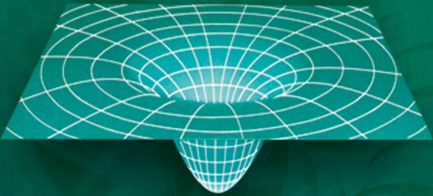
Δημήτρης Ε. Κρέτζας
Δρ. Φυσικός

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Με τα Μαθηματικά του Λυκείου



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Δυο λόγια πριν αρχίσουμε

Η ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (1915) από τον Einstein ακολούθησε την ανάπτυξη της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον ίδιο (1905). Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ταιριάζει σ' ένα κόσμο χωρίς ύλη, στον οποίο ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μια θεωρία της βαρύτητας. Η παρουσία της ύλης καμπυλώνει το χωρόχρονο και η επέκταση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, σε ένα κόσμο με ύλη, είναι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Από τις τελευταίες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας γνωρίζει μεγάλη άνθηση. Η ανάπτυξη της τεχνολογίας και οι ανακαλύψεις της Αστροφυσικής έστρεψαν πλήθος επιστημόνων προς τη θεωρία αυτή. Οι ενδείξεις για την ύπαρξη των μαύρων τρυπών διεγείρει το νου και η εμβάθυνση προς την αρχή της ύπαρξης του σύμπαντος και τις πιθανές εξελίξεις του αποτελεί ισχυρό πόλο έλξης. Αν η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας έδωσε νέα διάσταση στη Φυσική, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας άνοιξε παράθυρα προς νέους κόσμους, νέους ορίζοντες, την έξαψη και τη γόνιμη περιέργεια.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δημιουργεί νέες διαστάσεις της σκέψης, δεν αποκλείει το απρόσμενο, δεν θέτει όρια στη δημιουργική σκέψη, ενώ ταυτόχρονα είναι πλούσια σε πέπλα που σκεπάζουν μυστήρια και δίνουν τροφή στην πιο ασύλληπτη φαντασία. Είμαστε σαν μια σταγόνα μέσα σε υγρό και προσπαθούμε να κατανοήσουμε τη στερεά, την αέρια κατάσταση και το κενό που διαφέρει από το τίποτα. Προσπαθούμε να μαντέψουμε το μέλλον, με μηνύματα από το παρελθόν. Θέλουμε να ονειρευτούμε την αθέατη όψη, πριν την κάνουμε θεατή. Ίσως ο 21^{ος} αιώνας να είναι ο αιώνας των αλλεπάλληλων ακόμα και των πιο αδιανόητων εκπλήξεων. Πριν γευθούμε αυτό που έρχεται, ας απολαύσουμε αυτό που υπάρχει και μας γοητεύει.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μια κλασική θεωρία, την οποία κανένα φαινόμενο μέχρι τώρα δεν την έχει διαψεύσει. Η ισχύς της στο μικρόκοσμο και μέχρι ποιο σημείο, δημιουργεί εύλογα ερωτηματικά. Σήμερα πολλές προσπάθειες γίνονται για την ανάπτυξη μιας Κβαντικής Θεωρίας της Βαρύτητας, η οποία θα ολοκληρώσει και θα δέσει το οικοδόμημα της Φυσικής.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη σχέση Γεωμετρίας και Φυσικής και τη σύνδεση τους στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Στη συνέχεια, η αρχή της ισοδυναμίας θα μας οδηγήσει σε ταυτοτική σχέση αδράνειας και βαρύτητας, με αποτέλεσμα την παρατηρούμενη συστολή των μηκών και τη διαστολή του χρόνου σε πεδία βαρύτητας, με συνέπεια την αλλαγή της Γεωμετρίας του χώρου και την επιβεβαίωση, με παρατηρήσιμα φαινόμενα, της Αστρονομίας και της Αστροφυσικής. Η εξέταση της εξέλιξης των άστρων, οδηγεί στις μαύρες τρύπες, τις ηλεκτρικά φορτισμένες και τις περιστρεφόμενες μαύρες τρύπες και τα περίεργα που προκύπτουν. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην Κοσμολογία.

Η δημιουργία και το μέλλον του σύμπαντος ή των συμπάντων είναι το θέμα που ξεπερνά τα όρια και τις δυνατότητες της σκέψης μας. Θα γίνει αναφορά στις διαστάσεις του χώρου, την Ανθρωπική Αρχή που συνδέει τα πάντα με την ύπαρξη μας και γενικά στις ανακαλύψεις και παραδοχές μέχρι τις αρχές του αιώνα μας.

Ακόμα θα ασχοληθούμε με τις ανακαλύψεις του τέλους του $20^{ου}$ και τις ανακαλύψεις και μετρήσεις των αρχών του $21^{ου}$ αιώνα, που ουσιαστικά ανέτρεψαν την παραδοχή ενός σύμπαντος με επιβραδυνόμενη διαστολή. Η ακριβής μέτρηση των κοσμολογικών σταθερών, κυρίως από το δορυφόρο WMAP (2003), δημιούργησε την αντίληψη ότι, οι μετρήσεις μπορεί να προηγηθούν των θεωριών και να δώσουν απαντήσεις στο ποια δεδομένα ταιριάζουν καλύτερα στο σύμπαν. Οι μετρήσεις επιβεβαίωσαν, προς έκπληξη των επιστημόνων, ότι σήμερα η διαστολή του σύμπαντος είναι επιταχυνόμενη, ότι η συνήθης ύλη αποτελεί μόνο το 4% της υλοενέργειας του σύμπαντος, ότι η άγνωστη σκοτεινή ύλη αποτελεί το 23% και το υπόλοιπο 73% κατέχεται από την άγνωστη, με ιδιότητες αντιβαρύτητας, ενέργεια του κενού, με διαρκώς αυξανόμενη επίδραση.

Για την καλύτερη κατανόηση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι απαραίτητες στοιχειώδεις γνώσεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, που αναπτύσσονται στο βιβλίο που ήδη κυκλοφορεί "Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με τα Μαθηματικά του Λυκείου". Και στο παρόν βιβλίο χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά του Λυκείου.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν τρία παραρτήματα. Το πρώτο περιέχει απλές μαθηματικές σχέσεις για προσεγγίσεις κτλ. Το δεύτερο υπενθυμίζει ή κατατοπίζει τον αναγνώστη για διάφορες έννοιες και σχέσεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Επισημαίνουμε ότι, όπως και στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, για μετρήσεις που γίνονται από ένα παρατηρητή, για φαινόμενα που συμβαίνουν στη θέση που βρίσκεται, χρησιμοποιείται η λέξη ίδιος ως τρισύλλαβη ί–δι–ος. Το τρίτο αφορά τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και την Κοσμολογία. Σ' αυτό δίνουμε κάποια συμπληρώματα, ίσως μερικά κάπως τραβηγμένα, τα οποία πιθανόν να κάνουν καλύτερη την κατανόηση, αν λάβουμε υπόψη ότι οριακή εφαρμογή της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και η Κλασική Φυσική.

Έγινε κάθε προσπάθεια να γίνουν όσο το δυνατόν περισσότερα κατανοητά, με τη χρήση των μαθηματικών του Λυκείου. Αυτό επιτεύχθηκε όπου ήταν δυνατόν. Αρκεί να αναφέρουμε ότι, λόγω των πολύπλοκων μαθηματικών, ακόμα και στην πανεπιστημιακή διδασκαλία, πολλές σχέσεις δίνονται χωρίς απόδειξη. Ορισμένα θέματα επεξεργάστηκαν από τον ίδιο το συγγραφέα με σκοπό την καλύτερη προσέγγιση.

Από τον αναγνώστη μπορεί να παραληφθούν πολλές αποδείξεις, με απευθείας πέρασμα στα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά.

Η επίδειξη κατανόησης από τον αναγνώστη για τις ατέλειες και τα λάθη του εγχειρήματος, ίσως να ταιριάζει στη λέξη Σχετικότητα. Κάθε παρατήρηση είναι ευπρόσδεκτη και ευχαρίστηση μας η ευχάριστη ανάγνωση και εμβάθυνση.

Με ευχαριστίες για τον αναγνώστη

Δημήτρης Κρέτζας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφαλαιο 1

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφαλαιο 2

ΒΑΡΥΤΗΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΣΤΡΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ

Κεφαλαιο 5

ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Η ΜΕΓΑΛΗ ΕΚΡΗΞΗ

Συντομεύσεις

δηλ.	= δηλαδή
δισ.	= δισεκατομμύριο(α)
εκ.	= εκατομμύριο(α)
κτλ.	= και τα λοιπά
παρ.	= παράγραφος
π.χ.	= παραδείγματος χάριν
σελ.	= σελίδα
σταθ.	= σταθερός (η, ο)
C.G.S.	= σύστημα μονάδων, με βάση τα cm, g, s.
S.I,	= Διεθνές σύστημα μονάδων
EdS	= Einstein de Sitter
FRW	= Friedmann Robertson Walker

Σταθερές

Ταχύτητα του φωτός στο κενό	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
Σταθερή του Planck	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ J·s
Σταθερή της παγκόσμιας έλξης	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Σταθερή των ιδανικών αερίων	$R = 8{,}31 \cdot 10^3$ $J \cdot K^{-1} \cdot kmol^{-1}$
Σταθερή του Boltzmann	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $J \cdot K^{-1}$
Σταθερή των Stefan–Boltzmann	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $w \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
Σταθερή του Wien	$b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}$ m·K
Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο e	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου	$m_e = 9{,}10939 \cdot 10^{-31}$ kg
Μάζα ηρεμίας του νετρονίου	$m_n = 1{,}67493 \cdot 10^{-27}$ kg
Μάζα ηρεμίας του πρωτονίου	$m_p = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg

Χρήσιμες μονάδες που δεν ανήκουν στο Διεθνές σύστημα S.I.

Μονάδα ενέργειας, έργιο	1 erg = 10^{-7} J
Μονάδα ενέργειας, ηλεκτρονιοβολτ	1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J
Μονάδα πυκνότητας, g/cm^3	1 $g/cm^3 = 10^3$ kg/m^3
Μονάδα ταχύτητας, km/h	1 km/h ≈ 0,28 m/s
Μονάδα μάζας, ατομική μονάδα μάζας	1 amu = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
Μονάδα μαγνητικής επαγωγής, Gauss	1 Gs (Gauss) = 10^{-4} T (Tesla)
Μονάδα χρόνου, λεπτό	1 min = 60 s
Μονάδα χρόνου, ώρα	1 h = 3600 s
Μονάδα χρόνου, ημέρα	1 d = 86400 s
Μονάδα χρόνου, έτος	1 y ≈ $3{,}16 \cdot 10^7$ s
Μονάδα μήκους, αστρονομική μονάδα	1 A. U. = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
Μονάδα μήκους, έτος φωτός	1 ly ≈ $0{,}946 \cdot 10^{16}$ m
Μονάδα μήκους, parsec	1 pc ≈ 3,26 ly ≈ $3{,}09 \cdot 10^{16}$ m
Μονάδα μάζας, μάζα του Ήλιου	1 $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Μονάδα μήκους, ακτίνα του Ήλιου	1 $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8$ m
Μονάδα λαμπρότητας, λαμπρότητα του Ήλιου	1 $L_\odot = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ J/s

Κεφάλαιο 1

ΦΥΣΙΚΗ και ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ανεπάρκεια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δέχεται ότι, οι νόμοι της Φυσικής ισχύουν με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και ότι η ταχύτητα του φωτός, στο λεγόμενο κενό, είναι σταθερή και ίδια, ανεξάρτητα από την κίνηση τους.

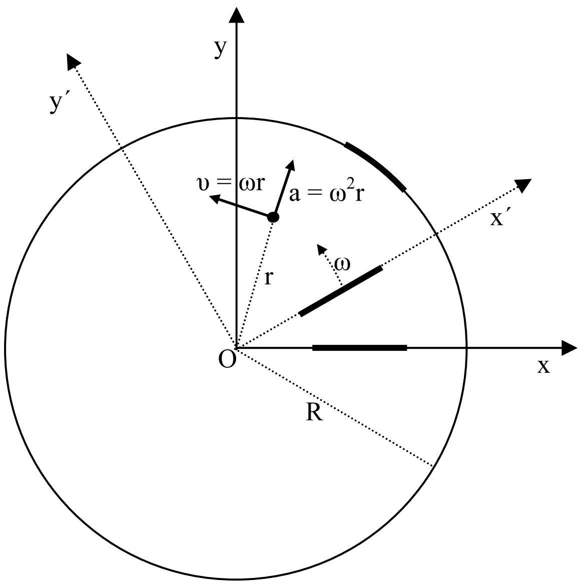
Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δεν επεκτείνεται σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Στα μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, εκτός από τις δυνάμεις που οφείλονται στην αλληλεπίδραση των σωμάτων, εμφανίζονται και δυνάμεις που οφείλονται στη μη ομαλή κίνηση του συστήματος.

Ας εξετάσουμε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, στο οποίο δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας. Για το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς το K(x, y, z, t) και ένα μη αδρανειακό το K΄(x΄, y΄, z΄, t΄). Τα επίπεδα xOy, x΄Oy΄ συμπίπτουν όπως και οι κάθετοι σ' αυτά άξονες Oz, Oz΄ (Σχήμα 1.1,1). Τα συστήματα K, K΄ είναι εφοδιασμένα σε κάθε τους σημείο με ίδια ρολόγια για τη μέτρηση του χρόνου και με ίδιες μικρές ράβδους για τη μέτρηση του μήκους. Το σύστημα K΄ περιστρέφεται, ως προς το K, γύρω από τον άξονα Oz με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Στο επίπεδο x΄Oy΄ του συστήματος K΄ είναι στερεά συνδεμένος ένας δίσκος ακτίνας R, με το κέντρο του πάνω στον άξονα Oz΄. Ο δίσκος αυτός περιστρέφεται μαζί με το σύστημα K΄.

