon\,[g(b)-g(\alpha)]\,.$$

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) παίρνουμε

$$|S(f, g, D', P') - S(f, g, D'', P'')| < 2\varepsilon[g(b) - g(\alpha)]$$

δηλαδή το σύνολο των S - αθροισμάτων συγκλίνει κατά *Cauchy*. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα της §10.3.1 το $\int_\alpha^b fdg$ υπάρχει. ▲

Παράδειγμα 1. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι συνεχής και η $g(x)=x^2$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 xdx^2$ υπάρχει σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Για τον υπολογισμό του θεωρούμε την ακολουθία διαιρέσεων $\{D_n\}$ όπου,

$$D_n: 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1$$

της οποίας τα διαστήματα είναι $\left[\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n}\right]$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, και την ενδιάμεση ακολουθία διαιρέσεων $\{P_n\}$ όπου $P_n = \left\{\frac{\nu}{n} : \nu=1, 2, \ldots, n\right\}$. Δηλαδή η P_n αποτελείται από τα δεξιά άκρα των διαστημάτων της D_n. Έχουμε,

$$\begin{aligned} S(x, x^2, D_n, P_n) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{n}\left(\frac{\nu^2}{n^2} - \frac{(\nu-1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu^2 - \nu) \\ &= \frac{1}{n^3}\left[2 \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 - \sum_{\nu=1}^{n} \nu\right] = \frac{1}{n^3}\left[\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2} . \end{aligned}$$

Συνεπώς $\int_0^1 xdx^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2} = \frac{2}{3}$.

Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, b]$ είναι ολοκληρώσιμη κατά *Riemann* στο $[\alpha, b]$. Επειδή ένα ολοκλήρωμα *Riemann* μπορεί να θεωρηθεί ως ολοκλήρωμα *Stieltjes* ως προς τη συνάρτηση $g(x)=x$, μπορεί κανείς να διερωτηθεί αν μια συνεχής συνάρτηση έχει ολοκλήρωμα κατά *Stieltjes* ως προς οποιοδήποτε συνεχή ολοκληρωτή. Είναι ίσως εκπληκτικό ότι αυτό δεν ισχύει όπως μας δείχνει το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2. Ας θεωρήσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[0, 1]$ με τη σχέση

$$f(x) = g(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu\,\frac{1}{x} \quad \text{όταν} \quad x \neq 0 \ \text{ και } \ f(0)=g(0)=0\,.$$

Ας θεωρήσουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τη διαίρεση D_1 και την ενδιάμεση διαίρεση P_1, όπου

$$D_1 = \left\{0,\ \frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\} \quad \text{και} \quad P_1 = \left\{\frac{1}{2n\pi}\ ,\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}\ .$$

Η λεπτότητα της D_1 είναι $\lambda(D_1) = \dfrac{1}{n}$ και επειδή $g(0) = g(1/2n\pi) = 0$ το αντίστοιχο S - άθροισμα είναι

$$S(f, g, D_1, P_1) = \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\left[g\left(\frac{\nu}{n}\right) - g\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\right]\ .$$

Θεωρούμε τώρα, πάλι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μια δεύτερη διαίρεση D_2 και μια αντίστοιχη ενδιάμεση διαίρεση P_2 όπου η D_2 προκύπτει από την D_1 με περαιτέρω διαίρεση του πρώτου διαστήματός της.

$$D_2 = \left\{0,\ \frac{2}{(8n+1)\pi}\ ,\ \frac{2}{8n\pi}\ ,\ \frac{2}{(8n-1)\pi}\ ,\ \ldots, \frac{2}{(4n+1)\pi}, \frac{2}{4n\pi}\ ,\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n},\ \ldots,\ 1\right\}$$

$$P_2 = \left\{\frac{2}{(8n+1)\pi}\ ,\ \frac{2}{8n\pi}\ ,\ \frac{2}{(8n-1)\pi}\ ,\ \ldots,\ \frac{2}{(4n+1)\pi}\ ,\ \frac{2}{4n\pi}\ ,\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ 1\right\}\ .$$

Επειδή $g(0) = g\left(\dfrac{2}{4n\pi}\right) = g\left(\dfrac{2}{(8n+2)\pi}\right) = 0\,,$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$S(f, g, D_2, P_2) - S(f, g, D_1, P_1) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{4n+1} f\left(\frac{2}{(4n+\nu)\pi}\right)\left[g\left(\frac{2}{(4n+\nu)\pi}\right) - g\left(\frac{2}{(4n+\nu+1)\pi}\right)\right]\ .$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η διαφορά των αθροισμάτων του *Stieltjes* εξαρτάται μόνο από όρους που προκύπτουν από την υποδιαίρεση του πρώτου τμήματος της D_1, ενώ όλοι οι άλλοι όροι φεύγουν κατά την αφαίρεση.

