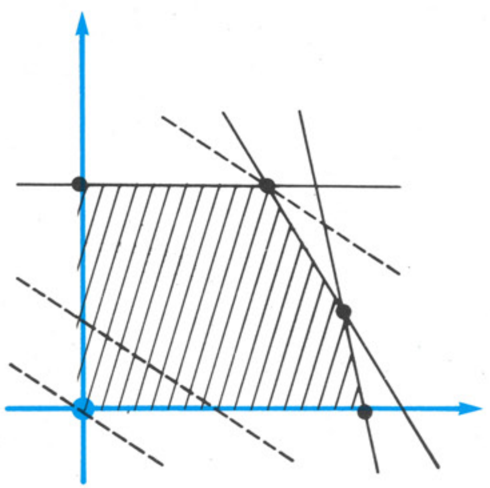
Στρατή Κουνιά
Καθηγητή
Πανεπιστημίου Αθηνών

Δημήτρη Φακίνου
Αναπλ. Καθηγητή
Πανεπιστημίου Αθηνών

# ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

## ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# πρόλογος

Ο μαθηματικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε σημαντικά τα τελευταία σαράντα χρόνια, με σκοπό την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως οικονομικών, επιχειρησιακών, στρατιωτικών κλπ. Από μαθηματική άποψη, ορίζεται ως ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που ασχολείται με τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση πραγματικών συναρτήσεων κάτω από ορισμένες συνθήκες. Ο γραμμικός προγραμματισμός ειδικότερα, που είναι το αντικείμενο αυτού του βιβλίου, ασχολείται με τη βελτιστοποίηση γραμμικών συναρτήσεων κάτω από συνθήκες που ορίζονται με τη βοήθεια γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων.

Ο γραμμικός προγραμματισμός άρχισε να διδάσκεται στους δευτεροετείς φοιτητές των μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης από το ακαδημαϊκό έτος 1978-79 ως ετήσιο μάθημα. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών διδάσκεται στο πέμπτο ακαδημαϊκό εξάμηνο και τις νέες ανάγκες έρχεται να καλύψει αυτό το βιβλίο.

Η ύλη που περιέχεται στο βιβλίο χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, στο δεύτερο δίνεται η μέθοδος Simplex, στο τρίτο η δυϊκή θεωρία και η ανάλυση ευαισθησίας και στο τέταρτο το πρόβλημα μεταφοράς. Μετά από κάθε κεφάλαιο υπάρχουν ασκήσεις που η λύση τους θεωρείται αναγκαία για την εμπέδωση της θεωρίας. Οι λύσεις των ασκήσεων δίνονται στο τέλος του βιβλίου και μπορεί να προστρέξει κανείς σε αυτές αφού φυσικά έχει εξαντλήσει πρώτα κάθε δυνατή προσπάθεια. Οι παράγραφοι 1.7, 1.8, 3.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 μπορούν να παραληφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Η παραπάνω ύλη καλύπτει τις βασικές γνώσεις στο πεδίο αυτό που πρέπει να έχει ένας πτυχιούχος μαθηματικός. Έχοντας υπόψη ότι το μάθημα του γραμμικού προγραμματισμού διδάσκεται τώρα και σε φοιτητές άλλων σχολών, φροντίσαμε την απλή μαθηματική παρουσίαση της ύλης, ώστε να είναι κατανοητή και από αυτούς. Τέλος ελπίζουμε ότι το βιβλίο αυτό θα φανεί χρήσιμο σε όλο το φάσμα των επιστημόνων με διαφορετικές ειδικότητες που μελετούν ή εφαρμόζουν το γραμμικό προγραμματισμό.