Στο σύστημα K΄, σε κάθε σημείο του δίσκου που απέχει απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, για ένα παρατηρητή ακίνητο στο μη αδρανειακό σύστημα K΄, ένα σώμα δέχεται φυγόκεντρη επιτάχυνση $a = \omega^2 r$. Η φυγόκεντρη επιτάχυνση δεν είναι σταθερή αλλά ανάλογη της ακτίνας r. Έτσι στο σύστημα K΄ υπάρχει ένα πεδίο επιταχύνσεων.

Ας θεωρήσουμε ένα παρατηρητή Π΄, ακίνητο στο μη αδρανειακό σύστημα K΄, που κάνει μετρήσεις πάνω στο δίσκο που περιστρέφεται. Ως μονάδα μέτρησης χρησιμοποιεί τις παραπάνω ίδιες μικρές ράβδους που ηρεμούν στο σύστημα K΄ και είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του δίσκου. Ακόμα ας θεωρήσουμε ένα παρατηρητή Π ακίνητο στο αδρανειακό σύστημα K, ο οποίος χρησιμοποιεί την ίδια ακριβώς μονάδα μέτρησης. Θεωρούμε ακόμα ότι η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ισχύει για μικρές περιοχές, στις οποίες η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ομαλή.

Όταν ο παρατηρητής Π΄ μετρά το μήκος της διαμέτρου του δίσκου, ο παρατηρητής Π θα σημειώσει ότι το μήκος της μονάδας μέτρησης του Π΄ παραμένει σταθερό, γιατί η μονάδα μέτρησης είναι κάθετη στην κίνηση.



Σχήμα 1.1,1
Σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς εμφανίζονται φυγόκεντρες επιταχύνσεις.
Υπάρχει συστολή των μηκών κατά μήκος μιας περιφέρειας τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση από το κέντρο περιστροφής. Τα ρολόγια του περιστρεφόμενου συστήματος δεν λειτουργούν με τον ίδιο ρυθμό αλλά καθυστερούν τόσο περισσότερο, όσο μακρύτερα από το κέντρο περιστροφής βρίσκονται.

Όταν ο παρατηρητής Π΄ χρησιμοποιεί τη μονάδα του μέτρησης πάνω στην περιφέρεια του δίσκου, για να μετρήσει το μήκος της, για τον παρατηρητή Π η μονάδα μέτρησης του Π΄ είναι πιο μικρή, λόγω του φαινομένου της **συστολής των μηκών** κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Σημειώνουμε ότι η μέτρηση του μήκους της διαμέτρου και της περιφέρειας του δίσκου γίνεται με τη χρησιμοποίηση της μονάδας μέτρησης διαδοχικά. Η συστολή του μήκους για τον παρατηρητή Π υπάρχει, όταν η μονάδα μέτρησης του παρατηρητή Π΄ χρησιμοποιείται κατά τη διεύθυνση της κίνησης (μέτρηση του μήκους της περιφέρειας), ενώ δεν παρατηρείται συστολή κατά τη διεύθυνση την κάθετη στην κίνηση (μέτρηση του μήκους της διαμέτρου). Στο σύστημα Κ, ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου είναι π (π = 3,14159…). Για το σύστημα του παρατηρητή Π΄, όπως υπολογίζεται από το αδρανειακό σύστημα Κ, ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου είναι μεγαλύτερος του π (όσο μικραίνει η μονάδα μέτρησης, τόσο περισσότερες φορές χωρεί στην περιφέρεια), διότι η μονάδα μέτρησης, που είναι ακίνητη πάνω στην περιφέρεια στο σύστημα Κ΄, εμφανίζεται βραχύτερη. Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου αυξάνει με την αύξηση της ακτίνας, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, γιατί οι ταχύτητες οι κάθετες στην ακτίνα, γίνονται μεγαλύτερες,.

Αντίστοιχα αποτελέσματα έχουμε και για τη μέτρηση του χρόνου. Θεωρούμε ότι υπάρχουν συγχρονισμένα ρολόγια ακίνητα σε κάθε σημείο του συστήματος Κ και άλλα ίδια ρολόγια πάνω στον περιστρεφόμενο δίσκο, ακίνητα στο σύστημα Κ΄.

Για τον παρατηρητή Π του συστήματος Κ, μόνο το ρολόι του συστήματος Κ΄ που είναι στο κέντρο του δίσκου είναι συγχρονισμένο με τα δικά του, ενώ τα ρολόγια του δίσκου που απέχουν από το κέντρο, σύμφωνα με το φαινόμενο της **διαστολής του χρόνου**, καθυστερούν συγκρινόμενα με τα συγχρονισμένα ρολόγια του συστήματος του, τόσο περισσότερο όσο πιο πολύ απέχουν από τον άξονα περιστροφής (μεγαλύτερες ταχύτητες, $\upsilon = \omega r$). Τα ρολόγια στο δίσκο λειτουργούν πιο αργά συγκρινόμενα με τα ρολόγια του συστήματος Κ και γι' αυτό τα ρολόγια στο δίσκο (σύστημα Κ΄) δεν μπορεί να είναι συγχρονισμένα, αφού ο ρυθμός τους εξαρτάται από τη θέση τους. Συνεπώς είναι αδύνατο να φτάσουμε σε ένα λογικό ορισμό του χρόνου, με τα ρολόγια που είναι ακίνητα στο περιστρεφόμενο σύστημα Κ΄. Το ίδιο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ισχύει για όλα τα επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς και όπου υπάρχει πεδίο βαρύτητας.

Τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι πρέπει να τροποποιηθούν οι αντιλήψεις μας περί χώρου, χρόνου, χωροχρονικών συντεταγμένων και γεωμετρικών εννοιών.

Οπωσδήποτε χρειάζεται να αναθεωρήσουμε τις απόψεις μας για την ισχύ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να προσαρμοστούμε σε μια Γεωμετρία, η οποία να ταιριάζει καλύτερα στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Ευτυχώς, πριν από την ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, υπήρχε το μαθηματικό υπόβαθρο και η σχετική προετοιμασία στις εργασίες του Gauss (1827) για τις καμπύλες επιφάνειες σε μια μορφή γενικευμένης δισδιάστατης Γεωμετρίας, όπως η Γεωμετρία του Riemann (1854) και άλλες. Πριν ασχοληθούμε περισσότερο με αυτές, ας ρίξουμε μια ματιά στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη Γεωμετρία και τη Φυσική.

1.2 Φυσική και χώρος

Στα μαθηματικά κάθε Γεωμετρία με τα αξιώματα της είναι ένα λογικό σύστημα, συνεπές, χωρίς αντιφάσεις, που ασχολείται με το χώρο και τις μετρήσεις σ' αυτόν.

Η Φυσική μελετά τα φυσικά φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν στο χώρο και επιβεβαιώνει τη θεωρία με πειράματα, τα οποία γίνονται επίσης στο χώρο. Οι μετρήσεις είναι εκείνες που θα δώσουν την απάντηση, για το ποια θεωρία ταιριάζει καλύτερα στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Η καθημερινή εμπειρία δείχνει ότι ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η πλήρης αποδοχή της όμως δεν είναι δυνατή, όταν υπάρχουν φυσικά φαινόμενα που βρίσκονται σε ασυμφωνία μ' αυτή. Όσο πιο μικρή είναι η ασυμφωνία, τόσο δυσκολότερο είναι να διαπιστωθεί. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε προκαταβολικά για το ποιά Γεωμετρία ανταποκρίνεται στο φυσικό χώρο και αν και πώς τον επηρεάζει η ύπαρξη μάζας. Την απάντηση θα τη δώσουν οι μετρήσεις.

Οι δυσκολίες αρχίζουν από τον ορισμό των απλούστερων γεωμετρικών εννοιών, όπως **ευθεία**, **απόσταση**, **επίπεδο**, **στερεό σώμα** κτλ. Η ευθεία μπορεί να οριστεί από την τροχιά της κίνησης ενός υλικού σημείου λόγω αδράνειας ή από την πορεία μιας ακτίνας φωτός στο κενό. Η ευθεία μπορεί επίσης να οριστεί από τον άξονα που σχηματίζεται, όταν ένα στερεό σώμα στραφεί, έτσι ώστε δύο σημεία του να μείνουν ακίνητα. Τα δύο αυτά σημεία και τα άλλα σημεία του στερεού σώματος που μένουν ακίνητα, ορίζουν τον άξονα περιστροφής. Η ευθεία μπορεί ακόμα να οριστεί από τη μικρότερη διαδρομή ανάμεσα σε δύο σταθερά σημεία ενός συστήματος.

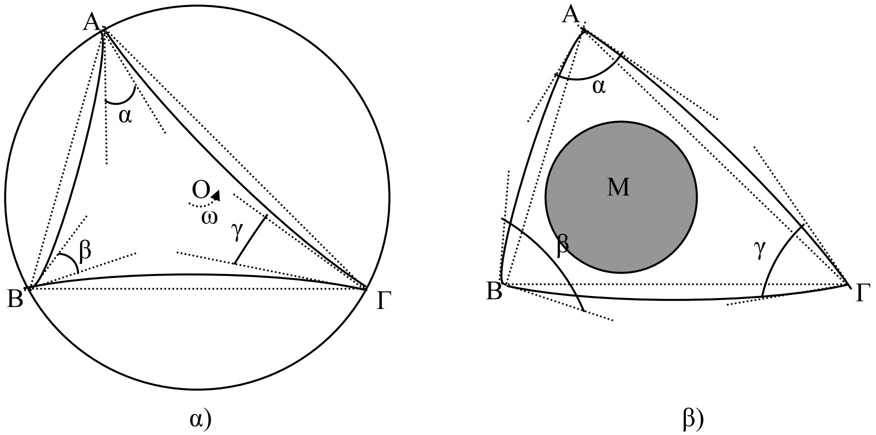
Για τη μέτρηση των μηκών θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε μικρές στερεές ράβδους, οι οποίες δεν επηρεάζονται από τοπικές συνθήκες, όπως π.χ. η πίεση και η θερμοκρασία. Δύο ίσες στερεές ράβδοι, όταν μεταφέρονται από ένα τόπο σε ένα άλλο, παραμένουν ίσες και στο νέο τόπο, ανεξάρτητα από τη διαδρομή που ακολούθησε η κάθε μια. Με τέτοιες στερεές ράβδους, κάνοντας μετρήσεις στο χώρο των τριών διαστάσεων, μπορούμε να δοκιμάσουμε την ισχύ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αν ο χώρος είναι Ευκλείδειος ή όχι, δεν είναι θέμα φιλοσοφίας αλλά μετρήσεων. Αν διαπιστωθεί ότι, ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του δεν είναι π αλλά μεγαλύτερος ή μικρότερος, ή ακόμα ότι εξαρτάται από το μέγεθος του κύκλου, η Γεωμετρία που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δεν είναι η Ευκλείδεια. Τα ίδια ισχύουν, όταν με μετρήσεις διαπιστωθεί ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι διαφορετικό από δύο ορθές.

Για μεγάλες αποστάσεις ως ευθείες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακτίνες φωτός. Όσο μικρότερη είναι η απόκλιση από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, σε τόσο μεγαλύτερη έκταση και με μεγαλύτερη ακρίβεια πρέπει να γίνουν οι μετρήσεις. Ο Gauss για να δοκιμάσει την ισχύ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, έκανε μετρήσεις στο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις κορυφές των βουνών Brocken, Hofer Hagen και Inselberg, αλλά η ακρίβεια δεν ήταν αρκετή, ώστε να δώσει ασφαλή συμπεράσματα. Για το τόλμημα του αυτό ο Gauss δέχτηκε επίθεση από Φιλοσόφους, οι οποίοι είπαν ότι, κι' αν ακόμα διαπιστωνόταν ότι το άθροισμα των γωνιών του παραπάνω τριγώνου είναι διαφορετικό από δύο ορθές, αυτό θα οφειλόταν όχι στην ανεπάρκεια και τη μη ισχύ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά στην εκτροπή των φωτεινών ακτίνων από άγνωστη αιτία.

Το μήκος της διαδρομής ανάμεσα σε δύο σημεία μετριέται με μια μικρή ράβδο μέτρησης, την οποία θετουμε διαδοχικά πάνω στη διαδρομή και μετρούμε τον αριθμό των επαναλήψεων, δηλαδή πόσες φορές η ράβδος χωρεί στη διαδρομή. Αν το μήκος της ράβδου μένει σταθερό, η μικρότερη διαδρομή είναι η ευθεία, αν όμως το μήκος της ράβδου αλλάζει από θέση σε θέση, η μικρότερη διαδρομή δεν είναι η ευθεία.