Επειδή $f\left(\dfrac{2}{2p\pi}\right) = g\left(\dfrac{2}{2p\pi}\right) = 0$ για κάθε ακέραιο p και επειδή εξ ορισμού είναι $f(x)=g(x)$ για κάθε x, το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας απλοποιείται και παίρνουμε

$$S(f, g, D_2, P_2) - S(f, g, D_1, P_1) = \sum_{p=0}^{2n} \left[f\left(\frac{2}{(4n+2p+1)\pi} \right) \right]^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{2n} \frac{1}{4n+2p+1} \geq \frac{2}{\pi} \frac{2n+1}{8n+1} > \frac{1}{2\pi}$$

για κάθε n. Έτσι το σύνολο των αθροισμάτων *Stieltjes* δεν συγκλίνει κατά *Cauchy* και συνεπώς το $\int_0^1 f dg$ δεν υπάρχει.

10.4.2. Το επομένο θεώρημα μας λέει ότι ένα ολοκλήρωμα τύπου *Stieltjes* ανάγεται κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις σε ολοκλήρωμα του *Riemann.*

Θεώρημα. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[\alpha, b]$ και η g έχει συνεχή παράγωγο g' στο ίδιο διάστημα, τότε τα ολοκληρώματα $\int_\alpha^b fg'$ και $\int_\alpha^b f dg$ υπάρχουν και είναι ίσα.*

Απόδειξη. Επειδή η παράγωγος g' είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[\alpha, b]$ δοθέντος $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $\xi, \xi^* \in [\alpha, b]$ να ισχύει

(1) $$|g'(\xi) - g'(\xi^*)| < \varepsilon \quad \text{όταν} \quad |\xi - \xi^*| < \delta_1 .$$

Εξάλλου επειδή οι συναρτήσεις f, g' είναι ολοκληρώσιμες κατά *Riemann* στο $[\alpha, b]$, το γινόμενο fg' είναι επίσης ολοκληρώσιμη κατά *Riemann* στο $[\alpha, b]$. Άρα για το παραπάνω ε υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta_2$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D να είναι

(2) $$\left| S(fg', D, P) - \int_\alpha^b fg' \right| < \varepsilon \quad .$$

Αν $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ τότε οι (1) και (2) ισχύουν αν τα δ_1, δ_2 αντικατασταθούν με το δ.

Ας θεωρήσουμε τώρα τυχαία διαίρεση $D = \{\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b\}$ με $\lambda(D)<\delta$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση $P = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ της D. Τότε το άθροισμα *Stieltjes* και το άθροισμα *Riemann* που αντιστοιχούν στη D και την ενδιάμεση διαίρεση P είναι αντίστοιχα,

(3) $$S(f, g, D, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left(g(x_i) - g(x_{i-1}) \right)$$

και

(4) $$S(fg', D, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\, (x_i - x_{i-1}) \ .$$

Χάρη στο θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, σε κάθε διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ της D υπάρχει ένα σημείο ξ_i^* ώστε να είναι

(5) $$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i^*)\, (x_i - x_{i-1}) \ .$$

Η (3) χάρη στην (5) γίνεται:

(6) $$S(f, g, D, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i^*)\, (x_i - x_{i-1}) \ .$$

Από τις (4) και (6) προκύπτει ότι για κάθε διαίρεση D του διαστήματος $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D ισχύει,

(7) $$|S(f, g, D, P) - S(fg', D, P)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\, |g'(\xi_i) - g'(\xi_i^*)|\, (x_i - x_{i-1}) \leq M(b-\alpha)\varepsilon$$

Από τις (2) και (7) προκύπτει ότι για κάθε διαίρεση D του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D ισχύει

$$\left| S(f, g, D, P) - \int_\alpha^b fg' \right| < [M(b-\alpha)+1]\varepsilon \ .$$

Από την ανισότητα αυτή έπεται ότι το ολοκλήρωμα *Stieltjes* $\int_\alpha^b fdg$ υπάρχει και είναι ίσο με το ολοκλήρωμα *Riemann* $\int_\alpha^b fg'$. ▲

10.5. Ιδιότητες του ολοκληρώματος του Stieltjes

Τα δύο πρώτα θεωρήματα της παραγράφου αυτής αποδεικνύουν ότι το ολοκλήρωμα του *Stieltjes* είναι γραμμική συνάρτηση και ως προς την ολοκληρωτέα συνάρτηση και ως προς τον ολοκληρωτή. Είναι δηλαδή, όπως λέμε, μια διγραμμική συνάρτηση.

