ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ Γ. ΚΟΥΤΙΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΚΤΙΑ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΛΙΜΕΝΙΚΑ ΕΡΓΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Πρόλογος

Η χώρα μας περιβάλλεται από ακτές μήκους 1500 km. Στον παράκτιο χώρο της αναπτύχθηκε ο κλασικός πολιτισμός. Τον ίδιο παράκτιο χώρο χρησιμοποιεί και ο σύγχρονος άνθρωπος κατά διάφορους τρόπους και για διάφορους σκοπούς. Από την κατασκευή λιμένων για τη διακίνηση εμπορευμάτων και τη διαμόρφωσή του για αναψυχή ως τη διάθεση και διασπορά των βιομηχανικών αποβλήτων και των οικιακών λυμάτων.

Η ικανοποίηση της αρχικής ανάγκης τεχνικής διαμορφώσεως του παράκτιου περιβάλλοντος και της δευτερογενούς πιο επιτακτικής ανάγκης προστασίας του, αποτελούν ένα ουσιώδες μέρος της λειτουργίας του πολιτικού μηχανικού στη σύγχρονη κοινωνία. Για τη βαθύτερη γνώση της φύσεως των διεργασιών που συμβαίνουν στο χώρο αυτό στην φυσική και τη διαμορφωμένη μορφή του, η πειραματική και θεωρητική έρευνα έχουν οδηγήσει σε υπολογιστικές μεθόδους που αποτελούν σε συνδυασμό με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές ισχυρότατα εργαλεία στη διάθεση του μηχανικού.

Σε πανεπιστήμια του εξωτερικού αποτελεί ξεχωριστό αυτοτελές γνωστικό αντικείμενο η μελέτη και έρευνα του παράκτιου χώρου και οργανώνονται προγράμματα σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο στον τομέα αυτό.

Το βιβλίο αυτό έχει στόχο τη συντομότερη δυνατή παρουσίαση, σε εισαγωγικό επίπεδο του γνωστικού περιεχομένου της παράκτιας τεχνικής και της κατασκευής παράκτιων τεχνικών έργων. Απευθύνεται στους φοιτητές των Ελληνικών Πολυτεχνείων προπτυχιακά, σαν εισαγωγή στις μηχανικές διεργασίες στο χώρο των ακτών και στους μηχανικούς μελετητές λιμενικών έργων και έργων προστασίας ακτών.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για τη μελέτη του είναι αυτές που παρέχονται στα Πολυτεχνεία μας σε μαθηματικά-στατιστική, μηχανική των ρευστών και τεχνική μηχανική.

Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη. Την κυματομηχανική, τα μαθηματικά ομοιώματα κυκλοφορίας και διαχύσεως και τη δυναμική των ακτών και των παρακτίων κατασκευών. Το πρώτο μέρος περιέχει κεφάλαια, που αναφέρονται στις θεωρίες των κυματισμών και της στατιστικής μελέτης και προβλέψεως των ανεμογενών κυματισμών. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει τα μαθηματικά ομοιώματα κυκλοφορίας στα οποία περιγράφονται τα ρεύματα λόγω ανέμου και παλίρροιας και οι ταλαντώσεις των φυσικών λεκανών και τα μαθηματικά ομοιώματα της τυρβώδους διαχύσεως στερεών σε αιώρηση και της επιφανειακής διαχύσεως λυμάτων. Το τρίτο μέρος περιλαμβάνει τις δυναμικές φορτίσεις και την αντοχή των παρακτίων κατασκευών και θέματα τεχνικής διαμορφώσεως και αλληλεπιδράσεως ακτών και παρακτίων τεχνικών έργων λόγω μεταφοράς φερτών υλών.

Η έκταση του περιεχομένου του σε συνδυασμό με τον περιορισμό του όγκου του επιβάλλουν, όπως είναι φυσικό, τη διατήρηση της στάθμης του στο εισαγωγικό επίπεδο. Αυτό κρίθηκε απαραίτητο, καθώς το βιβλίο στοχεύει στην υποστήριξη εξαμηνιαίου μαθήματος στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών και από εκπαιδευτική άποψη επελέγη η παρουσίαση και ο ερεθισμός των εκπαιδευομένων στο ευρύτερο περιεχόμενο της Παράκτιας Τεχνικής και όχι σε τμήμα αυτής.