Στον περιστρεφόμενο δίσκο της παρ. 1.1, όταν ένα φωτόνιο φύγει από ένα σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου για να φτάσει σε ένα άλλο σημείο Β (Σχήμα 1.2,1 α), θα ακολουθήσει το συντομότερο δρόμο. Ποιός είναι όμως ο συντομότερος δρόμος; Όταν ο δίσκος δεν περιστρέφεται, ο συντομότερος δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τι συμβαίνει όμως όταν ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα στο κέντρο του, κάθετο στο επίπεδο του, με γωνιακή ταχύτητα ω; Τότε σε κάθε θέση, σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή του συστήματος Κ, λόγω της συστολής των μηκών κατά τη διεύθυνση της κίνησης, οι ράβδοι μέτρησης είναι μικρότερες κατά τον παράγοντα $1/\gamma$ ($\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$, $\beta = \upsilon/c$, $\upsilon = \omega r$, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό) και συνεπώς ο ελάχιστος αριθμός διαδοχικών ράβδων, από το Α μέχρι το Β, δεν είναι πάνω στην ευθεία ΑΒ. Επειδή, κατά τη διεύθυνση της κίνησης, όσο απομακρύνεται από το κέντρο περιστροφής (μεγαλύτερη ταχύτητα) η ράβδος μικραίνει και όσο πλησιάζει μεγαλώνει, ο μικρότερος αριθμός διαδοχικών ράβδων είναι πάνω σε μια διαδρομή καμπυλωμένη, με τα κοίλα στραμμένα προς τα έξω, προς τη φορά της φυγόκεντρης επιτάχυνσης. Τα ίδια, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2,1 α), ισχύουν όταν σταλεί μία φωτεινή ακτίνα από το

Β στο Γ και από το Γ στο Α. Θεωρώντας ότι το φως ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή, η τροχιά του πρέπει να είναι καμπυλωμένη, με τα κοίλα προς την περιφέρεια. Όπως εύκολα φαίνεται, στο καμπυλόγραμμο τρίγωνο ΑΒΓ, που σχηματίζεται από τις πορείες των φωτεινών ακτίνων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο από δύο ορθές ($\alpha + \beta + \gamma < \pi$) και η Γεωμετρία που ταιριάζει δεν είναι Ευκλείδεια.



Σχήμα 1.2,1
α) Πορεία φωτεινών ακτίνων σε περιστρεφόμενο δίσκο.
β) Πορεία φωτεινών ακτίνων σε πεδίο βαρύτητας.

Κατά παρόμοιο τρόπο σε ένα πεδίο βαρύτητας μιας σφαιρικής μάζας Μ, η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά (θα δούμε στη συνέχεια στην παρ. 2.3 ότι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των πεδίων βαρύτητας και των πεδίων επιταχύνσεων) και η συντομότερη διαδρομή ανάμεσα σε δύο σημεία Α, Β είναι μία καμπύλη ΑΒ με τα κοίλα στραμμένα προς τη φορά της επιτάχυνσης της βαρύτητας (Σχήμα 1.2,1 β).

Σημειώνουμε ότι, στον περιστρεφόμενο δίσκο το πεδίο επιταχύνσεων παρουσιάζει αξονική συμμετρία και οι επιταχύνσεις και οι δυνάμεις πάνω σε μάζες μεγαλώνουν όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα, ανάλογα με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής, ενώ το πεδίο βαρύτητας, μιας ομογενούς σφαιρικής μάζας, έχει σφαιρική συμμετρία και έξω από τη σφαιρική μάζα, οι επιταχύνσεις και οι δυνάμεις πάνω σε άλλες μάζες είναι αντίστροφα ανάλογες προς το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο και μεγαλώνουν όσο την πλησιάζουμε.

Όπως εύκολα φαίνεται (Σχήμα 1.2,1 β), το άθροισμα των γωνιών του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζεται από τις φωτεινές ακτίνες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές ($\alpha + \beta + \gamma > \pi$). Η ευθεία ως η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων έχει παραχωρήσει τη θέση της σε μια καμπύλη, η οποία στρέφει τα κοίλα της προς το μέρος της επιτάχυνσης της βαρύτητας και δεν ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Αναφέρουμε ακόμα ένα παράδειγμα του Poincaré. Ας θεωρήσουμε μια κοίλη σφαίρα, μέσα στην οποία ζουν φανταστικά όντα μικρών διαστάσεων σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας. Στη φανταστική αυτή σφαίρα θεωρούμε ότι, η θερμοκρασία ελαττώνεται προοδευτικά από το κέντρο προς την επιφάνεια, όπου η θερμοκρασία είναι ίση με το απόλυτο μηδέν. Θεωρούμε ακόμα ότι, η μεταβολή της θερμοκρασίας επηρεάζει κατά τον ίδιο ακριβώς συντελεστή όλα τα σώματα, ώστε στο απόλυτο μηδέν οι διαστάσεις τους να μηδενίζονται. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι, ο κλειστός αυτός κόσμος της σφαίρας είναι άπειρος για τους κατοίκους του. Πραγματικά, αν φανταστούμε ένα κάτοικο της σφαίρας να προχωρεί από το κέντρο προς την επιφάνεια της σφαίρας, όσο προχωρεί, τα βήματα του όπως και η μονάδα μέτρησης θα γίνονται μικρότερα και θα του είναι αδύνατον να φτάσει στην επιφάνεια της σφαίρας, όσο κι' αν προχωρήσει.

Οι Γεωμέτρες του φανταστικού αυτού κόσμου κάνουν τις μετρήσεις τους όπως και εμείς στο δικό μας κόσμο. Μια ράβδος μέτρησης έχει για αυτούς σταθερό μήκος, αφού όσο μικραίνουν ή μεγαλώνουν αυτοί μικραίνουν ή μεγαλώνουν όλα τα αντικείμενα και η μονάδα μέτρησης. Το μπόι τους είναι διαρκώς σταθερό, όλα τα αντικείμενα μένουν ίδια κατά τη μεταφορά τους, διατηρώντας το σχήμα τους και το μέγεθος τους και παρουσιάζουν όλα τα χαρακτηριστικά του στερεού σώματος.

Τα υποθετικά αυτά όντα, όταν κάνουν μετρήσεις, βρίσκουν ότι ο κόσμος τους δεν είναι Ευκλείδειος. Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου είναι μεγαλύτερος του π και στον κόσμο τους ταιριάζει καλύτερα μια άλλη Γεωμετρία, όπως σε μας ταιριάζει καλύτερα η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για μας τα όντα αυτά έχουν λαθεμένη αντίληψη των μετρήσεων και βρίσκονται σε πλάνη, αφού θεωρούν τα σώματα στερεά, ενώ αυτά όσο πλησιάζουν την επιφάνεια της σφαίρας μικραίνουν. Αντίστροφα τα όντα αυτά θα έλεγαν ότι η λαθεμένη αντίληψη είναι η δική μας.

Γίνεται έτσι φανερό ότι, ο ίδιος χώρος, αλλάζοντας τις φυσικές συνθήκες, εμφανίζεται ως Ευκλείδειος ή ως μη Ευκλείδειος. Αυτό δείχνει ότι ο καθένας χρησιμοποιεί την απλούστερη Γεωμετρία που ταιριάζει και είναι σύμφωνη με τα αποτελέσματα των μετρήσεων του.

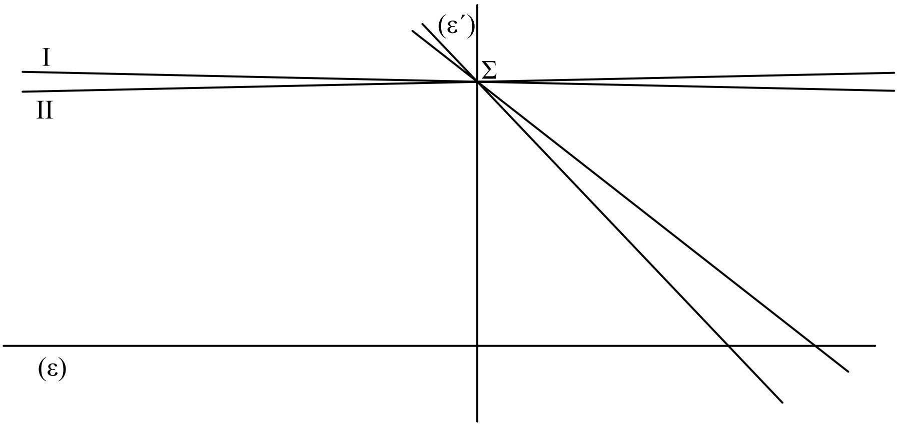
1.3 Ευκλείδεια ή μη Ευκλείδεια Γεωμετρία;

Το αξίωμα που χαρακτηρίζει την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι το **πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη**, σύμφωνα με το οποίο, από ένα σημείο το οποίο δεν είναι πάνω σε μια ευθεία, υπάρχει μία και μόνη παράλληλη προς την ευθεία, που περνά από το σημείο.

Πολλές προσπάθειες έγιναν από την αρχαιότητα για την απόδειξη του αλλά καμιά δεν απέδωσε. Ο Πρόκλος (410 – 485) θεώρησε τις εξής ασυμπτωτικές γραμμές: Υποθέτουμε ότι σε ένα επίπεδο υπάρχει μία ευθεία (ε) και ένα σημείο Σ έξω από την ευθεία (Σχήμα 1.3,1). Θεωρούμε πάνω στο επίπεδο μια άλλη ευθεία (ε΄) που περνά από το σημείο Σ και τέμνει την ευθεία (ε). Υποθέτουμε αρχικά ότι η ευθεία (ε΄) σχηματίζει ίσες γωνίες με την (ε) (είναι κάθετη) και στρέφεται πάνω στο επίπεδο γύρω από το Σ κατά την ορθή φορά.

Το σημείο τομής γλιστρά προς τα δεξιά πάνω στην ευθεία (ε), ώσπου να εξαφανιστεί στο άπειρο. Τότε η ευθεία (ε΄) κατέχει τη θέση Ι και λέγεται ασυμπτωτική ευθεία γραμμή. Αν συνεχίσουμε τη στροφή της ευθείας (ε) κατά την ίδια φορά, θα εμφανιστεί ένα σημείο τομής των ευθειών (ε), (ε΄) από τα αριστερά. Ο Πρόκλος δέχεται ότι, πριν εμφανιστεί το σημείο τομής από τα αριστερά, η ευθεία (ε΄) θα στραφεί κατά μία μικρή γωνία και, μόλις εμφανιστεί το άλλο σημείο τομής από αριστερά, θα κατέχει τη θέση ΙΙ.

Υπάρχουν τότε δύο ασυμπτωτικές ευθείες γραμμές, η Ι και η ΙΙ. Μια τυχαία θέση της ευθείας (ε΄) που περνά από το σημείο Σ και είναι ανάμεσα στις ασυμπτωτικές γραμμές Ι και ΙΙ δεν τέμνει την ευθεία (ε). Επομένως βλέπουμε ότι υπάρχει όχι μία αλλά τουλάχιστον μία ευθεία του επιπέδου που περνά από το σημείο Σ και δεν τέμνει την ευθεία (ε). Το αδύνατο σημείο σε όλα τα παραπάνω είναι ότι υπάρχει η ασαφής έννοια του απείρου.



Σχήμα 1.3,1
Από το σημείο Σ, μία ευθεία (ε΄) στρεφόμενη πάνω στο επίπεδο του σημείου Σ και της ευθείας (ε), τέμνει την ευθεία (ε).

Η μη αποδοχή του πέμπτου αιτήματος των παραλλήλων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδηγεί στη θεμελίωση άλλων Γεωμετριών εξίσου λογικών και συνεπών, χωρίς αντιφάσεις. Η τιμή της πρώτης θεμελίωσης μη Ευκλείδειων Γεωμετριών ανήκει στο Ρώσο Nikolay Ivanowitsch Lobachevsky (1792–1856) και τον Ούγγρο Johann Bolyai (1802–1860).

Οι **μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες**, που δημιουργούνται με την μη αποδοχή του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, είναι η Γεωμετρία του Lobachevsky, η οποία δέχεται ότι από ένα σημείο το οποίο δεν είναι πάνω σε μια ευθεία είναι δυνατό να αχθούν πολλές παράλληλες προς την ευθεία και η Γεωμετρία του Riemann, η οποία δέχεται ότι δεν μπορεί να αχθεί καμιά παράλληλη.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω παραδοχών είναι ότι, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι 180°, ενώ στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες διαφέρει από τις 180° και η διαφορά είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του τριγώνου.

Στη Γεωμετρία του Lobachevsky το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώμου είναι μικρότερο από δύο ορθές και στη Γεωμετρία του Riemann μεγαλύτερο. Ακόμα στη Γεωμετρία του Ευκλείδη ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι π, στη Γεωμετρία του Lobachevsky μεγαλύτερος του π και στη

Γεωμετρία του Riemann μικρότερος του π. Στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες η διαφορά από το π μεγαλώνει όσο αυξάνει το μέγεθος του κύκλου.

Η διαφοροποίηση στην αποδοχή του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη έχει προεκτάσεις και στον ορισμό της ευθείας γραμμής.

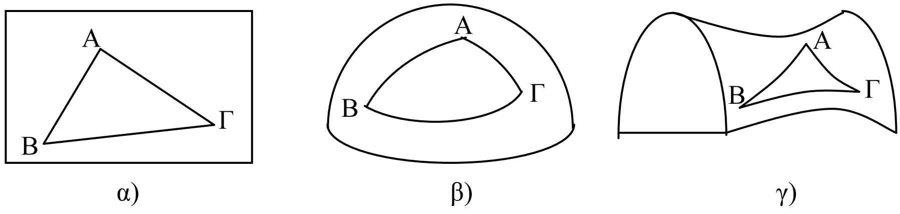
Γενικά δεν μπορούμε να πούμε ότι η Γεωμετρία του χώρου είναι η Ευκλείδεια ή ακόμα ότι δεν αλλάζει από τόπο σε τόπο ή από στιγμή σε στιγμή.