10.5.1. **Θεώρημα.** *Αν οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ολοκληρώσιμες κατά Stieltjes ως προς τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha, b]$, τότε για κάθε ζεύγος σταθερών k_1, k_2 η συνάρτηση $k_1f_1+k_2f_2$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο $[\alpha, b]$ και ισχύει*

$$\int_{\alpha}^{b}(k_1f_1+k_2f_2)dg = k_1 \int_{\alpha}^{b} f_1dg+ k_2 \int_{\alpha}^{b} f_2dg \quad .$$

Απόδειξη: Αν $D = \{\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b\}$ είναι τυχαία διαίρεση του $[\alpha, b]$ και $P = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ τυχαία ενδιάμεση διαίρεση της D τότε είναι, όπως εύκολα διαπιστώνεται,

$$S(k_1f_1+k_2f_2, g, D, P) = k_1S(f_1, g, D, P)+k_2S(f_2, g, D, P) \ .$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια των δύο αθροισμάτων του δεξιού μέλους της παραπάνω ισότητας, έπεται ότι υπάρχει και το όριο του δεξιού μέλους. Έτσι παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών της ισότητας αυτής, έχουμε το αποτέλεσμα. ▲

10.5.2. **Θεώρημα.** *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς κάθε μια από τις συναρτήσεις g_1 και g_2 στο διάστημα $[\alpha, b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και ως προς τη συνάρτηση $k_1g_1+k_2g_2$, όπου k_1, k_2 σταθερές, και επιπλέον ισχύει*

$$\int_{\alpha}^{b} fd[k_1g_1+k_2g_2] = k_1 \int_{\alpha}^{b} fdg_1+k_2 \int_{\alpha}^{b} fdg_2 \quad .$$

Απόδειξη. Για τυχαία διαίρεση $D = \{\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b\}$ του διαστήματος $[\alpha, b]$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση P της D έχουμε την ισότητα,

$$S(f, k_1g_1+k_2g_2, D, P) = k_1S(f, g_1, D, P)+k_2S(f, g_2, D, P) \ .$$

Παίρνοντας όρια στην ισότητα αυτή έχουμε το αποτέλεσμα. ▲

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση g είναι περατωμένης μεταβολής στο $[\alpha, b]$ ακριβώς τότε όταν $g = g_1-g_2$ όπου g_1, g_2 είναι αύξουσες συναρτήσεις. Αν λοιπόν η g είναι συνάρτηση περατωμένης μεταβολής στο $[\alpha, b]$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα της §10.4.1. τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{b} fdg_1$ και $\int_{\alpha}^{b} fdg_2$ υπάρχουν αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$. Συνεπώς, χάρη στο θεώρημα 10.5.2, κάθε συνεχής συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* στο $[\alpha, b]$ ως προς μια συνάρτηση g περατωμένης μεταβολής.

10.5.3. Είναι γνωστό ότι η ολοκληρωσιμότητα κατά *Riemann* μιας συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha, b]$ συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα της στα υποδιαστήματα $[\alpha, c]$ και $[c, d]$ και αντίστροφα, όπου $\alpha<c<b$. Μάλιστα

ισχύει στην περίπτωση αυτή η απλή γραμμική σχέση του θεωρήματος της §6.3.3.

Το θεώρημα αυτό ισχύει μερικώς μόνο για το ολοκλήρωμα του *Stieltjes.*

Θεώρημα. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$ και αν $\alpha<c<b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς τη g σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, c]$ και $[c, b]$ και ισχύει,*

$$\int_\alpha^b fdg = \int_\alpha^c fdg + \int_c^b fdg \ .$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$, χάρη στο θεώρημα της §10.3.1, το σύνολο των S-αθροισμάτων συγκλίνει κατά *Cauchy*. Άρα δοθέντος $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει

$$(1) \qquad |S(f, g, D, P)-S(f, g, D^*, P^*)| < \varepsilon$$

για οποιεσδήποτε διαιρέσεις D, D^* με $\lambda(D)<\delta$ και $\lambda(D^*)<\delta$ και οποιεσδήποτε ενδιάμεσες διαιρέσεις P, P^* των D και D^* αντίστοιχα.

Ας είναι τώρα D_1, D_1^* δύο τυχαίες διαιρέσεις του $[\alpha, c]$ με $\lambda(D_1)<\delta$ και $\lambda(D_1^*)<\delta$ και P_1, P_1^* ενδιάμεσες διαιρέσεις αυτών αντίστοιχα. Επιπλέον, ας είναι D_2 μια διαίρεση του $[c, b]$ τέτοια ώστε $\lambda(D_2) < \lambda(D_1)$ και $\lambda(D_2) < \lambda(D_1^*)$ και P_2 ενδιάμεση διαίρεση της D_2.

Προφανώς η $D = D_1 \cup D_2$ και $D^* = D_1^* \cup D_2$ είναι διαιρέσεις του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D) = \lambda(D_1) < \delta$ και $\lambda(D^*) = \lambda(D_1^*) < \delta$.