Στο σύγγραμμα δεν περιλαμβάνονται εφαρμογές, που προβλέπεται να συμπεριληφθούν σε επόμενο τόμο.

Ουσιαστική, υπήρξε η συμβολή στη διαμόρφωση του περιεχομένου του, της συμμετοχής του ερευνητικού δυναμικού του Τομέα Υδραυλικής και Τεχνικής Περιβάλλοντος στα Κοινοτικά Ερευνητικά Προγράμματα MAST (Marine Science & Technology) και της εκπαιδευτικής συνεργασίας με τους πανεπιστημιακούς συναδέλφους κκ. Β. Δερμίση, Ι. Κρεστενίτη, Δ. Στεφάνου και τους Διδάκτορες Πολ. Μηχανικούς κκ. Σ. Χριστόπουλο και Θ. Καραμπά.

Χριστόφορος Κουτίτας

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΜΑΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄
ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ - ΑΝΑΜΙΞΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΙΖΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΠΑΡΑΚΤΙΑ ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΡΓΑ ΚΑΙ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑ ΑΚΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΜΑΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε κάθε συνεχές παραμορφώσιμο μέσο ως κυματισμοί μπορεί να οριστούν όλες οι μη μόνιμες (περιοδικές ή μη) διαταραχές της θέσεως των μορίων του γύρω από μια θέση ισορροπίας στο εσωτερικό ή την επιφάνειά τους.

Ειδικότερα στις παράκτιες θαλάσσιες μάζες ιδιαίτερα σημαντικές για τα θαλάσσια τεχνικά έργα είναι οι διαταραχές της επιφάνειάς τους που διέπονται από τη δύναμη της βαρύτητας. Είναι γνωστές ως επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί και το μηχανικό ενεργειακό περιεχόμενό τους είναι ο σημαντικότερος παράγων φορτίσεως των τεχνικών έργων που σχεδιάζουν και υπολογίζουν οι πολιτικοί μηχανικοί. Στην απλούστερη περίπτωση του απλού περιοδικού ημιτονοειδούς μορφής κυματισμού που σχηματοποιείται στο Σχ. 1.1. διακρίνονται τα εξής μορφολογικά και κινηματικά στοιχεία περιγραφής του κυματισμού:

Σχ. 1.1.

L = μήκος κύμα (απόσταση μεταξύ διαδοχικών κοιλιών ή κορυφών) [m] (k= 2π/L=αριθμός κύματος)

H = ύψος ή εύρος κύματος (απόσταση κοιλίας κορυφής. [m]

α = πλάτος κύματος (το μισό του ύψους). [m]

T = περίοδος κύματος [sec].
Η χρονική απόσταση ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών κορυφών σε μια θέση.

f = κυκλική συχνότητα (=1/T)[Hz].
Η γωνιακή συχνότητα σ ή ω [rad/ sec] σχετίζεται με την περίοδο και την κυκλική συχνότητα $\sigma = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

C = φασική ταχύτητα, ή ταχύτητα διαδόσεως του κυματισμού [m/s]. Για κάθε κυματισμό ισχύει η εξίσωση

$$L = C \cdot T \tag{1.1}$$

u, v, w = οι συνιστώσες ταχύτητας των μορίων του νερού στο εσωτερικό του που είναι γενικά διαφορετικές του C [m/s].

η ή ζ = η απόσταση της στάθμης της επιφάνειας από την μέση στάθμη κυματισμού (ΜΣΚ). Η ΜΣΚ μπορεί να συμπίπτει ή όχι με την οριζόντια στάθμη ηρεμίας (Σ.Η.) του νερού. Η παρουσία των κυματισμών συνήθως συνεπάγεται μια διαφοροποίηση προς τα πάνω ή προς τα κάτω (set up, set down) της ΜΣΚ σχετικά με την αρχική ΣΗ. [m]

d (ή h) = το βάθος του νερού στην αρχική κατάσταση [m]. Από την τάξη μεγέθους των λόγων $\sigma = \frac{d}{L}$ και $\varepsilon = \frac{H}{d}$ μπορούμε να διακρίνουμε μακρούς $O[\sigma] < 10^{-2}$ ή βραχείς κυματισμούς και κυματισμούς απειροστού $0[\varepsilon] < 10^{-1}$ ή πεπερασμένου εύρους.

