

Γιώργος Κουφάκης

# ΦΥΣΙΚΗ

κατεύθυνσης

ΛΥΚΕΙΟΥ

η ΝΕΑ ΦΥΣΙΚΗ του υποψηφίου

## Περιέχει:

- Βοηθητικές γνώσεις Μαθηματικών
  - Πλήρη θεωρία
  - Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων
  - Εφαρμογές
  - Ερωτήσεις (όλων των τύπων)
  - Λυμένα προβλήματα
  - Προβλήματα προς λύση
- σε ομάδες με κριτήριο  
τη δυσκολία τους



Θεσσαλονίκη 2008

Στόχος της έκδοσης αυτού του βιβλίου είναι η προσφορά στους μαθητές της Θετικής και της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης ενός πλήρους βοηθήματος για τη συστηματική μελέτη του μαθήματος της Φυσικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου. Νομίζω, όμως, πως και για τον καθηγητή της Φυσικής θα παρουσιάσει ενδιαφέρον, παρά το πλήθος των όμοιων βοηθημάτων που κυκλοφορούν.

Καθοριστικό ρόλο στη συγγραφή αυτού του βιβλίου έπαιξε η εμπειρία από την επί πολλά χρόνια ενασχόλησή μου με τη φροντιστηριακή προετοιμασία μαθητών, καθώς και η εμπειρία μου από τη συγγραφή άλλων αντίστοιχων βιβλίων στο παρελθόν.

Στην αρχή του βιβλίου παραθέτονται με συντομία λίγες βοηθητικές γνώσεις Μαθηματικών από την Ανάλυση, την Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία. Σ' αυτές μπορεί να καταφεύγει ο μαθητής, όταν αντιμετωπίζει μαθηματικές δυσκολίες.

Η δομή του βιβλίου περιλαμβάνει δέκα ενότητες. Σε κάθε ενότητα προηγείται η θεωρία και ακολουθούν οι οδηγίες για τη λύση των προβλημάτων, οι ερωτήσεις και τα προβλήματα.

Έγινε σοβαρή προσπάθεια να αποδοθεί η θεωρία με συντομία, σαφήνεια και ακρίβεια αλλά συγχρόνως και πληρότητα. Μόνο με την καλύτερη κατανόηση και την εμπάθυνση της θεωρίας θα αποκτήσει ο μαθητής τον απαραίτητο θεωρητικό εξοπλισμό και για τη λύση των προβλημάτων. Είναι γνωστές οι δυσκολίες που συναντά ο μαθητής στη λύση των προβλημάτων της Φυσικής και έγινε συστηματική προσπάθεια να αρθούν αυτές με κατάλληλες οδηγίες και εφαρμογές. Για τον έλεγχο των γνώσεων που αποκτήθηκαν ακολουθεί μια σειρά ερωτήσεων τεσσάρων τύπων με τις απαντήσεις τους και με την αιτιολόγηση των απαντήσεων στις δύσκολες ερωτήσεις. Τα λυμένα προβλήματα με αναλυτική παρουσίαση και τα προβλήματα προς λύση με τις σύντομες απαντήσεις τους (αποτελέσματα) είναι ταξινομημένα σε τρεις ομάδες, με κριτήριο τη δυσκολία τους. Τα προβλήματα αυτά, πρωτότυπα και μη, επιλέχθηκαν ή δημιουργήθηκαν με κριτήριο τις εξετάσεις. Ωστόσο, τα προβλήματα της Γ' ομάδας προσφέρονται περισ-

σότερο ως άσκηση για έναν απαιτητικότερο μελετητή. Περιλαμβάνονται επίσης επιλεγμένα Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων ακολουθήθηκε η επιλογή του σχολικού εγχειριδίου. Το διάνυσμα παριστάνεται με παχύ μαύρο σύμβολο, ενώ το μέτρο του και η αλγεβρική τιμή του με τον απλό (κανονικό) χαρακτήρα. Γράφουμε π.χ. *η δύναμη  $F$  που έχει μέτρο  $F$ .*

Αν το βιβλίο αυτό αποτελέσει πράγματι ένα χρήσιμο και αποτελεσματικό βοήθημα στη μελέτη του μαθήματος της Φυσικής, θα έχει εκπληρώσει το σκοπό του με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Ευχαριστώ τις Εκδόσεις Ζήτη για την ανταπόκρισή τους στην έκδοση του βιβλίου. Στη δουλειά τους οφείλεται ό,τι καλό παρουσιάζει αυτό το βιβλίο στην εμφάνιση. Οφείλω να αναφέρω τον Άρη Σύρμο για το μεράκι και την καλλιτεχνία με την οποία επιμελήθηκε την έκδοση, την Κική Στρούλη για την υπομονή της στη στοιχειοθέτηση, τον Τάσο Παπατόλη για την ποιότητα των σχημάτων και τον Κώστα Μπαρμπαδήμο για το δημιουργικό του εξωφύλλου.