Επίσης η $P = P_1 \cup P_2$ είναι ενδιάμεση διαίρεση της D και η $P^* = P_1^* \cup P_2$ είναι ενδιάμεση διαίρεση της D^*.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι:

$$(2) \qquad \begin{aligned} S(f, g, D, P) &= S(f, g, D_1, P_1)+S(f, g, D_2, P_2) \\ S(f, g, D^*, P^*) &= S(f, g, D_1^*, P_1^*)+S(f, g, D_2, P_2) \end{aligned}$$

Άρα $\quad S(f, g, D, P)-S(f, g, D^*, P^*) = S(f, g, D_1, P_1)-S(f, g, D_1^*, P_1^*)$

και επειδή $\lambda(D)<\delta$ και $\lambda(D^*)<\delta$ το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας ικανοποιεί την (1) και επομένως

$$|S(f, g, D_1, P_1)-S(f, g, D_1^*, P_1^*)| < \varepsilon \ .$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι το σύνολο των S-αθροισμάτων της f ως προς τη g στο $[\alpha, c]$ συγκλίνει κατά *Cauchy* και άρα το $\int_\alpha^c fdg$ υπάρχει. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το $\int_c^b fdg$ υπάρχει.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια ακολουθία διαιρέσεων $\{D'_n\}$ του διαστήματος $[\alpha, c]$ και μια ακολουθία διαιρέσεων $\{D''_n\}$ του διαστήματος $[c, b]$ καθώς και τυχαίες ενδιάμεσες ακολουθίες $\{P'_n\}$ και $\{P''_n\}$ των $\{D'_n\}$ και $\{D''_n\}$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty}\lambda(D'_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda(D''_n) = 0$. Αν $D_n = D'_n \cup D''_n$ και $P_n = P'_n \cup P''_n$ τότε προφανώς $\lim_{n\to\infty} \lambda(D_n) = 0$ και η P_n είναι ενδιάμεση διαίρεση της D_n. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$S(f, g, D_n, P_n) = S(f, g, D'_n, P'_n) + S(f, g, D''_n, P''_n) \ . \tag{3}$$

Επειδή υπάρχουν τα ολοκληρώματα της f ως προς τη g στα διαστήματα $[\alpha, b]$, $[\alpha, c]$ και $[c, d]$ παίρνοντας τα όρια των δύο μελών της (3) έχουμε, χάρη στο θεώρημα της §10.2.2., την αποδεικτέα ισότητα. ▲

Πόρισμα. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$ και $[c, d] \subset [\alpha, b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο $[c, d]$.*

Αντίθετα με ότι συμβαίνει στο ολοκλήρωμα του *Riemann* η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων $\int_\alpha^c f dg$ *και* $\int_c^b f dg$ δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του $\int_\alpha^b f dg$ όπως μας δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο διάστημα $[0, 2]$ με τις σχέσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{αν } 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{αν } 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

Επειδή η g είναι σταθερή στο $[0, 1]$, χάρη στο παράδειγμα 1 της §10.2.3 το $\int_0^1 f dg$ υπάρχει και η τιμή του είναι 0.

Επίσης η f είναι σταθερή στο $[1, 2]$ και χάρη στο παράδειγμα 2 της §10.2.3. το $\int_1^2 f dg$ υπάρχει και η τιμή του είναι $g(2) - g(1) = 1$.

Θα μελετήσουμε τώρα την ύπαρξη του $\int_0^2 f dg$. Ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε διαίρεση $D = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = 2\}$ του διαστήματος $[0, 2]$ που δεν περιέχει το σημείο 1. Τότε υπάρχει $\nu\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $x_{\nu-1}<1<x_\nu$. Έστω τώρα η ενδιάμεση διαίρεση $P=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ της D όπου $\xi_i=x_{i-1}$ $i=1, 2, \ldots, n$. Τότε $g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})=1$ και $g(x_i)-g(x_{i-1})=0$ για $i\neq\nu$. Το S-άθροισμα που αντιστοιχεί στις D και P είναι $S(f, g, D, P)=0$. Παίρνοντας τώρα ως ενδιάμεση διαίρεση την $P^*=\{\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*\}$ όπου $\xi_i^*=x_i$ έχουμε $S(f, g, D, P^*)=1$. Έτσι οσοδήποτε μικρή κι αν είναι η λεπτότητα της D θα έχουμε $|S(f, g, D, P)-S(f, g, D, P^*)|=1$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των αθροισμάτων του *Stieltjes* δεν συγκλίνει κατά *Cauchy* και χάρη στο θεώρημα της §10.3.1 το $\int_0^2 fdg$ δεν υπάρχει.

Παρακάτω θα δούμε ότι η μη ύπαρξη του $\int_0^2 fdg$ οφείλεται στην ύπαρξη κοινού σημείου ασυνέχειας των f και g.

10.6. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Στο ολοκλήρωμα του *Stieltjes* ισχύει ένα θεώρημα που θυμίζει τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο γιατί εναλλάσσει το ρόλο της ολοκληρωτέας συνάρτησης και του ολοκληρωτή.