Αν θεωρήσουμε ότι γίνονται μετρήσεις πάνω σε ένα διαφανές επίπεδο, με μονάδα μέτρησης ράβδους του ίδιου μήκους και ότι πάνω από το επίπεδο υπάρχει μια φωτεινή πηγή, οι σκιές των ράβδων πάνω σε μια επίπεδη ή καμπυλωμένη επιφάνεια δίνουν τις ίδιες ακριβώς μετρήσεις. Τα μήκη όμως των σκιών των ράβδων αλλάζουν σχήμα και μέγεθος από θέση σε θέση και οι Ευκλείδειες ευθείες είναι καμπυλωμένες. Τα ίδια ισχύουν αν παρατηρούμε τις μετρήσεις μέσα από ένα σφαιρικό καθρέφτη ή ένα φακό. Σύμφωνα με τον τρόπο μέτρησης, στον ίδιο χώρο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μια Γεωμετρία ή την άλλη και να πούμε ότι ο χώρος είναι π.χ. Ευκλείδειος, Λομπατζέφσκειος ή Ρημάννειος.

Γενικά για δύο διαστάσεις η Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως Γεωμετρία πάνω σε ένα επίπεδο, ενώ μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ως Γεωμετρία πάνω σε μια καμπυλωμένη επιφάνεια, όπου το ρόλο των ευθειών γραμμών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τον παίζουν οι γεωδαισιακές γραμμές πάνω στην επιφάνεια.

Η **γεωδαισιακή γραμμή** ανάμεσα σε δύο σημεία, πάνω σε μια επιφάνεια, είναι η γραμμή με το ελάχιστο μήκος· π.χ. η γεωδαισιακή γραμμή ανάμεσα σε δύο σημεία της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι τόξο του μέγιστου κύκλου που περνά από τα σημεία.

Φυσικά, κατά τις μετρήσεις στοιχειωδών αποστάσεων και στοιχειωδών επιφανειών η Γεωμετρία θεωρείται Ευκλείδεια, αφού ένα πολύ μικρό τμήμα μιας καμπύλης γραμμής μπορεί να εξομοιωθεί με ευθύγραμμο τμήμα και ένα πολύ μικρό μέρος μιας καμπύλης επιφάνειας μπορεί να εξομειωθεί με μικρό τμήμα επίπεδης επιφάνειας.



Σχήμα 1.3,2
Απεικόνιση Γεωμετριών δύο διαστάσεων πάνω σε επιφάνεια
α) Ευκλείδεια πάνω σε επίπεδο
β) Ρημάννεια πάνω σε σφαίρα και
γ) Λομπατζέφσκεια πάνω σε σαγματοειδή επιφάνεια.

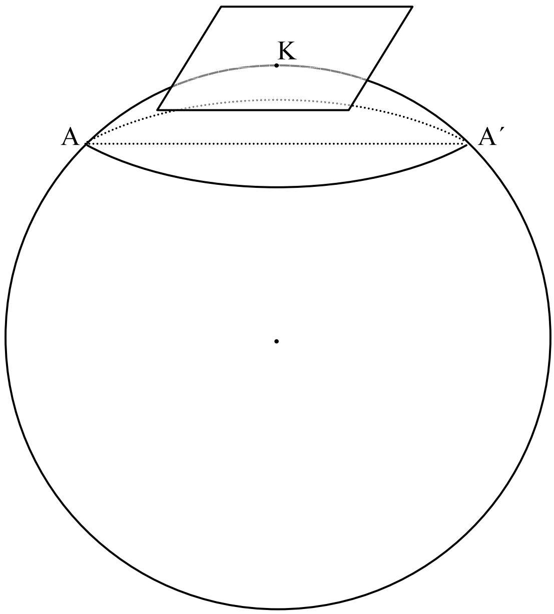
Στα σχήματα 1.3,2 το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στο επίπεδο, σχήμα α), είναι δύο ορθές (Ευκλείδεια Γεωμετρία), πάνω σε σφαιρική επιφάνεια, σχήμα β), μεγαλύτερο από δύο ορθές (Ρημάννεια Γεωμετρία) και πάνω σε σαγματοειδή επιφάνεια, σχήμα γ), μικρότερο από δύο ορθές (Λομπατζέφσκεια Γεωμετρία).

Επίσης λέμε ότι η επιφάνεια και η αντίστοιχη Γεωμετρία παρουσιάζει καμπυλότητα μηδέν (επίπεδο), θετική (σφαιρική επιφάνεια) και αρνητική (σαγματοειδής επιφάνεια).

1.4 Η Γεωμετρία του Riemann

Ο τύπος της Γεωμετρίας που χρησιμοποιούμε είναι θέμα ορισμού. Αν οι μετρήσεις γίνονται με απόλυτα στερεές ράβδους, η Γεωμετρία είναι Ευκλείδεια, ενώ αν το μήκος της ράβδου, που χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης, αλλάζει από τόπο σε τόπο, η Γεωμετρία είναι μη Ευκλείδεια.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εκφραστεί σε Ευκλείδειο χώρο μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Πολύ βολικά μπορεί να εκφραστεί μια δισδιάστατη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία σε τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Έτσι π.χ. κάνοντας μετρήσεις με μικρές στερεές Ευκλείδειες ράβδους (αμετάβλητες) πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, τα αποτελέσματα είναι αντιπροσωπευτικά της Γεωμετρίας του Riemann δύο διαστάσεων. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι υπάρχει συνέπεια, αφού συνεπής είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία τριών διαστάσεων.

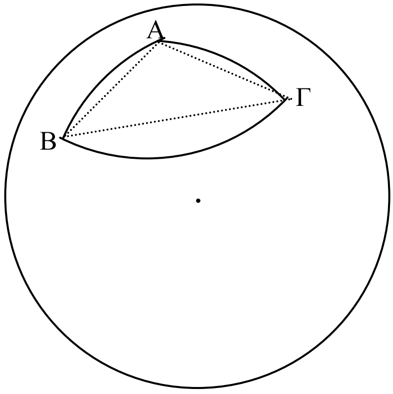


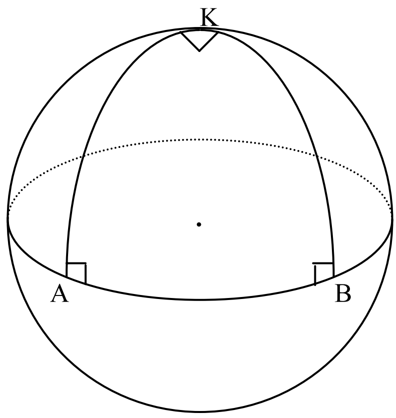
Σχήμα 1.4,1
Επίπεδο εφαπτόμενο της επιφάνειας σφαίρας και κύκλος πάνω σε επιφάνεια σφαίρας.

Σύμφωνα με τον Gauss, ας θεωρήσουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας (Σχήμα 1.4,1) και ένα επίπεδο εφαπτόμενο στο σημείο Κ της σφαίρας. Ένα σημείο της επιφάνειας της σφαίρας όσο περισσότερο είναι απομακρυσμένο από το σημείο Κ, τόσο περισσότερο απέχει από το εφαπτόμενο στη σφαίρα επίπεδο. Λόγω της καμπυλότητας της, η επιφάνεια της σφαίρας εκτείνεται στην τρίτη διάσταση του Ευκλείδειου χώρου.

Το ερώτημα που γεννιέται είναι, αν υποθετικά μικρά επίπεδα όντα, που ζούν πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, μπορούν με μετρήσεις να διαπιστώσουν την καμπυλότητα της επιφάνειας της σφαίρας. Ο Gauss έδειξε ότι αυτό είναι δυνατό. Αν τα όντα αυτά κάνουν, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, ένα μεγάλο κύκλο με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα την ΚΑ και μετρήσουν το λόγο του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου, που είναι το τόξο ΑΚΑ΄, θα τον βρουν μικρότερο του π. Ο λόγος αυτός είναι π, αν ως διάμετρος ληφθεί η χορδή ΑΑ΄, αλλά για τα όντα αυτά διάμετρος δεν είναι η χορδή ΑΑ΄ αλλά το τόξο ΑΚΑ΄ που είναι τόξο μέγιστου κύκλου, ο οποίος ενώνει δύο αντιδιαμετρικά σημεία της περιφέρειας και το μήκος του είναι μεγαλύτερο από το μήκος της χορδής ΑΑ΄.

Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου είναι μικρότερος του π και μικραίνει όσο μεγαλώνει το μήκος της ακτίνας του κύκλου. Για τα όντα αυτά το κέντρο του κύκλου είναι το Κ και το ρόλο των ευθυγράμμων τμημάτων τον παίζουν τα τόξα των μέγιστων κύκλων που ενώνουν δύο σημεία. Ένα τέτοιο ον, ξεκινώντας από ένα σημείο της επιφάνειας της σφαίρας και προχωρώντας ευθεία (πάνω σε ένα μέγιστο κύκλο) θα ξαναπεράσει από το σημείο από το οποίο ξεκίνησε, δηλαδή ο κόσμος του είναι κλειστός χωρίς πέρατα, ενώ στον Ευκλείδειο χώρο μια ευθεία γραμμή είναι ανοιχτή, απεριόριστη, χωρίς πέρατα.





Σχήμα 1.4,2
α) Το άθροισμα των γωνιών του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές.
β) Το άθροισμα των γωνιών του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΚΑΒ, που σχηματίζεται από τα τόξα τριών μέγιστων κύκλων κάθετων μεταξύ τους, είναι τρεις ορθές.

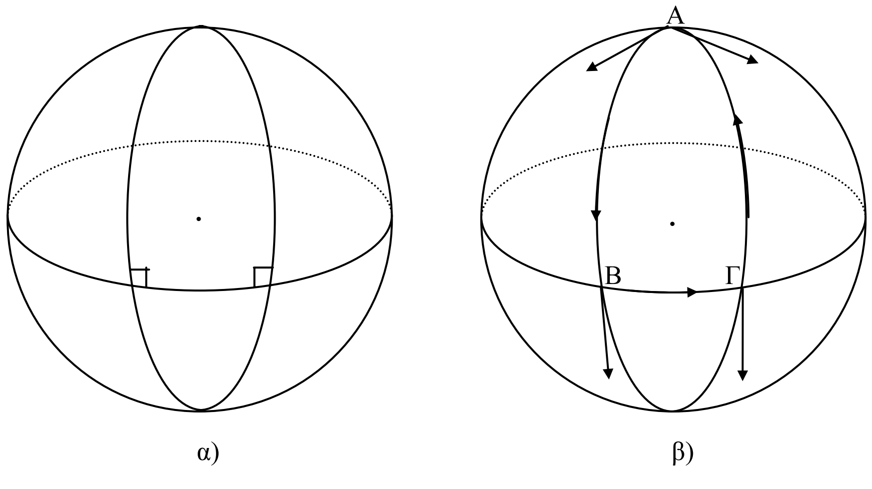
Το ον αυτό, ενώνοντας με ευθείες (γεωδαισιακές γραμμές) τρία σημεία Α, Β, Γ πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (Σχήμα 1.4,2 α), σχηματίζει ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές και η διαφορά από τις δύο ορθές είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του τριγώνου.

Αν δύο κάθετα στο σημείο τομής τους τόξα, τα ΚΑ και ΚΒ, ξεκινούν από τον πόλο Κ της σφαίρας και φτάνουν μέχρι τον ισημερινό, τότε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΚΑΒ (καμπυλόγραμμου) είναι τρεις ορθές (Σχήμα 1.4,2 β).

Για τα όντα αυτά δεν ισχύει το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Αν φέρει πάνω σ' ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας, π.χ. τον ισημερινό, δύο κάθετους μεσημβρινούς (Σχήμα 1.4,3 α), αυτοί θα συναντηθούν στους πόλους και θα έχουν δύο κοινά σημεία, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία σύμφωνα με την οποία δύο σημεία ορίζουν τη θέση μιας ευθείας.

Αν θεωρήσουμε ότι η ακτίνα της σφαίρας γίνεται ολοένα μεγαλύτερη, οι μετρήσεις πλησιάζουν εκείνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και για $R = \infty$ συμπίπτουν με αυτές.

Αν στη συνέχεια η επιφάνεια γίνει σαγματοειδής (με φανταστική ακτίνα iR), οι μετρήσεις χάνουν τον Ευκλείδειο χαρακτήρα τους και συμφωνούν με την Γεωμετρία του Lobachevsky. Η καμπυλότητα της επιφάνειας από θετική (σφαίρα) γίνεται μηδέν (επίπεδο) και στη συνέχεια είναι αρνητική (σαγματοειδής επιφάνεια). Γενικά οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες δύο διαστάσεων μπορεί να θεωρηθούν ως Γεωμετρίες πάνω σε επιφάνεια.



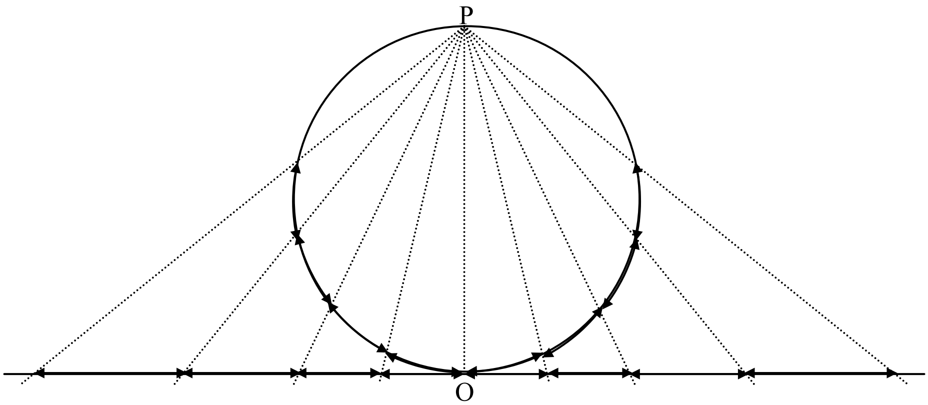
Σχήμα 1.4,3

α) Δύο μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας, κάθετοι στον ίδιο μέγιστο κύκλο έχουν δύο κοινά σημεία.