Η προέλευση των κυματισμών στη φύση διαφοροποιείται σημαντικά. Η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας, οι διαφοροποιήσεις της βαρομετρικής πιέσεως από θέση σε θέση, η αστρονομική παλίρροια, οι υποβρύχιες κατολισθήσεις και οι υποθαλάσσιοι σεισμοί, οι διαφοροποιήσεις πυκνότητας των θαλασσίων μαζών είναι οι κυρίες αιτίες γενέσεως επιφανειακών ή εσωτερικών κυματισμών.Στο Σχ. 1.2. δίνεται σχηματικά η κατανομή του ενεργειακού περιεχομένου (ανάλογου του H^2) στις διάφορες περιόδους κυματισμών. Η κατανομή αναφέρεται στο σύνολο των θαλασσίων περιοχών της γης.

Φαίνεται ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά μηχανικής ενέργειας συγκεντρώνονται στους ανεμογενείς κυματισμούς (T = 5–15 sec) και στους παλιρροιακούς κυματισμούς (T = 40000–80000 sec).

Στα επόμενα τέσσερα κεφάλαια θα παρουσιαστούν εισαγωγικά τα εξής βασικά θέματα της κυματομηχανικής.

α. Οι αναλυτικές θεωρίες περιγραφής των δισδιαστάτων κυματισμών (με ευθύγραμμες κορυφογραμμές που η περιγραφή τους περιορίζεται στο κατακόρυφο επίπεδο xz).

β. Οι απλές αναλυτικές περιγραφές των διεργασιών διαμορφώσεως και τρισδιάστατοποιήσεως των κυματισμών (περίθλαση, διάθλαση, ανάκλαση, θραύση αναρρίχηση στον παράκτιο χώρο).

γ. Οι σύγχρονες αριθμητικές, επιχειρησιακές μέθοδοι περιγραφής των φαινομένων των α και β κατηγοριών.

δ. Η στατιστική ανάλυση και η πρόγνωση των ανεμογενών κυματισμών.

2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

2.1 Γραμμικοί κυματισμοί απειροστού πλάτους (Κυματισμοί Stokes 1ης τάξεως ή Airy)

Η κλασική θεωρία **γραμμικών κυματισμών απειροστού πλάτους** βασίζεται στις παραδοχές μικρών τιμών των λόγων $\varepsilon = H/d$ και H/L και αμελητέων δυνάμεων ιξώδους (και κατά δυνατότητα αστρόβιλης ροής)· Η παραδοχή της αστρόβιλης ροής επιτρέπει την περιγραφή της ταχύτητας με συνάρτηση δυναμικού $\Phi(x, z, t)$.

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi \left(u \simeq \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \tag{2.1}$$

Σε συνδυασμό με το ασυμπίεστο του νερού που εκφράζεται από τη σχέση

$$\text{div } \vec{V} = 0 \tag{2.2}$$

η εξίσωση (2.2) διατηρήσεως του όγκου γράφεται και ως

$$\text{div (grad } \Phi) = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.3}$$

Για τους προωθούμενους δισδιάστατους κυματισμούς (που περιγράφονται στο επίπεδο x, z με αμετάβλητη μορφή κατά την κατεύθυνση y), έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν διάφορες μαθηματικές θεωρίες ποσοτικής περιγραφής των βασικών υδραυλικών στοιχείων της στάθμης επιφανείας $\eta(x, t)$ των συνιστωσών ταχύτητας u, w της πιέσεως p κλπ. Η κάθε θεωρία έχει μια περιοχή ισχύος και ένα βαθμό μαθηματικής δυσκολίας που επιτρέπουν στον σύγχρονο μηχανικό να προβεί σε επιλογές ανάλογα με τις υπολογιστικές δυνατότητες και τον επιδιωκόμενο βαθμό ακρίβειας. Με βάση τις τιμές των παραμέτρων ε και σ ($\sigma = d/L$) και της παράγωγης αδιάστατης παραμέτρου Ursell

$$U_r = \frac{L^2 H}{d^3} = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} \, ,$$

στο διάγραμμα του Σχ. 2.1 γίνεται η ταξινόμηση της περιοχής ισχύος των διαφόρων θεωριών περιγραφής των κυματισμών.

Σχ. 2.1.