Σ. Κουνιάς
Δ. Φακίνος

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 1985

## πρόλογος δεύτερης έκδοσης

Επειδή εξαντλήθηκε η πρώτη έκδοση, προχωρήσαμε στην παρούσα έκδοση, με διορθωμένα όσα τυπογραφικά λάθη έπεσαν στην αντίληψή μας.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1987

Σ. Κουνιάς
Δ. Φακίνος

περιεχόμενα

κεφάλαιο **1**

# βασικές έννοιες γραμμικού προγραμματισμού

## 1.1. Εισαγωγή

Μαθηματικός προγραμματισμός είναι το σύνολο των μεθόδων και υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά περιγράφονται με τη βοήθεια ενός μαθηματικού προτύπου που αποτελείται από μια πραγματική συνάρτηση της οποίας ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο, και από μια ομάδα συνθηκών που οι μεταβλητές της συνάρτησης πρέπει να ικανοποιούν. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον μαθηματικό προγραμματισμό ως ένα κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών που έχει ως αντικείμενο την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση πραγματικών συναρτήσεων, κάτω από ορισμένους περιορισμούς για τις μεταβλητές.

Η λέξη προγραμματισμός δίνει ίσως την εντύπωση ότι πρόκειται για ένα κλάδο της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτο δεν είναι σωστό, αν και η χρησιμοποίηση ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκολύνει κατά πολύ την επίλυση σύνθετων προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Ο όρος προγραμματισμός εδώ, δηλώνει ότι οι ελεγχόμενες μεταβλητές του προτύπου πρόκειται να προγραμματισθούν ή επιλεγούν έτσι ώστε η συνάρτηση του προτύπου να βελτιστοποιείται, κάτω από τους δοσμένους περιορισμούς.

Η μαθηματική διατύπωση του γενικού προβλήματος του μαθηματικού προγραμματισμού είναι η εξής:

Δίνεται μια πραγματική συνάρτηση $n$ μεταβλητών

$$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}: \ \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(\underline{x})$$

και ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) $\underline{x}^* \in F$:

$$f(\underline{x}^*) = \max\{f(\underline{x}): \underline{x} \in F\} \quad ή \quad f(\underline{x}^*) = \min\{f(\underline{x}): \underline{x} \in F\}.$$

Λόγω της ταυτότητας

$$\min f(\underline{x}) = -\max(-f(\underline{x})) \tag{1.1}$$

κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Έτσι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας (χ.π.γ.) μπορούμε να πούμε ότι το γενικό πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού είναι η εύρεση

$$\underline{x}^* \in F: f(\underline{x}^*) = \max\{f(\underline{x}): \underline{x} \in F\} \tag{1.2}$$

Η συνάρτηση $f(\underline{x})$ λέγεται αντικειμενική συνάρτηση, το σύνολο $F$ λέγεται εφικτή περιοχή, και τα σημεία (διανύσματα) του $F$ λέγονται εφικτές λύσεις του προβλήματος. Άριστη ή βέλτιστη λύση λέγεται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή κάθε σημείο $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$:

i) $\underline{x}^* \in F$, ii) $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}) \quad \forall \ \underline{x} \in F$.

Αν η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x})$ είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και η εφικτή περιοχή $F$ εκφράζεται με γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις ως προς τις μεταβλητές, τότε έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.). Αν μια τουλάχιστον από τις υποθέσεις αυτές δεν ισχύει, τότε έχουμε ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού. Έτσι το γενικό π.γ.π. έχει τη μαθηματική διατύπωση:

Να βρεθεί το

$$z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

όταν

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+ \ldots +\alpha_{1n}x_n &\leq, =, \geq b_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+ \ldots +\alpha_{2n}x_n &\leq, =, \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+ \ldots +\alpha_{mn}x_n &\leq, =, \geq b_m \end{aligned} \tag{1.3}$$

όπου $c_j$, $b_i$, $\alpha_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n)$ πραγματικές σταθερές.