β) Κίνηση διανύσματος κατά μήκος του ισημερινού και δύο μεσημβρινών, με επιστροφή στην αρχική του θέση.

Ένα παράδοξο μιας μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το εξής: Έστω ότι ένα μικρό διάνυσμα στο βόρειο πόλο μιας σφαίρας, π.χ. στο σημείο Α, είναι εφαπτόμενο ενός μεσημβρινού, στο επίπεδο του (Σχήμα 1.4,3 β). Το διάνυσμα αυτό κινούμενο κατά μήκος ενός μεσημβρινού, με παράλληλη μετατόπιση φτάνει στο σημείο Β. Εδώ παράλληλη θεωρείται η μετατόπιση ενός διανύσματος, όταν κατά την μετατόπιση αυτή διατηρείται η γωνία του διανύσματος με τις γεωδαισιακές γραμμές, στο σημείο επαφής τους. Στη συνέχεια διατηρώντας την παραλληλία κινείται κατά μήκος ενός τόξου γεωδαισιακής γραμμής και φτάνει στο σημείο Γ. Κατόπιν κινούμενο κατά μήκος του μεσημβρινού ΓΑ επιστρέφει στην αρχική του θέση Α. Παρατηρούμε ότι, όταν θα επιστρέψει στην αρχική του θέση, η τελική του κατεύθυνση διαφέρει από την αρχική.

Η Γεωμετρία του Riemann πάνω στη σφαίρα, μπορεί να απεικονιστεί πάνω στο επίπεδο ως εξής. Θεωρούμε μια σφαίρα, πάνω στην επιφάνεια της οποίας κάνουμε μετρήσεις με μικρές στερεές αμετάβλητες ράβδους και ένα εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο Ο, όπως στο σχήμα 1.4,4. Από το σημείο Ρ, αντιδιαμετρικού του σημείου Ο, φέρνουμε ευθείες οι οποίες τέμνουν την επιφάνεια της σφαίρας και φτάνουν μέχρι το επίπεδο. Σε κάθε σημείο της σφαίρας αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου και αντίστροφα, εκτός από το σημείο Ρ. Εύκολα φαίνεται ότι, όλοι οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας που περνούν από τα σημεία Ο, Ρ, προβάλλονται ως ευθείες πάνω στο επίπεδο το οποίο εφάπτεται στη σφαίρα στο σημείο Ο. Ο ισημερινός της σφαίρας προβάλλεται ως κύκλος με κέντρο το Ο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε κύκλος της σφαίρας προβάλλεται ως κύκλος ή έλλειψη πάνω στο επίπεδο.



Σχήμα 1.4,4
Απεικόνιση της Γεωμετρίας του Riemann πάνω σε επίπεδο.
Τομή της σφαίρας, κάθετη στο εφαπτόμενο της επίπεδο στο σημείο Ο.
Οι διακεκομμένες γραμμές περνούν από τις άκρες των μονάδων μέτρησης, που είναι ίσες πάνω στη σφαίρα και μεταβλητές όπως (οι σκιές τους) πάνω στο επίπεδο.

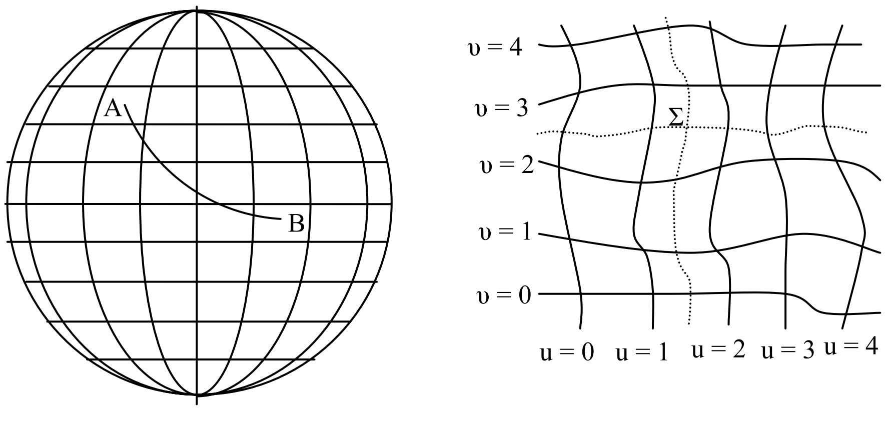
Αν με ίδιες μικρές στερεές αμετάβλητες ράβδους κάνουμε μετρήσεις πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας και στο σημείο Ρ υπάρχει μια φωτεινή πηγή, οι σκιές των μονάδων μέτρησης πάνω στο επίπεδο δίνουν μετρήσεις με μονάδες (κάθε ράβδος μία μονάδα) των οποίων το μήκος μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο. Έτσι έχουμε απεικόνιση της δισδιάστατης Γεωμετρίας του Riemann πάνω στο επίπεδο. Είναι φανερό ότι, αφού η επιφάνεια της σφαίρας είναι ορισμένη και το εμβαδόν της αντιστοιχεί σε όλο το επίπεδο που είναι απέραντο, με τις μεταβλητές μονάδες μέτρησης, το αποτέλεσμα καμιάς μέτρησης πάνω στο επίπεδο δεν είναι άπειρο.

Η παράσταση μιας μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας τριών διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο συναντά ανυπέρβλητες δυσκολίες. Δεν είναι δυνατό μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία τριών διαστάσεων να παρασταθεί σε Ευκλείδειο χώρο τεσσάρων διαστάσεων, όπως μία μη Ευκλείδεια Γεωμετρία δύο διαστάσεων μπορεί να παρασταθεί σε Ευκλείδειο χώρο τριών διαστάσεων. Γενικά αποδεικνύεται ότι για την παράσταση μη Ευκλείδειου χώρου n διαστάσεων, απαιτείται Ευκλείδειος χώρος όχι n+1 αλλά n(n+1)/2 διαστάσεων.

1.5 Γεωμετρία πάνω σε καμπύλες επιφάνειες

Η μέτρηση μηκών και εμβαδών πάνω σε ένα επίπεδο, με τη χρήση συντεταγμένων και τη χρησιμοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας γίνεται πολύ απλά και εύκολα. Τα πράγματα διαφέρουν και γίνονται πολυπλοκότερα για μετρήσεις πάνω σε καμπύλες επιφάνειες. Αυτό φαίνεται αν επιχειρήσουμε να κάνουμε μετρήσεις των εμβαδών αγρών, ακόμα και κανονικών σχημάτων, που βρίσκονται σε ένα λόφο ή σε μια κοιλάδα. Αφού η επιφάνεια τους δεν είναι επίπεδη, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία, παρά μόνο σε πολύ μικρές περιοχές, που μπορούμε να τις θεωρήσουμε επίπεδες. Η επιφάνεια τους δεν μπορεί να καλυφθεί από ένα δίκτυο τετραγώνων, στο οποίο η επιφάνεια κάθε τετραγώνου είναι π.χ. 1 m^2, γιατί η επιφάνεια τους δεν είναι επίπεδη και γενικά μια επίπεδη επιφάνεια δεν μπορεί να απλωθεί εφαρμοστά πάνω σε μια μη επίπεδη παρά σε ελάχιστες περιπτώσεις (π.χ. πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια) και αντίστροφα.

Το ίδιο ισχύει αν καλύψουμε τη Γη με ένα δίκτυο καθέτων μεταξύ τους γραμμών, όπως π.χ. μεσημβρινών και παραλλήλων με κανονική βαθμολόγηση, π.χ. μία μονάδα για δύο διαδοχικές τομές ενός μεσημβρινού από δύο παραλλήλους ή ενός παραλλήλου από δύο μεσημβρινούς κάθε 1°. Λόγω της καμπυλότητας της Γης, ένα καμπυλόγραμμο τετράγωνο κοντά στον ισημερινό, του οποίου κάθε πλευρά είναι 1°, δεν έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα άλλο τετράγωνο πλευράς 1° κοντά στους πόλους (Σχήμα 1.5,1 α).



α) β)

Σχήμα 1.5,1
α) Ένα δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων καλύπτει τη Γη.
β) Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες πάνω σε επιφάνεια.

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία Α, Β πάνω στην επιφάνεια της Γης, μετριέται όχι από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία, αλλά από το μήκος του τόξου της γεωδαισιακής γραμμής (μέγιστου κύκλου) που περνά από τα σημεία. Οι αποστάσεις που μετρούμε πάνω στην επιφάνεια της Γης δεν είναι Ευκλείδειες παρά μόνο κατά προσέγγιση για πολύ μικρές περιοχές.

Όπως ορίζουμε τις Ευκλείδειες συντεταγμένες πάνω σε ένα επίπεδο, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες πάνω σε μια επιφάνεια. Θεωρούμε ότι η επιφάνεια έχει χαραγμένο πάνω της ένα δίκτυο γραμμών u, υ. Οι γραμμές u δεν τέμνονται μεταξύ τους ούτε και οι γραμμές υ. Από κάθε σημείο Σ της επιφάνειας περνά μία γραμμή u και μία γραμμή υ (Σχήμα 1.5,1 β). Οι γραμμές αυτές έχουν αρίθμηση $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Το σύστημα αυτό των συντεταγμένων λέγεται **σύστημα συντεταγμένων του Gauss**.

Οι συντεταγμένες γραμμές u, υ δεν ισαπέχουν μεταξύ τους, όπως μπορεί να μην ισαπέχουν οι παράλληλοι ή οι κάθετοι δρόμοι μιας πόλης, οι γραμμές σε ένα δίχτυ ή οι μεσημβρινοί της Γης. Η απόσταση δύο σημείων Α, Β που βρίσκονται πάνω στην ίδια καμπύλη υ, στα σημεία που τέμνονται από τις καμπύλες u που διαφέρουν κατά 1, δεν είναι 1, όπως και όταν διαφέρουν κατά Δu δεν είναι Δu. Το Δu δίνει πόσο αυξήθηκε η τιμή του u, όχι όμως και της απόστασης, όπως η απόσταση δύο σημείων που βρίσκονται πάνω στον ίδιο παράλληλο της Γης δεν μπορεί να δοθεί από τη διαφορά των γεωγραφικών μηκών, διότι για την ίδια διαφορά γεωγραφικών μηκών η απόσταση ελαττώνεται όσο πλησιάζουμε από τον ισημερινό προς τους πόλους.

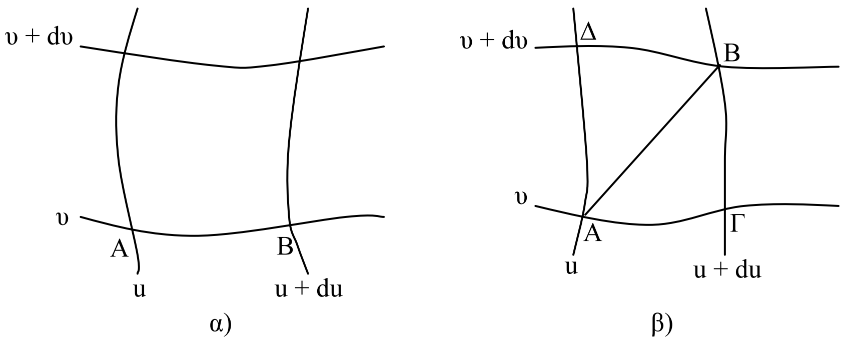
Όπως η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία πάνω στον ίδιο παράλληλο εξαρτάται από τη θέση και είναι ανάλογη της διαφοράς των γεωγραφικών μηκών, έτσι και η απόσταση ds δύο πολύ γειτονικών σημείων πάνω στην καμπύλη υ είναι ανάλογη του du, δηλαδή $ds = \lambda du$. Ο συντελεστής αναλογίας λ εξαρτάται από τη θέση στην οποία βρίσκονται τα γειτονικά σημεία. Συνήθως, επειδή είναι ευχερέστερη η χρήση του ds^2, θέτουμε $ds^2 = g_{11}du^2$.

Αν φανταστούμε δύο μεσημβρινούς της Γης, τα τόξα δύο παραλλήλων που αρχίζουν από τον ένα και καταλήγουν στον άλλο δεν είναι ίσα. Το g_{11} είναι συνάρτηση του γεωγραφικού πλάτους.

Είναι φανερό ότι πάνω σε ένα επίπεδο, με ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γραμμών που ισαπέχουν, το g_{11} έχει παντού την ίδια τιμή. Γενικά η τιμή του g_{11} αλλάζει από σημείο σε σημείο και είναι σαν πληροφορία για το είδος του δικτύου και αντίστροφα, το είδος του δικτύου δίνει πληροφορίες για την τιμή του g_{11} σε κάθε σημείο. Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο για την απόσταση δύο γειτονικών σημείων πάνω στην καμπύλη u (Σχήμα 1.5,2 α) έχουμε, $ds^2 = g_{22}d\upsilon^2$. Συνήθως τα γειτονικά σημεία Α, Β βρίσκονται πάνω σε δύο διαφορετικές γειτονικές γραμμές u, υ και έχουν αντίστοιχα συντεταγμένες u, υ και $u + du$, $\upsilon + d\upsilon$ (Σχήμα 1.5,2 β). Τότε:

$$ds^2 = AB^2, \quad A\Gamma^2 = g_{11}du^2, \quad A\Delta^2 = g_{22}d\upsilon^2$$

Γενικά δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, γιατί οι γραμμές u, υ δεν είναι οπωσδήποτε κάθετες μεταξύ τους. Σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στην Τριγωνομετρία, το ds^2 εξαρτάται και από το γινόμενο $dud\upsilon$ και τη μεταξύ τους γωνία. Τα μικρά ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ θεωρούνται ευθύγραμμα. Θέτουμε:



Σχήμα 1.5,2
α) Δύο γειτονικά σημεία Α, Β, πάνω στην ίδια συντεταγμένη γραμμή υ.
β) Δύο γειτονικά σημεία πάνω σε δύο διαφορετικές συντεταγμένες γραμμές u, υ.

$$ds^2 = g_{11}du^2 + g_{12}dud\upsilon + g_{21}dud\upsilon + g_{22}d\upsilon^2$$

Επειδή στον ίδιο τόπο $g_{12} = g_{21,}$ αφού η τιμή τους εξαρτάται από τη θέση, γράφουμε:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}du^2 + 2g_{12}dud\upsilon + g_{22}d\upsilon^2 \;\Rightarrow \\ ds^2 &= \sum g_{ik}dx_i dx_k \,,\; x_1 = u,\; x_2 = \upsilon,\; i,\, k = 1,\, 2 \end{aligned} \qquad (1.5,1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι δείκτες που επαναλαμβάνονται δύο φορές έχουν προσθετική ιδιότητα, μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο της πρόσθεσης Σ και να γράψουμε απλούστερα:

$$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \qquad (1.5,2)$$

Η σχέση αυτή οφείλεται στον Gauss και κατέχει εξέχουσα θέση στη Θεωρία της Σχετικότητας.