Στο εσωτερικό του πεδίου διαδόσεως των κυματισμών ισχύει η εξίσωση Laplace. Η εξίσωση πεδίου συμπληρώνεται από τις εξής οριακές συνθήκες:

α. Στην επιφάνεια που αποτελεί γραμμή ροής ισχύουν γραμμικοποιημένες, η δυναμική συνθήκη Bernoulli που γράφεται ως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz = \text{σταθ.} = 0 \Big|_{z=\eta \text{ ή } (z\approx 0)} \tag{2.4}$$

και η κινηματική συνθήκη

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{z=\eta \text{ ή } (z\approx 0)} \tag{2.5}$$

β. Στον πυθμένα εφ' όσον είναι οριζόντιος ή έχει μικρή κλίση η κινηματική συνθήκη μηδενισμού της εγκάρσιας ταχύτητας γράφεται:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \Big|_{z=-d} \tag{2.6}$$

Το πρόβλημα καθορισμού της κατανομής της συναρτήσεως $\Phi(x, z, t)$ για την περίπτωση απλού περιοδικού κυματισμού είναι υπερορισμένο. Ο συνδυασμός της εξισώσεως πεδίου με την κινηματική συνθήκη πυθμένα και την δυναμική συνθήκη επιφανείας οδηγεί στην εξής αναλυτική λύση για την $\Phi(x, z, t)$.

$$\Phi = \frac{Hg}{2\sigma} \frac{\cosh(k(d+z))}{\cosh(kd)} \cdot \sin(kx-\sigma t) \tag{2.7}$$

Η ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας διακυμαίνεται σύμφωνα με την σχέση

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx-\sigma t) \tag{2.8}$$

ευρισκόμενη σε διαφορά φάσεως 90° με την Φ. Η αντικατάσταση των (2.7) (2.8) στην κινηματική συνθήκη επιφανείας οδηγεί στην εξής συνθήκη συμβιβαστού, που συσχετίζει τη φασική ταχύτητα με τη συχνότητα (και την περίοδο) του κύματος

$$\sigma^2 = g\, k \tanh(kd) \tag{2.9}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως **«εξίσωση διασποράς»** γιατί σε παράγωγες μορφές

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd) \tag{2.10}$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd) \tag{2.11}$$

υποδηλώνει ότι η φασική ταχύτητα είναι αύξουσα συνάρτηση της περιόδου του κύματος και κατά συνέπεια ένας κυματισμός που συνθέτεται από μια σειρά ημιτονοειδών κυμάτων με διαφορετικές περιόδους T_1, T_2 … κατά τη διάδοσή του διασπείρεται καθώς οι συνιστώσες με τις μεγαλύτερες περιόδους διαδίδονται ταχύτερα από ότι αυτές με τις μικρότερες περιόδους.

Παράγωγα μεγέθη που προκύπτουν από την Φ είναι οι συνιστώσες ταχύτητας των μορίων του νερού u, w και τα ολοκληρώματά τους γύρω από τη θέση ισορροπίας δηλαδή οι συνιστώσες μετατοπίσεως ξ και ζ. Βρίσκονται με παραγωγίσεις και ολοκληρώσεις

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh(k(d+z))}{\sinh(kd)} \cos(kx-\sigma t) \tag{2.12}$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh(k(d+z))}{\sinh(kd)} \sin(kx-\sigma t) \tag{2.13}$$

$$\xi = \int u\,dt = \frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh(k(d+z))}{\sinh(kd)} \sin(kx-\sigma t) \tag{2.14}$$

$$\zeta = \int w\,dt = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sinh(k(d+z))}{\sinh(kd)} \cos(kx-\sigma t) \tag{2.15}$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις για τα C, L, u, w, ξ, ζ ισχύουν γενικά αλλά για τις ακραίες περιπώσεις βαθειών νερών $\left(\frac{d}{L} > 0{,}5\right)$ ή ρηχών νερών $(d/L < < 0{,}05)$ η ασυμπτωτική τάση του $\tanh(kd)$ προς την μονάδα και προς το όρισμά του αντίστοιχα, οδηγεί στις εξισώσεις «βαθειών» και «ρηχών» νερών.