10.6.1. **Θεώρημα.** *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο διάστημα $[\alpha, b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την f στο $[\alpha, b]$ και ισχύει*

$$\int_\alpha^b fdg = f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_\alpha^b gdf\ .$$

Απόδειξη. Ας είναι $D=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μια διαίρεση του διαστήματος $[\alpha, b]$ και $P=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ μια ενδιάμεση διαίρεση της D. Θέτουμε $\xi_0=\alpha$ και $\xi_{n+1}=b$ και θεωρούμε το σύνολο $P^*=P\cup\{\xi_0, \xi_{n+1}\}$. Τότε το P^* αποτελεί μια διαίρεση του $[\alpha, b]$. (Στην πραγματικότητα το P^* δεν είναι πάντα διαίρεση γιατί είναι δυνατό κάποια διαδοχικά σημεία του να ταυτίζονται. Σε μια τέτοια περίπτωση παραλείπουμε τις επαναλήψεις. Εύκολα διαπιστώνεται τότε ότι η απόδειξη δεν βλάπτεται από τις παραλήψεις αυτές, γιατί διαδοχικά ταυτιζόμενα σημεία δημιουργούν εκφυλισμένα διαστήματα που δίνουν μηδενικούς όρους στα αντίστοιχα αθροίσματα).

Ισχύει $\xi_{i-1}\le x_{i-1}\le\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n+1$. Άρα η P^* μπορεί να θεωρηθεί ως διαίρεση του $[\alpha, b]$ και η D ως ενδιάμεση διαίρεση της P^*. Τα αθροίσματα $S(f, g, P^*, D)$ και $S(g, f, D, P)$ συνδέονται με τη σχέση

Άσκηση 71. *Έστω* g *αύξουσα συνάρτηση στο* $[\alpha, b]$. *Δείξτε ότι αν ισχύει μία από τις παρακάτω υποθέσεις*

(i) Η f *είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη* g.

(ii) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ *ώστε* $|S(f, g, D, P)-S(f, g, D, P^*)| < \varepsilon$

για κάθε διαίρεση D *με* $\lambda(D)<\delta$ *και τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις* P, P^* *της* D.

Τότε υπάρχει $\delta_0>0$ *και φραγμένη συνάρτηση* h *στο* $[\alpha, b]$ *ώστε να ισχύουν*

(1) $$S(f, g, D, P) = S(h, g, D, P)$$

(2) $$S(|f|, g, D, P) = S(|h|, g, D, P)$$

(3) $$S(f^2, g, D, P) = S(h^2, g, D, P)$$

για κάθε διαίρεση D *με* $\lambda(D)<\delta_0$ *και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση* P *της* D.

Λύση. Χάρη στο θεώρημα της §10.3.1. η υπόθεση *(i)* συνεπάγεται τη *(ii)*. Συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι η υπόθεση *(ii)* συνεπάγεται το συμπέρασμα.

Αν ισχύει η υπόθεση *(ii)* τότε υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta_1$ και για οποιεσδήποτε ενδιάμεσες διαιρέσεις P και P^* της D να είναι

(4) $$|S(f, g, D, P)-S(f, g, D, P^*)| < 1\ .$$

Ας σημειώσουμε με Α το σύνολο των σημείων $x\in[\alpha, b]$ για τα οποία δεν υπάρχει περιοχή επί της οποίας η f να είναι φραγμένη. Αν η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, b]$ τότε προφανώς $A=\varnothing$. Όμως τότε μπορούμε να θέσουμε $h=f$ και το συμπέρασμα ισχύει.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha, b]$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x\in A$.

Διαφορετικά $\forall\ x\in[\alpha, b]$ θα υπήρχε ανοικτή περιοχή του x όπου η f θα ήταν φραγμένη. Επειδή το $[\alpha, b]$ είναι συμπαγές, θα υπήρχαν πεπερασμένου πλήθους τέτοιες περιοχές που θα εκάλυπταν το $[\alpha, b]$, και τότε η f θα ήταν φραγμένη στο $[\alpha, b]$.

Έστω $c\in A\cap(\alpha, b)$ και ας υποθέσουμε ότι η g δεν είναι σταθερή στην περιοχή $\Pi\left(c, \frac{\delta_1}{2}\right)\cap[\alpha, b]$.

Τότε υπάρχουν σημεία $s, t\in[\alpha, b]$ με $c-\frac{\delta_1}{2} < s < c < t < c+\frac{\delta_1}{2}$ τέτοια ώστε $g(s)\neq g(t)$. Διαφορετικά, λόγω της μονοτονίας, θα ήταν σταθερή στην περιοχή αυτή. Στο διάστημα $[s, t]$ η f δεν είναι φραγμένη.