Ευχαριστώ το σταθερό συνεργάτη μου Γιώργο Μόσχο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του κατά τη φάση της διόρθωσης του κειμένου και τους φιλολόγους, το φίλο μου Γιώργο Δαρδιάτη και την κόρη μου Λαμπρινή, για την πολύτιμη συμβολή τους στην αρτιότητα του βιβλίου. Όλοι τους συνέβαλαν στο να γίνει το βιβλίο αυτό αντάξιο των προσδοκιών μου και ελπίζω και των δικών σας.

Πανόραμα, Ιούλιος 2008

Βοηθητικές γνώσεις Μαθηματικών

1.	Πραγματική συνάρτηση .....	15
2.	Συνάρτηση της μορφής $y = ax + b$ ( $a \neq 0$ ) .....	15
3.	Συνάρτηση της μορφής $y = ax^2 + bx + \gamma$ ( $a \neq 0$ ) .....	17
4.	Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ .....	18
5.	Περιοδικές συναρτήσεις .....	20
6.	Εκθετικές συναρτήσεις .....	22
7.	Όριο συνάρτησης .....	24
8.	Συνέχεια συνάρτησης .....	26
9.	Το πρόβλημα της ταχύτητας και ο ρυθμός μεταβολής .....	25
10.	Η έννοια της παραγώγου .....	25
11.	Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής .....	26
12.	Παράγωγος συνάρτησης .....	27
13.	Παράγωγος ανώτερης τάξης .....	25
14.	Κανόνες παραγωγίσης και βασικές παράγωγοι .....	29
15.	Ακρότατες τιμές συναρτήσεων .....	29
16.	Τυπολόγιο Τριγωνομετρίας .....	30

1

Ταλαντώσεις

A. Μηχανικές Ταλαντώσεις

1.1.	Περιοδικά φαινόμενα .....	35
1.2.	Η απλή αρμονική ταλάντωση .....	36

<b>1.3.</b>	Δυναμική του υλικού σημείου στην απλή αρμονική ταλάντωση .....	40
<b>1.4.</b>	Ταλαντώσεις με ελατήριο .....	41
<b>1.5.</b>	Η ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση .....	44
<b>1.6.</b>	Η φθίνουσα ταλάντωση .....	47
<b>1.7.</b>	Η ελεύθερη ταλάντωση .....	48
<b>1.8.</b>	Η εξαναγκασμένη ταλάντωση .....	49
<b>1.9.</b>	Η σύνθεση ταλαντώσεων και η Αρχή της Επαλληλίας .....	50
<b>1.10.</b>	Σύνθεση απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια αρχή, την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα .....	50
<b>1.11.</b>	Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια αρχή, την ίδια διεύθυνση, το ίδιο πλάτος και μικρή διαφορά συχνοτήτων – Διακροτήματα .....	53
<b>1.12.</b>	Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	53
<b>Ερωτήσεις</b> .....		68
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....		87
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....		120

## B. Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

<b>1.13.</b>	Η ηλεκτρική ταλάντωση και οι εξισώσεις της .....	133
<b>1.14.</b>	Οι τέσσερις φάσεις της ηλεκτρικής ταλάντωσης .....	135
<b>1.15.</b>	Οι φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις .....	138
<b>1.16.</b>	Οι εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις .....	139
<b>1.17.</b>	Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	140
<b>Ερωτήσεις</b> .....		149
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....		155
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....		164

# 2

## Κύματα

### A. Μηχανικά κύματα

<b>2.1.</b>	Ορισμός του κύματος .....	173
<b>2.2.</b>	Μηχανικά κύματα .....	173

<b>2.3.</b> Η ταχύτητα και το μήκος κύματος .....	173
<b>2.4.</b> Διαφορές μεταξύ εγκάσιων και διαμήκων κυμάτων .....	176
<b>2.5.</b> Η εξίσωση του κύματος και η διαφορά φάσης .....	176
<b>2.6.</b> Γραφικές παραστάσεις της φάσης και της απομάκρυνσης .....	179
<b>2.7.</b> Επιφανειακά κύματα και κύματα χώρου .....	182
<b>2.8.</b> Η Αρχή της Επαλληλίας .....	183
<b>2.9.</b> Σύμφωνα κύματα - σύμφωνες και σύγχρονες πηγές .....	183
<b>2.10.</b> Η συμβολή των κυμάτων .....	184
<b>2.11.</b> Τα στάσιμα κύματα .....	187
<b>2.12.</b> Η εξίσωση του στάσιμου κύματος .....	187
<b>2.13.</b> Οι ιδιότητες του στάσιμου κύματος .....	191
<b>2.14.</b> Διαφορές μεταξύ τρεχόντων και στάσιμων κυμάτων .....	191
<b>2.15.</b> Στάσιμα εγκάρσια κύματα σε χορδή .....	192
<b>2.16.</b> Στάσιμα διαμήκη κύματα .....	192
<b>2.17.</b> Στάσιμα κύματα σε ράβδο .....	193
<b>2.18.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	193
<b>Ερωτήσεις</b> .....	207
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	214
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	234
 <b><u>B. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα</u></b>	
<b>2.19.</b> Το παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο .....	243
<b>2.20.</b> Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα .....	243
<b>2.21.</b> Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας .....	245
<b>2.22.</b> Η ανάκλαση του φωτός .....	248
<b>2.23.</b> Η διάθλαση του φωτός .....	248
<b>2.24.</b> Η ολική ανάκλαση .....	251
<b>2.25.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	253
<b>Ερωτήσεις</b> .....	256
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	262
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	269