Εξισώσεις βαθειών νερών $d/L > 0{,}5$

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi} \tag{2.16}$$

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \tag{2.17}$$

$$u = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \cos(kx-\sigma t) \tag{2.18}$$

$$w = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \sin(kx-\sigma t) \tag{2.19}$$

$$\xi = \frac{H}{2} e^{kz} \sin(kx-\sigma t) \tag{2.20}$$

$$\zeta = \frac{H}{2} e^{kz} \cos(kx-\sigma t) \tag{2.21}$$

Εξισώσεις «ρηχών νερών» $\frac{d}{L} < 0{,}05$

$$C = \sqrt{gd} \tag{2.22}$$

$$L = CT = T\sqrt{gd} \tag{2.23}$$

$$u = \frac{\pi H}{T}\frac{1}{kd}\cos(kx-\sigma t) \tag{2.24}$$

$$w = \frac{\pi H}{T}\left(1+\frac{z}{d}\right)\sin\,(kx-\sigma t) \tag{2.15}$$

$$\xi = \frac{H}{2}\frac{1}{kd}\sin(kx-\sigma t) \tag{2.26}$$

$$\zeta = \frac{H}{2}\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos\,(kx-\sigma t) \tag{2.27}$$

Σχηματοποίηση των τροχιών των μορίων για τις περιπτώσεις, μικρού και μεγάλου βάθους περιέχεται στο Σχ. 2.2. Η κατανομή της πιέσεως στο βάθος υπολογίζεται από την εξίσωση Bernoulli (2.4). Η πίεση συντίθεται από δύο συνιστώσες την υδροστατική και την υδροδυναμική ως εξής

$$p = -g\varrho z + \frac{\varrho g H}{2}\frac{\cosh(k(d+z))}{\cos(kd)}\cos(kx-\sigma t) \tag{2.28}$$

Η δεύτερη συνιστώσα είναι φθίνουσα συνάρτηση του βάθους και γίνεται ανεπαίσθητη σε βάθος $d > \frac{L}{2}$ όπως εικονίζεται στο Σχ. 2.3.

Σημαντικά μεγέθη που παρουσιάζονται σε συνέχεια και στις απλοποιημένες θεωρίες διαθλάσεως και στην στατιστική μελέτη των ανεμογενών κυματισμών είναι η ενέργεια και η ισχύς των κυματισμών. Το μηχανικό ενεργειακό περιεχόμενο της στήλης νερού πλάτους 1 m και μήκους ίσο προς L βρίσκεται από το ολοκλήρωμα

$$E = E_k+E_\delta = \int_0^L\int_{-d}^0 \frac{\varrho}{2}(u^2+w^2)dzdx + \int_0^L \varrho g\,\frac{(d+\zeta)^2}{2}\,dx \tag{2.29}$$

$$-\varrho g L d\cdot\frac{d}{2} = \frac{\varrho g H^2 L}{16} + \varrho g\,\frac{H^2 L}{16} = \varrho g\,\frac{H^2 L}{8}$$

Φαίνεται ότι η μηχανική ενέργεια ισοκατανέμεται σε κινητική και δυναμική. Σαν πυκνότητα ενέργειας $\overline{E}$ ορίζεται το ενεργειακό περιεχόμενο στήλης νερού με κάτοψη ίση προς $1\ m^2$ και κατά μέσο όρο κατά την περίοδο του κύματος βρίσκεται ίσο προς

Σχ. 2.3.

$$\bar{E} = \frac{E}{L} = \frac{\rho g H^2}{8} \tag{2.30}$$

εξαρτώμενο αποκλειστικά από το ύψος κύματος. Η ισχύς του κύματος (μέσος ρυθμός ροής ενέργειας από κατακόρυφη διατομή μοναδιαίου πλάτους) βρίσκεται από τη σχέση

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-d}^0 p \cdot u \cdot dz \cdot dt \tag{2.31}$$

Η αντικατάσταση από τις (2.12) και (2.28) οδηγεί στην σχέση

$$P = \frac{E \cdot n}{T} \quad \text{όπου} \quad n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd}\right) \tag{2.32}$$

Η παράμετρος n μεταβάλλεται από 0,5 (σε βαθειά νερά) εως 1 (σε ρηχά νερά). Το διάγραμμα / νομογράφημα του Σχ. 2.4 βοηθά σημαντικά και στην επίλυση της (2.11) για τον υπολογισμό του L από δεδομένα T και d, στον υπολογισμό του n από την (2.32) αλλά και στον υπολογισμό του ύψους κύματος σε διάφορα βάθη νερού.