Αν δεν είναι φραγμένη από πάνω τότε υπάρχει $c^*\in[s,\ t]$ ώστε να είναι

$$f(c^*) > f(c)+1/|g(t)-g(s)| \ .$$

Αν δεν είναι φραγμένη από κάτω το c^* μπορεί να εκλεγεί τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(c^*) < f(c)-1/|g(t)-g(s)| \ .$$

Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές ισχύει

(5) $$|f(c^*)-f(c)|\,|g(t)-g(s)| > 1 \ .$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια διαίρεση D του $[\alpha,\ b]$ που περιέχει τα σημεία s, t ως διαδοχικά σημεία και $\lambda(D) < \delta_1$ και ας θεωρήσουμε δύο ενδιάμεσες διαιρέσεις της D, την P που έχει ως επιλεγόμενο σημείο του διαστήματος $[s,\ t]$ το c και την P^* που έχει τα ίδια σημεία με την P εκτός του c που το αντικαθιστούμε με το c^*. Τότε έχουμε

(6) $$|S(f,\ g,\ D,\ P)-S(f,\ g,\ D,\ P^*)| = |f(c)-f(c^*)|\,|g(t)-g(s)| > 1$$

χάρη στην (5). Η (6) έρχεται σε αντίφαση με την (4).

Συνεπώς η g είναι αναγκαστικά σταθερή στην περιοχή $\Pi\left(c,\ \dfrac{\delta_1}{2}\right)\cap[\alpha,\ b]$ διαφορετικά δεν μπορεί να ισχύει η (4) και συνεπώς η υπόθεση *(ii)*.

Ελαφρά τροποποίηση της απόδειξης αυτής δίνει το ίδιο συμπέρασμα όταν $c=\alpha$ ή $c=b$.

Επομένως αν ισχύει η υπόθεση *(ii)*, τότε η g είναι σταθερή σε κατάλληλη περιοχή κάθε σημείου $x\in A$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο $B = \bigcup\limits_{c\in A} \Pi(c,\ \delta_1/4)$.

Το B είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το A. Στο συμπαγές σύνολο $\complement B\cap[\alpha,\ b]$, η f είναι φραγμένη χάρη στο θεώρημα των *Heine-Borel.*

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \alpha\nu \quad x\in \complement B\cap[\alpha,\ b] \\ 0 & \alpha\nu \quad x\in B\cap[\alpha,\ b] \end{cases} \ .$$

Έστω τώρα τυχαία διαίρεση $D = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ του $[\alpha,\ b]$ με $\lambda(D) < \dfrac{\delta_1}{4} = \delta_0$ και $P = \{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\}$ τυχαία ενδιάμεση διαίρεση της D.

Έχουμε,

$$(7)\quad S(|f|, g, D, P)-S(|h|, g, D, P) = \sum_{\nu=1}^{n} [|f(\xi_\nu)|-|h(\xi_\nu)|]\,\Delta g_\nu =$$

$$= \sum_{\xi_\nu\in \complement B\cap[\alpha,b]} [|f(\xi_\nu)|-|h(\xi_\nu)|]\,\Delta g_\nu + \sum_{\xi_\nu\in B\cap[\alpha,b]} [|f(\xi_\nu)|-|h(\xi_\nu)|]\,\Delta g_\nu =$$

$$= \sum_{\xi_\nu\in B\cap[\alpha,b]} |f(\xi_\nu)|\Delta g_\nu \;.$$

Για κάθε $\xi_\nu\in B\cap[\alpha, b]$ υπάρχει $c\in A$ ώστε $|\xi_\nu-c| < \delta_1/4$. Επειδή

$$[x_{\nu-1}, x_\nu]\subset \Pi(\xi_\nu, \delta_1/4)\subset \Pi(c, \delta_1/2)\;.$$

και η g είναι σταθερή στην περιοχή $\Pi(c, \delta_1/2)$.έπεται ότι $\Delta g_\nu=0$. Άρα από την (7) προκύπτει ότι

$$S(|f|, g, D, P) = S(|h|, g, D, P)$$

για κάθε διαίρεση D του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D) < \delta_1/4 = \delta_0$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D.

Έτσι αποδείχθηκε η σχέση (2).

Οι (1) και (3) αποδεικνύονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με ελαφρά τροποποίηση της ισότητας (7). Δέστε και την αποδειξη του θεωρήματος της §10.9.2.

Άσκηση 72. *Ας είναι g αύξουσα συνάρτηση στο $[\alpha, b]$. Να δειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη g στο $[\alpha, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$(1)\qquad |S(f, g, D, P)-S(f, g, D, P^*)| < \varepsilon$$

για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta$ και για τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις P και P^* της D.

Λύση. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς τη g στο $[\alpha, b]$, τότε τα αθροίσματα $S(f, g, D, P)$ συγκλίνουν κατά *Cauchy* (βλ. θεώρ. §10.3.1) και τότε προφανώς ισχύει η (1).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (1). Τότε, χάρη στην προηγούμενη άσκηση υπάρχει $\delta_0>0$ και φραγμένη συνάρτηση h στο $[\alpha, b]$ ώστε να ισχύει,

$$(2)\qquad S(f, g, D, P) = S(h, g, D, P)$$

για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta_0$ και τυχαία ενδιάμεση διαίρεση P της D.