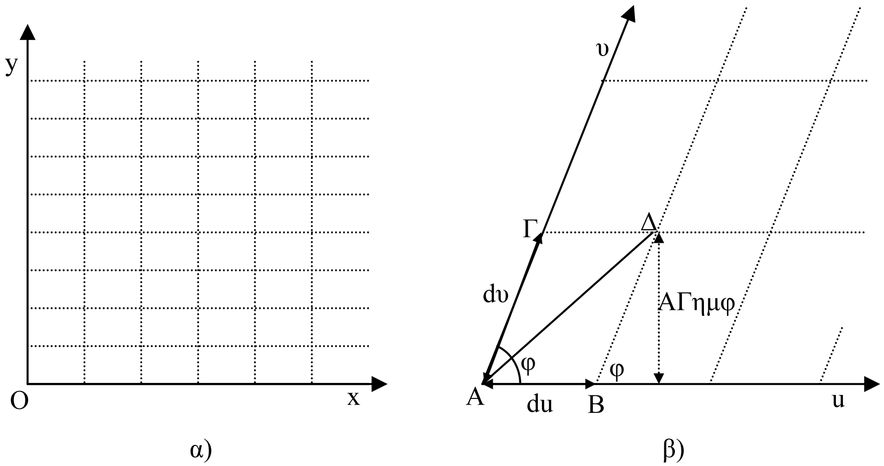
Αν τα σημεία Α, Β είναι μακρινά πρέπει να προσθέσουμε όλα τα στοιχειώδη μήκη από το σημείο Α μέχρι το Β, κατά μήκος μιας γεωδαισιακής γραμμής.

Παραδείγματα

Αν στο επίπεδο δίκτυο ορθογώνιων συντεταγμένων x, y του επίπεδου σχήματος 1.5,3 α), όπου τα x, y είναι οι κανονικές μετρήσεις μήκους, αλλάξουμε τις συντεταγμένες ώστε x = 2u, y = υ/3, για το στοιχειώδες μήκος ds έχουμε:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$
$$\Rightarrow \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$
$$ds^2 = 4du^2 + \frac{1}{9}d\upsilon^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dud\upsilon + g_{22}d\upsilon^2$$
$$\Rightarrow \quad g_{11} = 4, \quad g_{22} = \frac{1}{9}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

Για ένα δίκτυο συντεταγμένων με παράλληλες πλάγιες γραμμές, όπως στο σχήμα 1.5,3 β) για το οποίο κατά τη διεύθυνση u το μήκος της μονάδας αρίθμησης είναι α και κατά τη διεύθυνση υ είναι β, έχουμε ΑΒ = αdu, ΑΓ = βdυ, ΑΔ = ds. Είναι:



Σχήμα 1.5,3
α) Δίκτυο ορθογώνιων συντεταγμένων σε επίπεδο.
β) Δίκτυο πλαγιογώνιων παράλληλων συντεταγμένων σε επίπεδο.

$$A\Delta^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2 \cdot AB \cdot B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \;\Rightarrow$$
$$ds^2 = \alpha^2 du^2 + \beta^2 d\upsilon^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi dud\upsilon \;\Rightarrow$$
$$g_{11} = \alpha^2, \quad g_{22} = \beta^2, \quad g_{12} = g_{21} = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Αν η αρίθμηση είναι σε μονάδες μήκους, τότε

$$\alpha = 1, \beta = 1 \;\Rightarrow\; g_{11} = g_{22} = 1, \; g_{12} = g_{21} = \sigma\upsilon\nu\varphi$$

και, αν ακόμα το δίκτυο των παραλλήλων είναι ορθογώνιο,

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Γενικά έχουμε:

$$\alpha = \sqrt{g_{11}}\,,\quad \beta = \sqrt{g_{22}}\,,\quad g_{12} = g_{21} = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{g_{12}}{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}$$

Το εμβαδόν dE του στοιχειώδους παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ είναι:

$$dE = AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\varphi = \alpha\beta\eta\mu\varphi du d\upsilon$$

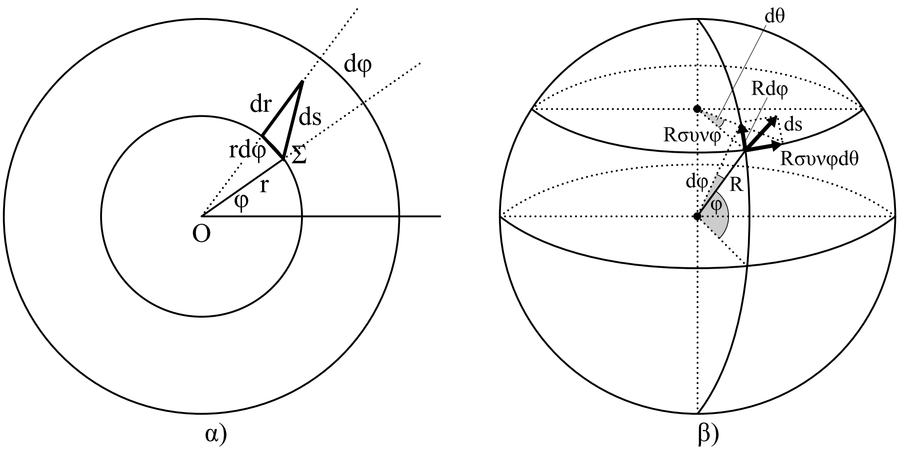
$$\eta\mu\varphi = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad \Rightarrow$$

$$dE = \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du d\upsilon$$

Ας εξετάσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων γνωστό ως "**πολικές συντεταγμένες**" στο επίπεδο (Σχήμα 1.5,4 α). Κάθε σημείο Σ του επιπέδου ορίζεται από τη γωνία φ, που σχηματίζει η ευθεία η οποία το ενώνει με το σημείο Ο με μια ορισμένη κατεύθυνση και η απόσταση του r από το σημείο Ο. Εδώ $u = \varphi$, $\upsilon = r$, το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος μιας ακτίνας είναι dr και κατά μήκος του τόξου που αντιστοιχεί σε στοιχειώδη γωνία dφ είναι rdφ.

Για κάθε στοιχειώδες μήκος ds και τις τιμές του g_{ik} έχουμε:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2\,,\quad g_{11} = r^2\,,\quad g_{22} = 1\,,\quad g_{12} = 0$$



Σχήμα 1.5,4
α) Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο.
β) Σφαιρικές συντεταγμένες στην επιφάνεια σφαίρας.

Τα ίδια ισχύουν και για το σύστημα συντεταγμένων σε ένα δίκτυο με μεσημβρινούς και παραλλήλους πάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R (Σχήμα 1.5,4 β). Αν θέσουμε φ το γεωγραφικό πλάτος και θ το γεωγραφικό μήκος, με $u = \theta$, $\upsilon = \varphi$, επειδή οι καμπύλες του δικτύου σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας είναι κάθετες μεταξύ τους, για το στοιχειώδες μήκος ds, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, έχουμε:

$$ds^2 = R^2 συν^2 φ dθ^2 + R^2 dφ^2 \,,\;\; g_{11} = R^2 συν^2 φ \,,\;\; g_{22} = R^2 \,,\;\; g_{12} = 0$$

Γενικά συνοψίζοντας τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι, σε ένα δίκτυο συντεταγμένων πάνω σε μια επιφάνεια, από κάθε σημείο της επιφάνειας περνούν δύο αριθμημένες συντεταγμένες γραμμές, οι u και υ, οι οποίες ορίζουν το σημείο (Γκαουσσιανές συντεταγμένες) και αντίστροφα. Με αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων αλλάζει και η αρίθμηση.

Για κάθε σημείο της επιφάνειας υπάρχουν τρεις αριθμοί, οι g_{11}, g_{22}, g_{12} ($g_{21} = g_{12}$) των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από το δίκτυο συντεταγμένων και από τη θέση του σημείου. Όπου οι συντεταγμένες γραμμές u, υ είναι κάθετες μεταξύ τους, $g_{12} = 0$. Όταν οι συντεταγμένες γραμμές u, υ είναι ορθογώνιες, τότε παντού πάνω στην επιφάνεια $g_{12} = g_{21} = 0$.

Αν το δίκτυο συντεταγμένων αποτελείται από παράλληλες ισαπέχουσες γραμμές, οι τιμές των g_{ik} (i, k = 1, 2) είναι σταθερές και, αν η αρίθμηση τους είναι ανά μονάδα μέτρησης, τότε $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1$, $g_{12} = συνθ$, όπου θ η γωνία την οποία σχηματίζουν οι γραμμές u, υ σε κάθε σημείο.

Η απόσταση δύο σημείων πάνω στην επιφάνεια είναι μέγεθος μονόμετρο και αποτελεί ποσότητα αναλλοίωτη. Η στοιχειώδης απόσταση ds και το στοιχειώδες εμβαδόν dE πάνω στην επιφάνεια, δίνονται από τις σχέσεις:

$$ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dυ^2 + 2 g_{12} du dυ$$

$$dE = \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}\, du dυ \;\Rightarrow\; dE = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}^{1/2} du dυ$$

Για μεγαλύτερα μήκη ή εμβαδά, πρέπει να προστεθούν όλα τα στοιχειώδη μήκη ή εμβαδά, που τα αποτελούν αντίστοιχα.

Επισημαίνουμε ακόμα ότι, ένα δίκτυο συντεταγμένων το οποίο εφαρμόζει πάνω σε μια επιφάνεια, δεν εφαρμόζει οπωσδήποτε πάνω σε μια άλλη. Όπως ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το οποίο εφαρμόζει σε μια επίπεδη επιφάνεια δεν μπορεί να εφαρμόσει πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, αντίστροφα ένα δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων, που εφαρμόζει πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, δεν εφαρμόζει πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια. Αυτό συμβαίνει π.χ. στους γεωγραφικούς χάρτες.

Κατά τον ίδιο τρόπο σε τρεις ή γενικά σε n διαστάσεις, για την απόσταση ds έχουμε:

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \qquad i, k = 1, 2, 3 \cdots n$$

Αφού $g_{ik} = g_{ki}$, σε χώρο n διαστάσεων πρέπει για κάθε σημείο να ξέρουμε τις τιμές των g_{ik}, δηλαδή συνολικά n(n+1)/2 τιμές.

Σε χώρο τριών διαστάσεων οι τιμές των g_{ik} είναι 6, ενώ σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων 10. Γενικά οι συντελεστές g_{ik} λέγονται **μετρικοί συντελεστές**.

Σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 \\ + g_{22}dx_2^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 \\ + g_{33}dx_3^2 + 2g_{34}dx_3dx_4 \\ + g_{44}dx_4^2 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι, η αναλλοίωτη σχέση της Κλασικής Φυσικής:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας έχει αντικατασταθεί από τη σχέση του μεσοδιαστήματος στον τετραδιάστατο χώρο του Minkowski. Για το μεσοδιάστημα μπορούμε να γράψουμε:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Με τις παρακάτω αντικαταστάσεις έχουμε:

$$x = x_1\,,\quad y = x_2\,,\quad z = x_3\,,\quad ict = x_4$$
$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

1.6 Φυσική και Γεωμετρία

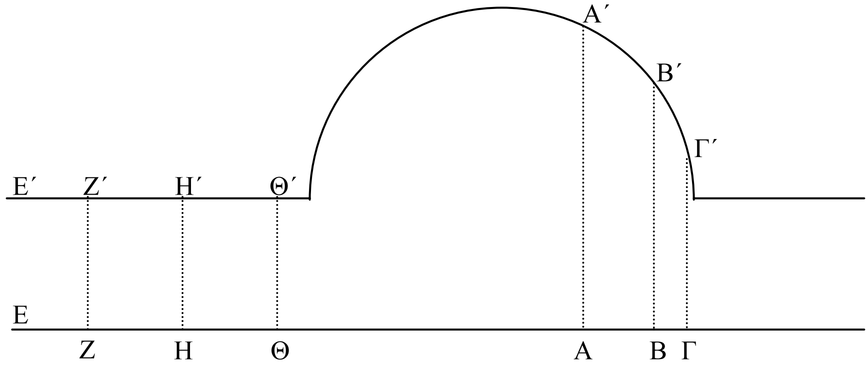
Ο φυσικός χώρος, στον οποίο γίνονται οι μετρήσεις, μπορεί να διαφέρει από ένα θεωρητικό μαθηματικό χώρο. Οι μετρήσεις βοηθούν στην ακριβή περιγραφή των φυσικών φαινομένων και στην έκφραση των φυσικών νόμων.