Σχ. 2.4.

Το φαινόμενο της μεταβολής του ύψους κύματος με την ελάττωση του βάθους (ρήχωση, shoaling effect) περιγράφεται ποσοτικά με την εφαρμογή της σχέσεως διατηρήσεως της ισχύος του κυματισμού (2.32) μεταξύ δύο διατομών σε διαφορετικά βάθη. Η εξίσωση (2.32) για βάθη d_1 και d_2 γράφεται

$$P_1 = P_2 = \frac{n_1 E_1}{T} = \frac{n_2 E_2}{T} \tag{2.33}$$

και προϋποθέτει αμελητέες απώλειες ενέργειας μεταξύ των δύο διατομών και τόσο μικρές κλίσεις πυθμένα ώστε να μην συμβαίνει μερική ανάκλαση κύματος. Η αντικατάσταση από την (2.29) οδηγεί στην εξίσωση ρηχώσεως,

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\frac{n_1 L_1}{n_2 L_2}} = k_s \tag{2.34}$$

όπου ο k_s είναι γνωστός σαν συντελεστής ρηχότητας, έχει σε μεγάλο βάθος τιμή 1 μειούμενος προς το 0,9 και σε μικρά βάθη υπερβαίνει την μονάδα περιγράφοντας το παρατηρημένο φαινόμενο της αυξήσεως του ύψους κύματος στα ρηχά νερά πριν τη θραύση του στην ακτή.

Οι κυματισμοί στη φύση συνήθως δεν είναι «μονοχρωματικοί» δηλαδή δεν περιέχουν μια μόνο περιοδική συνιστώσα αλλά συνήθως είναι επαλληλία περισσοτέρων περιοδικών συνιστωσών με λίγο διαφέρουσες περιόδους (narrow band process, σήμα μικρού εύρους συχνοτήτων). Αυτό έχει σαν ορατή συνέπεια τη δημιουργία και διάδοση «ομάδων κυματισμών». Η επαλληλία δύο ημιτονοειδών παλμών με λίγο διαφέρουσες περιόδους και συχνότητες σ και $\sigma' = \sigma - \delta\sigma$ οδηγεί σε συνιστάμενο παλμό

$$\frac{H}{2}\cos(kx - \sigma t) + \frac{H}{2}\cos(k'x - \sigma' t) = H\cos\left(\frac{k+k'}{2}x - \frac{\sigma+\sigma'}{2}t\right).$$

$$\cos\left(\frac{k-k'}{2}x - \frac{\sigma-\sigma'}{2}t\right). \tag{2.35}$$

Ο σύνθετος παλμός έχει πλάτος κυμαινόμενο από από Ο έως Η και μια περιβάλλουσα καμπύλη με αριθμό κύματος $k - k'$ μορφής που εικονογραφείται στο σχ. Σχ. 2.5. Ο ρυθμός προωθήσεως στο χώρο της περιβάλλουσας καμπύλης δεν είναι ίδιος με τον ρυθμό προωθήσεως του βασικού κύματος $\left(\text{δηλ. την } C = \frac{\sigma}{k}\right)$. Μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

Σχ. 2.5.

$$Cg = \frac{\delta\sigma}{\delta k} = \frac{d(kC)}{dk} = C + \frac{kdC}{dk} \tag{2.36}$$

Με εφαρμογή της (2.10) βρίσκεται

$$Cg = \frac{1}{2}\,C\left(1+\frac{2kd}{\sinh 2kd}\right) = C{\cdot}n \tag{2.37}$$

Στα βαθειά νερά η φασική ταχύτητα της ομάδας (περιβάλλουσας) είναι μισή της φασικής ταχύτητας του βασικού κύματος (carrier wave). Η οπτική εμπειρία είναι η εξής: φαίνεται ότι οι κυματισμοί τρέχουν μέσα στην περιβάλλουσα καμπύλη πιο γρήγορα από αυτή και φθίνουν στο μέτωπο της ενώ νέοι κυματισμοί γεννιούνται από το πίσω μέρος της.