Έστω $\varepsilon>0$, $\delta_1 = \min\{\delta_0, \delta\}$ και $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ διαίρεση του $[\alpha, b]$

με $\lambda(D)<\delta_1$. Αν m_ν, M_ν το κατώτερο και το ανώτερο πέρας της h στο $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $\xi'_\nu, \xi''_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ ώστε,

$$h(\xi'_\nu) < m_\nu + \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{και} \quad h(\xi''_\nu) > M_\nu - \frac{\varepsilon}{2K} \quad \nu=1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

όπου $K = max\{1, g(b)-g(\alpha)\}$.

Θέτουμε $P' = \{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n\}$ και $P'' = \{\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n\}$ πολλαπλασιάζοντας τις (3) επί $\Delta g_\nu = g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})$ και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$S(h, g, D, P') < \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \Delta g_\nu + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathbb{R}\underline{\int_\alpha^b} hdg + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{και} \tag{4}$$

$$S(h, g, D, P'') > \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \Delta g_\nu - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mathbb{R}\overline{\int_\alpha^b} hdg - \frac{\varepsilon}{2} \quad . \tag{5}$$

Από τις (2), (4) και (5) παίρνουμε,

$$S(f, g, D, P') < \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \Delta g_\nu + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathbb{R}\underline{\int_\alpha^b} hdg + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{και} \tag{6}$$

$$S(f, g, D, P'') > \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \Delta g_\nu - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mathbb{R}\overline{\int_\alpha^b} hdg - \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

και συνεπώς

$$S(f, g, D, P'') - S(f, g, D, P') > \mathbb{R}\overline{\int_\alpha^b} hdg - \mathbb{R}\underline{\int_\alpha^b} hdg - \varepsilon \quad . \tag{8}$$

Χάρη στην (1) το α′ μέλος της (8) είναι $<\varepsilon$ και επομένως

$$0 \leq \mathbb{R}\overline{\int_\alpha^b} hdg - \mathbb{R}\underline{\int_\alpha^b} hdg < 2\varepsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, προκύπτει ότι η h είναι ολοκληρώσιμη κατά *Riemann-Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$.

Από τις (6) και (7) προκύπτει,

$$S(f, g, D, P') - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{RS}(h, g, D) \leq \overline{RS}(h, g, D) < S(f, g, D, P'') + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

και επειδή για οποιαδήποτε ενδιάμεση διαίρεση P της D το άθροισμα

$S(f, g, D, P) = S(h, g, D, P)$ καθώς και ο αριθμός $\mathrm{R}\int_{\alpha}^{b} hdg$ είναι ανάμεσα στους αριθμούς $\underline{RS}(h, g, D)$ και $\overline{RS}(h, g, D)$, η (9) δίνει

$$\left| S(f, g, D, P) - \mathrm{R}\int_{\alpha}^{b} fdg \right| \leq S(f, g, D, P'') - S(f, g, D, P') + \varepsilon$$

και χάρη στην (1) είναι

$$\left| S(f, g, D, P) - \mathrm{R}\int_{\alpha}^{b} fdg \right| < 2\varepsilon$$

για κάθε D με $\lambda(D)<\delta_1$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D.

Συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$.

Άσκηση 73. *Έστω g αύξουσα και f, φ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $|f|, f^2, f\varphi$ είναι ολοκληρώσιμες ως προς τη g στο $[\alpha, b]$ και ισχύει*

$$\left| \int_{\alpha}^{b} fdg \right| \leq \int_{\alpha}^{b} |f|\, dg \ .$$

Λύση. Θα κάνουμε την απόδειξη για το ολοκλήρωμα του *Stieltjes*. Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα η πορεία είναι ανάλογη χρησιμοποιώντας την άσκηση 10.3, ενώ για το ολοκλήρωμα *Riemann-Stieltjes* η απόδειξη είναι απλούστερη αν ληφθεί υπόψη η άσκηση 10.14.

Έστω f ολοκληρώσιμη κατά *Stieltjes* ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. Τότε (βλ. άσκ. 72) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1>0$ ώστε να ισχύει

$$|S(f, g, D, P') - S(f, g, D, P'')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta_1$ και τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις P', P'' της D.

Χάρη στην (1) $\exists\ \delta_0>0$ και φραγμένη συνάρτηση h στο $[\alpha, b]$ ώστε να έχουμε,

(2) $\qquad S(f, g, D, P) = S(h, g, D, P), \ \ S(|f|, g, D, P) = S(|h|, g, D, P)$

και $\qquad S(f^2, g, D, P) = S(h^2, g, D, P)$,

για κάθε διαίρεση D με $\lambda(D)<\delta_0$ και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D (βλ. άσκ. 71).

Θέτουμε $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$. Αν $\lambda(D)<\delta$ τότε ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2) και συνεπώς ισχύει

$$(3) \qquad |S(h, g, D, P') - S(h, g, D, P'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

όταν $\lambda(D)<\delta$ και P', P'' τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις της D.

Επειδή τα $\overline{RS}(h, g, D)$ και $\underline{RS}(h, g, D)$ είναι το ανώτερο και κατώτερο πέρας των $S(h, g, D, P)$ αντίστοιχα, για όλες τις ενδιάμεσες διαιρέσεις P της D, παίρνοντας ανώτερο πέρας στην (3) προκύπτει,

$$(4) \qquad \overline{RS}(h, g, D) - \underline{RS}(h, g, D) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

για κάθε διαίρεση D του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$.