Ζώντας πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια, μπορούμε με μετρήσεις να το διαπιστώσουμε και να μετρήσουμε την καμπυλότητα της. Μπορούμε όμως με μετρήσεις να βρούμε τη Γεωμετρία του χώρου στον οποίο ζούμε; Ας μελετήσουμε το εξής παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια επίπεδη επιφάνεια Ε΄, σε ένα τμήμα της οποίας υπάρχει ένα ημισφαίριο και από κάτω υπάρχει μια άλλη επίπεδη επιφάνεια Ε παράλληλη προς την Ε΄, όπως στο σχήμα 1.6,1. Μικρά όντα τα οποία ζούν πάνω στην επιφάνεια Ε΄ μπορούν να διαπιστώσουν την ύπαρξη του ημισφαιρίου από την απόκλιση των μετρήσεων τους από την δισδιάστατη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Στο επίπεδο μέρος της επιφάνειας Ε΄, ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι π, ενώ στην επιφάνεια του ημισφαιρίου είναι μικρότερος του π. Θεωρούμε ότι πάνω στην επιφάνεια Ε΄ οι μετρήσεις γίνονται με ίσες μικρές στερεές ράβδους.

Ας υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις πάνω στην επιφάνεια Ε γίνονται με μονάδα μέτρησης τις προβολές των ράβδων μέτρησης της Ε΄ πάνω στην Ε. Για τις προβολές των ράβδων που είναι πάνω στο επίπεδο μέρος της επιφάνειας Ε΄ δεν υπάρχει διαφορά. Αν Ζ΄Η΄= Η΄Θ΄ θα είναι ΖΗ = Ζ΄Η΄, ΗΘ = Η΄Θ΄ και ΖΗ = ΗΘ. Για τα όντα που ζουν πάνω στην επιφάνεια Ε ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία.



Σχήμα 1.6,1
Συμπεράσματα από τις μετρήσεις πάνω σε επιφάνειες με ράβδους σταθερού ή μεταβλητού μήκους.

Στην περιοχή της Ε΄ στην οποία βρίσκεται η καμπύλη επιφάνεια του ημισφαιρίου, ίσες ράβδοι, Α΄Β΄ = Β΄Γ΄, δεν θα δώσουν ίσες προβολές, ΑΒ ≠ ΒΓ.

Ας κάνουμε την εξής υπόθεση. Πάνω στο επίπεδο Ε οι μετρήσεις γίνονται με ίδιες ράβδους όπως και στο Ε΄, αλλά στην περιοχή της προβολής του ημισφαιρίου της επιφάνειας Ε΄, πάνω στην επιφάνεια Ε, μια μυστηριώδης δύναμη μεταβάλλει όλα τα μήκη, σε όλα τα σώματα κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ώστε τα μήκη τους να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες προβολές των μηκών του ημισφαιρίου. Αυτό σημαίνει αλλαγή των μονάδων μέτρησης από θέση σε θέση. Η μεταβολή αυτή του μήκους δεν αφορά μόνο τις ράβδους μέτρησης αλλά όλα τα σώματα, όντα, όργανα μέτρησης κτλ. Έτσι τα όντα της επιφάνειας Ε δεν μπορούν άμεσα να αντιλήφθούν την αλλαγή. Ποιές θα είναι τότε και τι θα δίνουν οι μετρήσεις των όντων της επιφάνειας Ε; Για την περιοχή έξω από την προβολή του ημισφαιρίου της Ε΄, θα διαπιστώσουν ότι η επιφάνεια Ε είναι επίπεδη. Στην περιοχή της προβολής του ημισφαιρίου, τα αποτελέσματα των μετρήσεων θα είναι ακριβώς όπως και των κατοίκων της επιφάνειας Ε΄, π.χ. ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του θα είναι μικρότερος του π. Επειδή στην περιοχή της προβολής του ημισφαιρίου όλα τα υλικά παθαίνουν την ίδια παραμόρφωση, τα όντα που ζουν πάνω στην επιφάνεια Ε δεν μπορούν να αντιληφθούν τη μεταβολή του μήκους των ράβδων, γι' αυτά θα είναι ΑΒ = ΒΓ και θα διαπιστώσουν ότι στην περιοχή της προβολής του ημισφαιρίου υπάρχει ένα ημισφαίριο!

Η μυστηριώδης δύναμη που προκαλεί τις παραμορφώσεις δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή, γιατί όλα τα σώματα μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο. Αν τα πάντα στην επιφάνεια Ε, όντα και σώματα, αποτελούνταν από το ίδιο υλικό, η μυστηριώδης δύναμη θα μπορούσε, π.χ., να οφείλεται στην τοπική μεταβολή της θερμοκρασίας.

Η μυστηριώδης αυτή δύναμη, εκτός από την ένδειξη αλλαγής της Γεωμετρίας δεν υπάρχει άλλος τρόπος να ανιχνευτεί. Αν οι κάτοικοι της επιφάνειας Ε γνωρίζουν ότι η επιφάνεια στην οποία ζουν είναι πραγματικά επίπεδη, θα καταλήξουν σε διαπιστώσεις από την απόκλιση των μετρήσεων τους από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η επίδραση της θερμοκρασίας δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή κατά άλλον τρόπο. Π.χ., αν η μεταβολή της θερμοκρασίας επηρεάζει όλα τα σώματα κατά τον ίδιο τρόπο, ο υδράργυρος ενός θερμομέτρου θα διαστέλλεται όσο και το γυαλί. Αν η επίδραση της θερμοκρασίας δεν είναι ίδια σε όλα τα υλικά, η ύπαρξη της επίδρασης κάποιας δύναμης θα διαπιστωνόταν εύκολα από τη διαφορετική διαστολή των υλικών, π.χ. του υδραργύρου και του γυαλιού. Η Γεωμετρία τότε των όντων της επιφάνειας Ε θα μπορούσε να διαφέρει, αν οι ράβδοι που χρησιμοποιούν για τις μετρήσεις τους είναι από το υλικό άλφα ή από το υλικό βήτα. Η δύναμη που αναπτύσσεται από την αλλαγή της θερμοκρασίας, θα μπορούσε να ανιχνευτεί εύκολα από τη διαφορετική διαστολή των σωμάτων.

Οι δυνάμεις που επηρεάζουν όλα τα σώματα κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, λέγονται **παγκόσμιες δυνάμεις** και η ύπαρξη τους δεν μπορεί να αποδειχθεί άμεσα.

Στο παράδειγμα μας μπορούμε να πούμε ότι οι κάτοικοι των επιφανειών Ε΄ και Ε, με τις μετρήσεις που κάνουν, έχουν εξίσου δίκιο λέγοντας ότι, στην επιφάνεια τους υπάρχει ένα ημισφαίριο ή ότι η επιφάνεια τους είναι επίπεδη και αλλάζει η Γεωμετρία.

Συνεπώς η Γεωμετρία γίνεται μια φυσική επιστήμη, που επαληθεύεται από το πείραμα. Τα φυσικά φαινόμενα μπορεί να περιγραφούν με διαφορετικές Γεωμετρίες. Σύμφωνα με τον Poincaré, οι νόμοι της Φυσικής μπορεί πάντοτε να διατυπωθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε τα φυσικά φαινόμενα να περιγράφονται από μια Γεωμετρία που εκλέξαμε αυθαίρετα. Αν π.χ. διαπιστώσουμε ότι η πορεία μιας φωτεινής ακτίνας που στέλνει ένα άστρο δεν ικανοποιεί την Ευκλείδεια Γεωμετρία, δηλαδή δεν είναι ευθεία, μπορούμε να θεωρήσουμε ή ότι για μεγάλες αποστάσεις γίνεται εμφανές ότι ο χώρος δεν είναι Ευκλείδειος ή ότι ο χώρος είναι Ευκλείδειος και κάποια δύναμη καμπυλώνει την πορεία των φωτεινών ακτίνων. Η εκλογή μας μπορεί να γίνει αυθαίρετα. Το φυσικό και το γεωμετρικό μέρος της περιγραφής είναι συμπληρωματικά. Είναι φανερό ότι η εκλογή μιας Γεωμετρίας στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων αλλάζει τη μορφή των φυσικών νόμων.

Ο Einstein στο άρθρο του "Geometry and Experience", για τη θέση αυτή του Poincaré λέει ότι η Γεωμετρία (Γ) δεν δηλώνει τίποτα για την συμπεριφορά των σωμάτων, αλλά η Γεωμετρία μαζί με τη Φυσική (Φ) μπορεί να το πράξει και μόνο το σύνολο Γεωμετρία και Φυσική (Γ + Φ) μπαίνει σε πειραματική δοκιμασία.

Γενικά ανοίγονται δυο δρόμοι για την ανάπτυξη των θεωριών της Φυσικής. Ο ένας είναι ο δρόμος του Poincaré, σύμφωνα με τον οποίο διαλέγουμε την απλούστερη κατάλληλη Γεωμετρία και πάνω σ' αυτή διατυπώνουμε τους νόμους της Φυσικής. Ο άλλος δρόμος είναι του Einstein. Σύμφωνα μ' αυτόν διαλέγουμε το γεωμετρικό πρότυπο που δίνει τη μεγαλύτερη δυνατή απλούστευση της φυσικής αντίληψης των πραγμάτων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην περιγραφή ενός συνόλου φυσικών φαινομένων χρησιμοποιούμε μια Γεωμετρία και εισάγουμε ένα αριθμό πρόσθετων παραδοχών, όπως π.χ., χρησιμοποιώντας την απλούστερη Γεωμετρία εισάγουμε παγκόσμιες δυνάμεις (δρόμος του Poincaré), ή αλλάζουμε τη χωροχρονική περιγραφή των φαινομένων με τέτοιο τρόπο, ώστε να μειώσουμε στο ελάχιστο τον αριθμό των παραδοχών· π.χ. χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη Γεωμετρία, ώστε να μη χρειάζεται να καταφύγουμε σε παγκόσμιες δυνάμεις (δρόμος του Einstein).

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε ότι, σύμφωνα με τους Lorentz και Fitzgerald, η συστολή των μηκών κατά τη διεύθυνση της κίνησης των σωμάτων οφείλεται σε παγκόσμιες δυνάμεις, οι οποίες ενεργούν σε όλα τα σώματα με τον ίδιο τρόπο, ανεξάρτητα από το υλικό τους, αρκεί να έχουν την ίδια κινητική κατάσταση (δρόμος του Poincaré). Η παραδοχή αυτή αφήνει απείραχτη την αντίληψη περί χώρου και χρόνου της Κλασικής Φυσικής.

Αντίθετα ο Einstein, στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, εισάγει νέα αντίληψη για το χώρο και το χρόνο και απορρίπτει την έννοια του αιθέρα και κάθε άλλη τεχνητή παραδοχή για τη συμπεριφορά των φυσικών σωμάτων. Η συστολή των μηκών και η διαστολή του χρόνου, σε κινούμενα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, έχει κινηματική παρά δυναμική ερμηνεία. Δηλαδή ο Einstein θεωρεί τις παγκόσμιες δυνάμεις ανύπαρκτες και αυτό οδηγεί σε μια Γεωμετρία με απλούστερες σχέσεις.

Με τον ίδιο τρόπο ενεργεί ο Einstein στη θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σ' αυτήν ο Einstein απορρίπτει την πατροπαράδοτη αντίληψη της δύναμης βαρύτητας, η οποία επιδρά πάνω σε όλα τα σώματα με τον ίδιο τρόπο ανεξάρτητα από τη σύσταση τους (παγκόσμια δύναμη) και συνδέει τη βαρύτητα με την καμπυλότητα του χωροχρόνου, όταν υπάρχει μάζα. Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, οι κινήσεις αδράνειας των σωμάτων γίνονται κατά μήκος μιας γεωδαισιακής γραμμής στον καμπύλο χωρόχρονο.

Συνεπώς η εκτροπή μιας ακτίνας φωτός από την ευθεία πορεία κοντά σε μια μάζα, σύμφωνα με τον Poincaré οφείλεται σε κάποιες δυνάμεις, ενώ αντίθετα στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας η πορεία του φωτός είναι μια γεωδαισιακή γραμμή στον καμπύλο χωρόχρονο, χωρίς την επίδραση καμιάς δύναμης.

Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι, οι παγκόσμιες δυνάμεις φαίνεται να έχουν κάτι το μεταφυσικό, κάτι που δεν έχει θέση στη σημερινή αντίληψη περί κόσμου. Με την εμμονή στη διατήρηση της κλασικής αντίληψης περί χώρου και χρόνου, για νέα φαινόμενα της Φυσικής θα έπρεπε να εισάγουμε νέες δυνάμεις, ώστε το τελικό οικοδόμημα της Φυσικής να είναι πολύπλοκο και τεχνητό. Αντίθετα η απόρριψη της αποδοχής των παγκόσμιων δυνάμεων, επιτρέπει καλύτερη και απλούστερη ανάπτυξη της Φυσικής, με νέα αντίληψη περί χώρου και χρόνου. Οι ιδιότητες του χώρου και του χρόνου είναι στενά συνδεμένες με εκείνες της ύλης και αυτές αφορούν τα πειράματα και τα φυσικά φαινόμενα. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι, η απόρριψη των παγκόσμιων δυνάμεων δεν είναι μια σύμβαση, αλλά μια σπουδαία μεθοδολογική αρχή, η οποία είναι στενά συνδεμένη με την απλούστερη φυσική εικόνα του κόσμου.