2.2. Μη γραμμικοί κυματισμοί και κυματισμοί πεπερασμένου πλάτους

Για την συμπερίληψη των μη γραμμικών όρων της δυναμικής και κινηματικής συνθήκης επιφανείας και για την περιγραφή των κυματισμών στα ρηχά νερά όπου το πλάτος του κύματος είναι μη αμελητέο ποσοστό του βάθους του νερού έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες. Οι πιο σημαντικές είναι οι θεωρίες τρίτης και πέμπτης τάξεως Stokes που αναπτύχθηκαν και εφαρμόζονταν κυρίως σε σχέση με τις κατασκευές στην ανοιχτή θάλασσα, η θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου που εφαρμόζεται για την περιγραφή της διαδόσεως στα ρηχά νερά κυματισμών πεπερασμένου πλάτους και η θεωρία του μοναχικού κύματος για την περιγραφή της διαδόσεως σεισμογενών κυματισμών (μοναχικών παλμών που προκαλούνται από μετατοπίσεις ορίων ακτής ή πυθμένα) και τη θραύση των κυματισμών στις ακτές. Λεπτομερειακές παρουσιάσεις των θεωριών αυτών ξεφεύγουν από τους στόχους των εισαγωγικών μαθημάτων αλλά εδώ θα παρουσιαστούν τα κύρια χαρακτηριστικά των θεωριών αυτών και των αποτελεσμάτων τους.

2.2.1. Θεωρίες Stokes ανώτερης τάξεως

Οι συναρτήσεις στάθμης επιφανείας και δυναμικού της ταχύτητας αναπτύσσονται σε σειρές βασικών συνιστωσών αυξανομένης συχνότητας πολ/σμένων επί προσδιοριστέους συντελεστές. Η αντικατάσταση στις μη γραμμικές συνθήκες επιφανείας και ο διαχωρισμός των όρων ίδιας τάξεως ως προς την παράμετρο αναπτύξεως σε σειρά $\alpha = \frac{H}{2}$ δίνει τη δυνατότητα επιλύσεως για τους προσδιοριστέους συντελεστές των όρων 1ης, 2ης, 3ης κλπ.

τάξεως. Έτσι π.χ η συνάρτηση η προσεγγίζεται ως εξής

$$\eta = \sum_{K=1}^{N} \alpha^k, B_k \cos k\theta \tag{2.38}$$

όπου N ο αύξων αριθμός της τάξεως προσεγγίσεως, θ η φάση (kx–σt) και B_k προσδιοριστέοι συντελεστές. Για k=2 (θεωρία Stokes 2ης τάξεως) βρίσκεται για την στάθμη επιφανείας

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\theta + \frac{\pi H^2}{8L} \frac{\cosh(kd)}{\sinh^3(kd)} (2+\cos 2kd) \cos 2\theta \tag{2.39}$$

Η συγκριτική γραφική παράσταση των (2.39) και (2.8) στο Σχ. 2.6 φανερώνει τη διαφορά των δύο θεωριών 1ης και 2ης τάξεως ως προς την μορφή της επιφάνειας. Οι κυματοκορυφές γίνονται οξύτερες και οι «κοιλιές» ρηχαίνουν. Το κύμα αποκτά ασυμμετρία ως προς την ΜΣΚ.

Σχ. 2.6.

Οι τιμές της φασικής ταχύτητας C και του μήκους κύματος δεν διαφέρουν από τη θεωρία 1ης τάξεως αλλά μια σημαντική διαφορά προκύπτει στον υπολογισμό των τροχιών των μορίων. Η συνάρτηση ξ δεν είναι περιοδική αλλά περιέχει έναν γραμμικά αυξανόμενο κατά τον χρόνο όρο, ο οποίος διαιρούμενος με την περίοδο του κύματος, δίνει την μέση ταχύτητα μετατοπίσεως (drift) των μορίων του νερού κατά την κατεύθυνση του κύματος

$$\bar{U}(z) = \left(\frac{\pi H}{L}\right)^2 \cdot \frac{c}{2} \frac{\cos(2k(d+z))}{\sinh^2 kd} \tag{2.40}$$

2.2.2. Θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου

Η διαμόρφωση στα ρηχά νερά «μακρών κυματισμών» πεπερασμένου πλάτους και σταθερής μορφής με εξισορρόπηση της τάσεως για θραύση (από τους μη γραμμικούς όρους) και της «διασποράς πλάτους» πρωτοερευνήθηκε από τους Boussinesq (1877) και Korteweg και DeVries (1895). Οι κυματι-

Σχ. 2.7.