Αν M'_ν, m'_ν είναι το ανώτερο και κατώτερο πέρας της $|h|$ και M_ν, m_ν το ανώτερο και κατώτερο πέρας της h στο $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ $\nu=1, 2, \dots, n$, παίρνοντας ανώτερο πέρας στη σχέση

$$||h(x)| - |h(y)|| \leq |h(x) - h(y)| \text{ για } x, y \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

προκύπτει,

$$(5) \qquad M'_\nu - m'_\nu \leq M_\nu - m_\nu \quad \nu=1, 2, \dots, n \text{ .}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (5) επί Δg_ν και λαμβάνοντας υπόψη την (4) έχουμε

$$(6) \qquad \overline{RS}(|h|, g, D) - \underline{RS}(|h|, g, D) < \varepsilon$$

όταν $\lambda(D)<\delta$.

Η (6) συνεπάγεται ότι αν $\lambda(D)<\delta$ και P', P'' τυχαίες διαιρέσεις της D, τότε

$$|S(|h|, g, D, P') - S(|h|, g, D, P'')| < \varepsilon$$

και χάρη στην (2),

$$|S(|f|, g, D, P') - S(|f|, g, D, P'')| < \varepsilon$$

όταν $\lambda(D)<\delta$ και P', P'' τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις της D. Τότε, χάρη στην άσκηση 72, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη ως προς τη g στο $[\alpha, b]$. Προχωρούμε την απόδειξη όπως παραπάνω μέχρι τη σχέση (4). Ας είναι τώρα D διαίρεση του $[\alpha, b]$ με $\lambda(D)<\delta$. Αν $M = \sup\limits_{[\alpha,\ b]} |h(x)|$, τότε για την h^2 ισχύει,

$$(7) \qquad |h^2(x) - h^2(y)| \leq 2M|h(x) - h(y)| \text{ .}$$

Αν σημειώσουμε με M''_ν, m''_ν το ανώτερο και το κατώτερο πέρας της h^2 στο διάστημα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ $\nu=1, 2, \ldots, n$, και M_ν, m_ν τα αντίστοιχα της h, τότε παίρνοντας ανώτερο πέρας στη σχέση (7) έχουμε,

$$(8) \qquad M''_\nu - m''_\nu \le 2M\,[M_\nu - m_\nu]\,, \quad \nu=1, 2, \ldots, n$$

και πολλαπλασιάζοντας επί Δg_ν προκύπτει

$$\overline{RS}(h^2, g, D) - \underline{RS}(h^2, g, D) \le 2M\,[\overline{RS}(h, g, D) - \underline{RS}(h, g, D)]$$

και χάρη στην (4) θα είναι

$$(9) \qquad \overline{RS}(h^2, g, D) - \underline{RS}(h^2, g, D) \le 2M\varepsilon \quad \text{όταν} \quad \lambda(D)<\delta\ .$$

Η (9) συνεπάγεται ότι αν $\lambda(D)<\delta$ και P', P'' τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις της D, τότε

$$|S(h^2, g, D, P') - S(h^2, g, D, P'')| < 2M\varepsilon$$

και χάρη στην (2)

$$|S(f^2, g, D, P'') - S(f^2, g, D, P'')| < 2M\varepsilon$$

όταν $\lambda(D)<\delta$ και P', P'' τυχαίες ενδιάμεσες διαιρέσεις της D. Έτσι χάρη στην άσκηση 72, η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$.

Για να δείξουμε ότι η $f\varphi$ είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$f\varphi = \frac{1}{4}\,[(f+\varphi)^2 - (f-\varphi)^2]\ .$$

Αφού οι f, φ είναι ολοκληρώσιμες ως προς τη g, οι $f+\varphi$ και $f-\varphi$ είναι επίσης ολοκληρώσιμες ως προς τη g και χάρη στην προηγούμενη περίπτωση οι $(f+\varphi)^2$ και $(f-\varphi)^2$ είναι επίσης ολοκληρώσιμες. Άρα και η $f\varphi$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς τη g.

Τέλος για να δείξουμε την ανισότητα παρατηρούμε ότι για κάθε διαίρεση D και για κάθε ενδιάμεση διαίρεση P της D ισχύει

$$|S(f, g, D, P)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,\Delta g_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{n} |f(\xi_\nu)|\,\Delta g_\nu = S(|f|, g, D, P)$$

και παίρνοντας όρια προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

Άσκηση 74. *Έστω $\alpha<c<b$. Ορίζουμε μια κλιμακωτή συνάρτηση $g:[\alpha, b]\to \mathbb{R}$ ως εξής: Οι τιμές $g(\alpha)$, $g(c)$ και $g(b)$ είναι αυθαίρετες. Στα υπόλοιπα σημεία θέτουμε*