Συνήθως υποθέτουμε επιπλέον ότι:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \tag{1.4}$$

Η συνθήκη (1.4) που είναι γνωστή σαν συνθήκη μη αρνητικότητας των μεταβλητών, γίνεται χ.π.γ. αφού αν $x_j \leq 0$ τότε $x_j = -x_j'$, $x_j' \geq 0$ ενώ αν $x_j \in \mathbb{R}$ τότε $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j', x_j'' \geq 0$, όπου π.χ. $x_j' = \max(0, x_j)$, $x_j'' = -\min(0, x_j)$.

Οι συντελεστές $c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ αναφέρονται ως συντελεστές κόστους.

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, το π.γ.π. μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά με μορφή πινάκων:

$$\begin{gathered} z = \max \underline{c}'\underline{x} \\ A\,\underline{x} \leq, =, \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{gathered} \tag{1.5}$$

με

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}, \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$$

όπου με ένα τόνο συμβολίζουμε το ανάστροφο ενός διανύσματος ή ενός πίνακα π.χ. $\underline{c}' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, και $M_{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των $m\times n$ πινάκων.

Θα ασχοληθούμε μόνον με προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού σ' αυτό το βιβλίο.

## 1.2. Παραδείγματα

Ένα πλήθος από πρακτικά προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά σαν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και να λυθούν με τις μεθόδους του. Σ' αυτήν την παράγραφο όπως και στην επόμενη, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα.

### 1. Πρόβλημα μέγιστου κέρδους

Μία φαρμακευτική εταιρεία παρασκευάζει στο εργοστάσιό της τριών ειδών φάρμακα $Φ_1$, $Φ_2$ και $Φ_3$. Για το καθένα χρησιμοποιούνται τρία υλικά $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ στις παρακάτω αναλογίες:

| | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|
| $Φ_1$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
| $Φ_2$ | 0.1 | 0.5 | 0.4 |
| $Φ_3$ | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

Οι διαθέσιμες ποσότητες σε κιλά των υλικών $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ είναι 8, 12 και 11 αντίστοιχα, κάθε μέρα. Το κέρδος σε χιλιάδες δραχμές ανά κιλό για τα φάρμακα $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$ είναι 15, 20 και 30 αντίστοιχα. Οι απαιτήσεις της αγοράς είναι απεριόριστες. Να προγραμματισθεί η ημερήσια παραγωγή έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της εταιρείας.

**Μαθηματική διατύπωση:** Έστω $x_j$ η παραγόμενη ποσότητα σε κιλά από το φάρμακο $Φ_j$ (j=1, 2, 3) ημερήσια. Το συνολικό κέρδος τότε είναι: $15x_1+20x_2+30x_3$, ενώ οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες από τα υλικά $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ είναι αντίστοιχα $0.2x_1+0.1x_2+0.3x_3$, $0.4x_1+0.5x_2+0.2x_3$ και $0.4x_1+0.4x_2+0.5x_3$. Εφόσον οι διαθέσιμες ποσότητες από αυτά είναι 8, 12 και 11, έχουμε τρεις περιορισμούς, ένα για κάθε υλικό. Έτσι η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ως π.γ.π. είναι:

$$\begin{aligned}
&\max\ (15x_1+20x_2+30x_3)\\
&0.2x_1+0.1x_2+0.3x_3 \leq 8\\
&0.4x_1+0.5x_2+0.2x_3 \leq 12\\
&0.4x_1+0.4x_2+0.5x_3 \leq 11\\
&x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0\ .
\end{aligned}$$

Με μορφή πινάκων, η διατύπωση είναι:

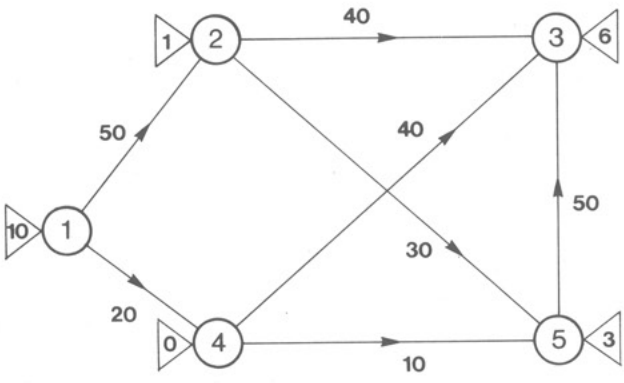
$$\begin{aligned}
&\max\ \underline{c}'\underline{x}\\
&A\ \underline{x} \leq \underline{b}\\
&\underline{x} \geq \underline{0}
\end{aligned}$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