σμοί αυτοί χαρακτηρίζονται από πολύ οξύτερες κορυφές και πεπλατυσμένες κοιλιές που απέχουν λίγο από την ΜΣΚ. Η κωδικοποιημένη από την Wiegel (1960) θεωρία των κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου (cnoidal waves) έχει εφαρμογή για λόγο $\frac{d}{L} < \frac{1}{8}$ και τιμή της παραμέτρου Ursell > 25. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή η απόσταση της ελεύθερης επιφάνειας από την στάθμη κοιλιάς (το χαμηλότερο σημείο της επιφανείας) δίνεται από τη σχέση

$$\eta = H \cdot Cn^2 \left(2K(k) \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k \right) \tag{2.41}$$

όπου k το ορίσμα κυμαινόμενο από 0 έως 1 $K(k)$ το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους και cn η συνάρτηση ελλειπτικού συνημιτόνου.

Στα Σχ. 2.7 Σχ. 2.8 και Σχ. 2.9 δίνεται η σχέση του k με τα στοιχεία H, T, d του κύματος, η σχέση μεταξύ k και L, και η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας $\frac{\eta}{H}\left(\frac{x}{L}\right)$ για διάφορες τιμές του k. Χαρακτηριστική είναι η κατακόρυφη ασυμμετρία του κύματος για αύξουσες τιμές του k (ελάττωση του βάθους του νερού).

2.3.3. Θεωρία μοναχικού κύματος

Η μόνιμη πλευρική μετατόπιση ενός στερεού ορίου κατά ένα πεπερασμένο διάστημα προκαλεί μια ήβωση της ελεύθερης επιφάνειας και τη διαμόρφωση ενός μοναχικού κύματος με όλα τα σημεία της επιφάνειας πάνω από την Σ.Η και θεωρητικά άπειρο μήκος. Πρβλ. Σχ. 2.10. Στη φύση δύσκολα εμφανίζονται καθαρά μοναχικά κύματα (συνήθως τα μοναχικά κύματα ακολουθούνται από συρμούς κυματισμών μεγαλύτερης συχνότητας

Σχ. 2.10.

που ακολουθούν τον κύριο παλμό (λόγω διασποράς). Η μορφή του μοναχικού κύματος ταυτίζεται με τη μορφή του κυματισμού ελλειπτικού συνημιτόνου για τιμή k=1. Περιγράφεται από την εξίσωση

$$\eta = H \,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3H}{4(H+d)}} \cdot \frac{x-ct}{d}\right] \tag{2.42}$$

όπου η ταχύτητα φάσεως δίνεται από τη σχέση

$$c = \sqrt{g(H+d)} \tag{2.43}$$

Η οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας, χρήσιμη για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών φορτίσεων δίνεται από τη σχέση

Σχ. 2.11.

$$u = c \cdot N \cdot \frac{1+\cos(Mz/d)-\cosh(Mx/d)}{(\cos(Mz/d)+\cosh(Mx/d))^2} \tag{2.44}$$

Σ' αυτήν οι συναρτήσεις N, M του λόγου H/d δίνονται στο Σχ. 2.11.

Η κατανομή της πιέσεως κάτω από την επιφάνεια μπορεί να προσεγγιστεί με την υδροστατική (παραδοχή συνήθης σε όλους τους μακρούς κυματισμούς) και η ενέργεια που περικλείεται στο μέτρο πλάτους στο σύνολο του μήκους κύματος δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{8}{3\sqrt{3}} \varrho g H^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} \tag{2.45}$$

Η μορφή του μοναχικού κύματος γίνεται ασταθής και προκαλείται η θραύση του σε νερό του οποίου το βάθος είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή

$$\left(\frac{H}{d}\right)_{max} = 0{,}78 \quad ή \quad \left(\frac{d}{H}\right)_{min} = 1{,}2 \tag{2.46}$$

Για την τιμή αυτή η u_{max} γίνεται ίση προς την c.

Ο όγκος του νερού που περιέχεται στο μοναχικό κύμα πάνω από τη ΣΗ δίνεται από τη σχέση

$$V = \left(\frac{16}{3} \cdot d^3 \cdot H \right)^{1/2} \tag{2.47}$$