1.7 Η απόλυτη περιστροφική κίνηση

Γνωρίζουμε ότι, όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα περιστροφής, π.χ. ένας δίσκος, τότε αναπτύσσονται φυγοκεντρικές δυνάμεις, οι οποίες δεν υπάρχουν στην ευθύγραμμη κίνηση. Οι φυγοκεντρικές δυνάμεις μπορούν να δείξουν την περιστροφή ενός σώματος, δεν δείχνουν όμως τη φορά περιστροφής. Σε ένα δίσκο που περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του, μπορούμε να βρούμε τη φορά της περιστροφής του, με τον τρόπο που υπέδειξε ο Newton, ιδίως όταν βρισκόμαστε πάνω στον δίσκο. Πάνω στον περιστρεφόμενο δίσκο παίρνουμε ακόμα ένα δίσκο, ο οποίος περιστρέφεται μαζί με τον πρώτο γύρω από τον ίδιο άξονα. Και στους δύο δίσκους αναπτύσσονται σε ίδια σώματα, τα οποία βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τον κοινό άξονα περιστροφής, ίσες φυγοκεντρικές δυνάμεις. Δίνουμε μια σχετική περιστροφή στο δεύτερο δίσκο ως προς τον πρώτο. Όταν στο δεύτερο δίσκο οι φυγοκεντρικές δυνάμεις αυξηθούν, η σχετική φορά περιστροφής του δεύτερου δίσκου δίνει και τη φορά περιστροφής του πρώτου δίσκου, ενώ όταν οι φυγοκεντρικές δυνάμεις στο δεύτερο δίσκο ελαττωθούν, η φορά περιστροφής του πρώτου δίσκου είναι αντίθετη. Η φορά περιστροφής του δίσκου μπορεί να βρεθεί και από τις δυνάμεις Coriolis που αναπτύσσονται κατά την κίνηση ενός σώματος πάνω στον δίσκο (παρ. 2.2).

Όταν ένας κουβάς με νερό περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του, η μορφή της επιφάνειας του νερού είναι παραβολοειδής από περιστροφή, λόγω των φυγοκεντρικών δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά την περιστροφή πάνω στη μάζα του νερού. Σύμφωνα με τον Newton, κατά το πείραμα της περιστροφής του κουβά με το νερό, οι φυγοκεντρικές δυνάμεις αναπτύσσονται μόνο όταν το νερό περιστρέφεται.

Με πειστικό τρόπο στα επιχειρήματα του Newton απάντησε ο Mach. Σύμφωνα με τον Mach, ο Newton παραβλέπει και δεν παίρνει υπόψη όλες τις μάζες του σύμπαντος που περιβάλλουν το νερό. Η αιτία της ανάπτυξης των φυγοκεντρικών δυνάμεων είναι η περιστροφή του νερού όχι ως προς τον κουβά, αλλά ως προς τις μάζες του σύμπαντος που το περιβάλλουν. Οι φυγοκεντρικές δυνάμεις δεν δείχνουν περιστροφή ως προς κάποιο απόλυτο χώρο, αλλά περιστροφή σε ένα σύστημα αναφοράς που ορίζεται από τα μακρινά άστρα και τη συνολική μάζα του σύμπαντος, που είναι η αιτία των φυγοκεντρικών δυνάμεων. Το ίδιο συμβαίνει και με το εκκρεμές του Foucault, το οποίο δείχνει την περιστροφή της Γης ως προς το σύστημα αυτό.

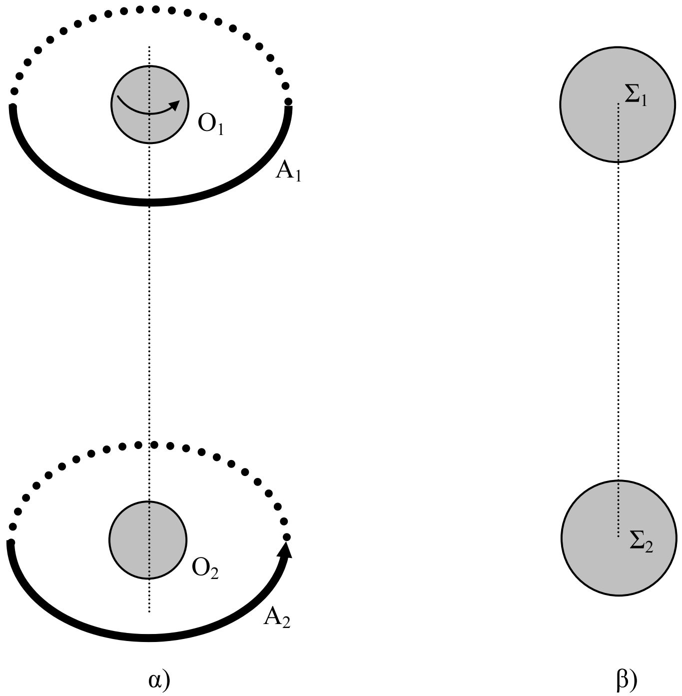
Σύμφωνα με τον Mach, αν το νερό στον κουβά ήταν ακίνητο και όλο το σύμπαν περιστρεφόταν αντίθετα γύρω απ' αυτό, η επιφάνεια του θα γινόταν κοίλη παραβολοειδής από περιστροφή. Η φυγοκεντρική δύναμη αδράνειας μπορεί να εξηγηθεί, σύμφωνα με τη σχετιστική αντίληψη, ως δυναμική επίδραση της βαρύτητας. Αν η μάζα του κουβά δεν ήταν μικρή αλλά πολύ μεγάλη, η σχετική της περιστροφή ως προς το ακίνητο νερό θα προκαλούσε το ίδιο φαινόμενο, κάνοντας την επιφάνεια του νερού κοίλη παραβολοειδή από περιστροφή.

Ας κάνουμε την εξής υπόθεση: Θεωρούμε δύο συστήματα τα οποία το καθένα αποτελείται από ένα σφαιρικό ουράνιο σώμα O_1, O_2 και ένα δακτυλιοειδές κέλυφος από ύλη A_1, A_2 που το περιβάλλει αντίστοιχα, σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των σωμάτων O_1, O_2, όπως στο σχήμα 1.7,1 α). Τα δύο συστήματα είναι το ένα πολύ μακριά από το άλλο, έτσι ώστε το ένα να μην επηρεάζει το άλλο. Φωτεινά σήματα μπορούν να φτάνουν από το ένα σύστημα στο άλλο, ώστε παρατηρητές στα δύο συστήματα να μπορούν να διαπιστώσουν τη σχετική κίνηση του ενός ως προς το άλλο.

Περιστροφή μπορεί να γίνει γύρω από ένα νοητό άξονα που ενώνει τα κέντρα των ουρανίων σωμάτων O_1, O_2. Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει σχετική περιστροφή, έτσι ώστε το κέλυφος A_1 και το σώμα O_2 είναι ακίνητα, ενώ το σώμα O_1 και το κέλυφος A_2 περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Για την κινητική κατάσταση των σωμάτων δυνατές ερμηνείες είναι και οι εξής:

Ερμηνεία Ι	O_1 περιστρέφεται	A_1 ηρεμεί
	O_2 ηρεμεί	A_2 περιστρέφεται

Ερμηνεία ΙΙ	O_1 ηρεμεί	A_1 περιστρέφεται
	O_2 περιστρέφεται	A_2 ηρεμεί



Σχήμα 1.7,1
α) Η περιστροφική κίνηση είναι απόλυτη ή σχετική;
β) Δύο υγρές σφαίρες σε σχετική περιστροφική κίνηση, γύρω από τον ίδιο άξονα.

Οι δύο αυτές ερμηνείες από κινηματικής πλευράς είναι ισοδύναμες, είναι όμως ισοδύναμες και από δυναμικής πλευράς;

Σύμφωνα με τον Newton υπάρχει ο απόλυτος χώρος και δεκτή είναι η ερμηνεία Ι. Από τα δύο σώματα O_1, O_2, φυγοκεντρικές δυνάμεις αναπτύσσονται μόνο στο σώμα O_1, γιατί μόνο το σώμα O_1 περιστρέφεται ως προς τον απόλυτο χώρο και όχι το O_2.

Σύμφωνα με τη δεύτερη ερμηνεία ΙΙ, όταν το κέλυφος A_1 περιστρέφεται ως προς τον απόλυτο χώρο, παράγει δυναμικά ένα πεδίο βαρύτητας στο O_1 προς τα έξω, γι' αυτό ασκούνται ελκτικές δυνάμεις προς τα έξω στο σώμα O_1 και όχι στο σώμα O_2.

Σύμφωνα με τον Ernst Mach, οι φυγοκεντρικές δυνάμεις είναι αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης των μαζών και γι' αυτό πρέπει να αναπτυχθούν φυγοκεντρικές δυνάμεις και στο σώμα O_1 και στο σώμα O_2.

Η μη ικανοποιητική ερμηνεία του Newton, με την αποδοχή περιστροφικής κίνησης ως προς τον απόλυτο χώρο, μπορεί να δειχτεί από το εξής παράδειγμα του σχήματος 1.7,1 β).

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μόνα στο σύμπαν δύο υγρά σφαιρικά σώματα, τα Σ_1, Σ_2, εξίσου παραμορφώσιμα, τα οποία το ένα είναι πολύ μακριά από το άλλο, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της βαρύτητας του ενός πάνω στο άλλο. Τα δύο σώματα μπορούν να κάνουν ομαλή περιστροφική κίνηση, γύρω από ένα νοητό άξονα που ενώνει τα κέντρα τους.

Αν ένας παρατηρητής ακίνητος στο σώμα Σ_1 διαπιστώνει ομαλή περιστροφική κίνηση του σώματος Σ_2, είναι φανερό ότι τότε ένας παρατηρητής ακίνητος στο σώμα Σ_2 διαπιστώνει αντίθετη περιστροφική κίνηση του σώματος Σ_1. Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο παρατηρητές διαπιστώνουν ότι το σώμα Σ_1 είναι σφαιρικό, ενώ το Σ_2 είναι πεπλατυσμένο στους πόλους και έχει το σχήμα ελλειψοειδούς από περιστροφή.

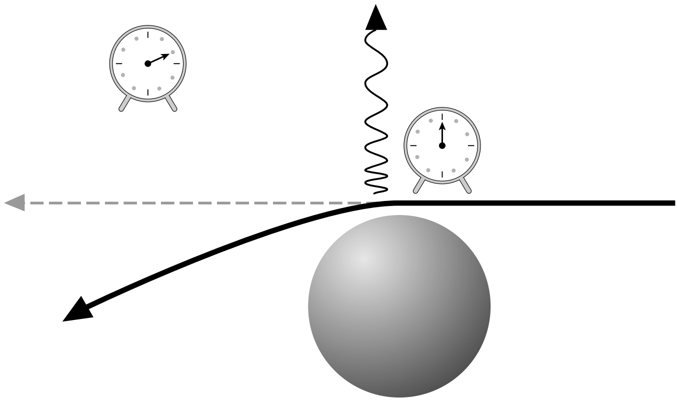
Σύμφωνα με τη Νευτώνεια Μηχανική, η πλάτυνση του σώματος Σ_2 εξηγείται με φυγοκεντρικές δυνάμεις και δείχνει ότι το σώμα Σ_1 είναι ακίνητο και το σώμα Σ_2 περιστρέφεται ως προς τον απόλυτο χώρο.

Το παράδειγμα όμως αυτό δείχνει ότι ο απόλυτος χώρος εισάγεται κατά τρόπο πλαστό. Αφού τα δύο σώματα είναι στην ίδια κινητική κατάσταση το ένα ως προς το άλλο, το σώμα Σ_1 δεν μπορεί να ευθύνεται για την πλάτυνση του σώματος Σ_2 και η παραμόρφωση στα δύο σώματα δεν μπορεί να είναι διαφορετική. Ως αιτία των φυγοκεντρικών δυνάμεων θεωρήθηκε ουσιαστικά ο απόλυτος χώρος. Αν όμως ρωτήσουμε τι είναι ο απόλυτος χώρος και πώς αλλιώς εκδηλώνεται ή ποιες άλλες ιδιότητες έχει πέρα από τη δημιουργία φυγοκεντρικών δυνάμεων, δεν μπορούμε να απαντήσουμε. Αφού από την αρχή υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν άλλα σώματα στο σύμπαν, εκτός από τα Σ_1, Σ_2, το διαφορετικό τους σχήμα, κατά τη σχετική περιστροφή του ενός ως προς το άλλο, είναι ανεξήγητο. Η διαφορά όμως των σχημάτων που αναφέραμε είναι ένα πραγματικό γεγονός; Κανένας δεν μπορεί να κάνει αυτό το πείραμα με τα σώματα Σ_1, Σ_2 μόνα στο σύμπαν. Η διαφορά των σχημάτων τους δεν είναι καθόλου προφανής. Η εξήγηση που δίνει ο Mach είναι ότι, η πλάτυνση οφείλεται στη σχετική περιστροφή ως προς τις υπόλοιπες μάζες του σύμπαντος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεν υπάρχει απόλυτη κίνηση και, συνεπώς, οι νόμοι της Μηχανικής και γενικότερα όλης της Φυσικής, πρέπει να εκφράζονται από τις σχετικές θέσεις και κινήσεις των σωμάτων. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν μπορεί να θεωρηθεί a priori προνομιούχο, όπως τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς της Κλασικής Φυσικής και της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Αλλιώς θα μπορούσαν να εκφραστούν απόλυτες επιταχύνσεις ως προς τα προνομιούχα αυτά συστήματα αναφοράς και όχι μόνο οι σχετικές κινήσεις των σωμάτων.

Μια σημαντική επέκταση της αρχής της σχετικότητας είναι ότι, οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να ισχύουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε όλα τα συστήματα αναφοράς, κατά οποιοδήποτε τρόπο και αν κινούνται.

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