**2. Πρόβλημα ελάχιστου κόστους**

Μια εταιρεία θέλει να στείλει 10 τόνους στάρι από την πόλη 1 στις τέσσερες πόλεις 2, 3, 4 και 5. Το κόστος μεταφοράς ανά τόνο από μία πόλη σε άλλη, δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Στους κύκλους είναι γραμμένες οι πόλεις και στα τρίγωνα οι ποσότητες που πρέπει να πάνε σε κάθε πόλη. Τα βέλη δείχνουν προς ποιά πόλη μπορεί να γίνει η μεταφορά.




Να βρεθεί ένα σχέδιο μεταφοράς που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

**Μαθηματική διατύπωση:** Έστω $x_{ij}$ η ποσότητα σταριού σε τόνους που μεταφέρεται από την πόλη i στην πόλη j. Το συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $50x_{12}+20x_{14}+40x_{23}+30x_{25}+40x_{43}+10x_{45}+50x_{53}$. Θα πρέπει $x_{12}+x_{14}=10$ αφού οι συνολικές απαιτήσεις των πόλεων είναι 10 και επίσης η ποσότητα που πάει σε μια πόλη μείον την ποσότητα που φεύγει από αυτή την πόλη, να είναι ίση με την ποσότητα που απαιτεί η συγκεκριμένη πόλη. Έτσι, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min\ (50x_{12}+20x_{14}+40x_{23}+30x_{25}+40x_{43}+10x_{45}+50x_{53})$$

$$\begin{aligned}
x_{12}+x_{14} \quad &= 10\\
x_{12}-x_{23}-x_{25} &= 1\\
x_{23}+x_{43}+x_{53} &= 6\\
x_{14}-x_{43}-x_{45} &= 0\\
x_{25}+x_{45}-x_{53} &= 3\\
x_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα με μορφή πινάκων:

$$\min \underline{c}' \ \underline{x}$$
$$A \ \underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{25} \\ x_{43} \\ x_{45} \\ x_{53} \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 40 \\ 30 \\ 40 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Η άριστη λύση, που βρίσκεται με τις μεθόδους του επόμενου κεφαλαίου, είναι:

$$x_{12}=1, \quad x_{23}=0, \quad x_{25}=0, \quad x_{14}=9, \quad x_{43}=6, \quad x_{45}=3, \quad x_{53}=0$$

με αντίστοιχο ελάχιστο κόστος μεταφοράς $z=500$.

Δηλαδή η εταιρεία θα μεταφέρει ένα τόνο στην πόλη (2) και τους υπόλοιπους τόνους στις πόλεις (3) και (5) δια μέσου της (4).

### 3. Περιφερειακός συνεταιρισμός

Τρία χωριά σχεδιάζουν την αγροτική παραγωγή για τον επόμενο χρόνο. Σε κάθε χωριό αντιστοιχεί καλλιεργήσιμη γη (σε στρέμματα) και ποτιστικό νερό (σε $m^3$) σύμφωνα με τον πίνακα:

| Χωριό | Καλλιεργήσιμη γη | Ημερήσια ποσότητα νερού |
|---|---|---|
| 1 | 400 | 6000 |
| 2 | 600 | 8000 |
| 3 | 300 | 3750 |

Κάθε χωριό θα καλλιεργήσει το ίδιο ποσοστό καλλιεργήσιμης γης. Η παραγωγή για τον επόμενο χρόνο έχει αποφασισθεί να είναι τεύτλα, μπαμπάκι και σόγια, και επίσης έχει αποφασισθεί πόσα στρέμματα το πολύ θα καλλιεργηθούν για κάθε είδος. Αυτά, όπως επίσης η αντίστοιχη απαιτούμενη ποσότητα νερού ανά στρέμμα και το κέρδος σε δραχμές ανά στρέμμα για κάθε είδος καλλιέργειας δίνεται από τον πίνακα:

| Είδος καλλιέργειας | Μέγιστη καλλιεργήσιμη γη | Απαιτούμενη ημερήσια ποσότητα νερού ανά στρέμμα | Κέρδος ανά στρέμμα |
|---|---|---|---|
| Τεύτλα (1) | 600 | 30 | 400 |
| Μπαμπάκι (2) | 500 | 20 | 300 |
| Σόγια (3) | 325 | 10 | 100 |

Πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργηθούν από κάθε χωριό και για κάθε είδος ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό καθαρό κέρδος;

**Μαθηματική διατύπωση:** Έστω $x_{ij}$ ($i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$) ο αριθμός των στρεμμάτων που καλλιεργεί το χωριό $i$ για το είδος $j$. Έχουμε το π.γ.π.

$$\max\ [400\ (x_{11}+x_{21}+x_{31})+300\ (x_{12}+x_{22}+x_{32})+100\ (x_{13}+x_{23}+x_{33})]$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 400\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 600\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 300\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\leq 600\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leq 500\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 325\\
3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} &\leq 600\\
3x_{21} + 2x_{22} + x_{23} &\leq 800\\
3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} &\leq 375
\end{aligned}$$

$$\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}}{400} = \frac{x_{21}+x_{22}+x_{23}}{600} = \frac{x_{31}+x_{32}+x_{33}}{300}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3\ .$$

Οι τρεις πρώτοι περιορισμοί οφείλονται στη μέγιστη διαθέσιμη γη ανά χωριό, οι τρεις επόμενοι στη μέγιστη καλλιεργήσιμη γη ανά είδος, οι τρεις άλλοι στη διαθέσιμη ποσότητα νερού ανά χωριό, και ο τελευταίος στο ότι κάθε χωριό καλλιεργεί το ίδιο ποσοστό γης.

Η άριστη λύση βρίσκεται ότι είναι η:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 133.33, & x_{12} &= 100, & x_{13} &= 0 \\ x_{21} &= 100\ \ , & x_{22} &= 250, & x_{23} &= 0 \\ x_{31} &= 25\ \ , & x_{32} &= 150, & x_{33} &= 0 \end{aligned}$$

και το μέγιστο κέρδος τότε είναι $z = 2533333.33$ δρχ.

## 1.3. Γραφική επίλυση

Όταν στη μαθηματική διατύπωση ενός π.γ.π. υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές, τότε εκτός από τη γενική αναλυτική μέθοδο επίλυσης, που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μία γραφική μέθοδος. Θα περιγράψουμε αυτή τη μέθοδο με τη βοήθεια δύο παραδειγμάτων.

**Παράδειγμα 1**

Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παράγει κάθε μέρα δύο είδη γλυκών A και B και τα πουλάει σε πακέτα. Χρειάζεται ζάχαρη, αλεύρι και γάλα, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

| Υλικό | Βάρος σε κιλά ανά πακέτο | | Διαθέσιμα υλικά σε κιλά κάθε μέρα |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| Ζάχαρι | 2 | 1 | 10 |
| Αλεύρι | 3 | 8 | 24 |
| Γάλα | 0 | 1 | 2 |
| Κέρδος σε δρχ. ανά πακέτο | 140 | 100 | |

Ζητείται να προγραμματισθεί η ημερήσια παραγωγή, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος. Δηλαδή να βρεθεί ο κατάλληλος αριθμός πακέτων από κάθε είδος γλυκού που πρέπει να παράγονται κάθε μέρα, έτσι ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

**Μαθηματική διατύπωση:** Αν $x_1$ πακέτα του A και $x_2$ πακέτα του