**A. Κινηματική του Στερεού Σώματος**

<b>4.1.</b> Μηχανική και Κινηματική .....	279
<b>4.2.</b> Μεταφορική κίνηση στερού σώματος .....	280
<b>4.3.</b> Στροφική κίνηση στερού σώματος .....	280
<b>4.4.</b> Σύνθετη κίνηση στερεού σώματος (επίπεδη κίνηση-κύλιση) .....	283
<b>4.5.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	285
<b>Ερωτήσεις</b> .....	292
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	297
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	308

**B. Ισοροπία του Στερεού Σώματος**

<b>4.6.</b> Βασικές έννοιες .....	310
<b>4.7.</b> Η ροπή δύναμης ως προς σημείο .....	311
<b>4.8.</b> Η Ροπή δύναμης ως προς άξονα .....	312
<b>4.9.</b> Το ζεύγος δυνάμεων και το θεώρημα των ροπών .....	313
<b>4.10.</b> Η συνθήκη ισοροπίας στερεού σώματος .....	314
<b>4.11.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	315
<b>Ερωτήσεις</b> .....	323
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	326
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	335

**Γ. Ο Θεμελιώδης Νόμος**

<b>4.12.</b> Η μεταφορική κίνηση του στερού σώματος και το θεώρημα της κίνησης του κέντρου μάζας .....	338
<b>4.13.</b> Η ροπή αδράνειας .....	339
<b>4.14.</b> Ο Θεμελιώδης Νόμος στη στροφική κίνηση .....	340
<b>4.15.</b> Σύνθετη κίνηση ελεύθερου στερεού σώματος .....	341
<b>4.16.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	343
<b>Ερωτήσεις</b> .....	349

<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	356
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	374

#### Δ. Στροφορμή και Κινητική Ενέργεια

<b>4.17.</b> Η στροφορμή υλικού σημείου .....	380
<b>4.18</b> Η στροφορμή στερεού σώματος .....	381
<b>4.19</b> Η γενικότερη διατύπωση του Θεμελιώδους Νόμου .....	382
<b>4.20</b> Η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής .....	383
<b>4.21.</b> Το έργο και η ισχύς της ροπής στη στροφική κίνηση .....	384
<b>4.22</b> Η κινητική ενέργεια στη στροφική και στη σύνθετη κίνηση .....	384
<b>4.23.</b> Το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας και η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας .....	385
<b>4.24.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	386
<b>Ερωτήσεις</b> .....	395
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	403
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	418

## 5

### Κρούσεις και σχετικές κινήσεις

#### A. Κρούσεις

<b>5.1.</b> Η κρούση και οι κρουστικές δυνάμεις .....	439
<b>5.2.</b> Η διατήρηση της ορμής κατά την κρούση .....	440
<b>5.3.</b> Η ελαστική και η ανελαστική κρούση .....	441
<b>5.4.</b> Κεντρική, πλάγια και έκκεντρη κρούση .....	442
<b>5.5.</b> Η κεντρική ελαστική κρούση .....	443
<b>5.6.</b> Πλάγια ελαστική κρούση λείων σφαιρών .....	445
<b>5.7.</b> Η κεντρική πλαστική κρούση .....	447
<b>5.8.</b> Η πλάγια πλαστική κρούση .....	448
<b>5.9.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	449
<b>Ερωτήσεις</b> .....	459



<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	464
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	480
<b><u>B. Φαινόμενο Doppler</u></b>	
<b>5.10.</b> Το φαινόμενο Doppler .....	492
<b>5.11.</b> Εφαρμογές του φαινομένου Doppler .....	495
<b>5.12.</b> Οδηγίες για τη λύση προβλημάτων .....	496
<b>Ερωτήσεις</b> .....	499
<b>Λυμένα προβλήματα</b> .....	505
<b>Προβλήματα προς λύση</b> .....	513
<b>Σύντομες Απαντήσεις</b> <b>στις Ερωτήσεις και στα Προβλήματα προς Λύση</b> .....	521
<b>BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	543

# A

## Μηχανικές Ταλαντώσεις

### 1.1 Περιοδικά φαινόμενα

**Περιοδικά φαινόμενα** ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Περιοδικά φαινόμενα π.χ. είναι η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της και η περιφορά της γύρω από τον Ήλιο.

**Περίοδος T** ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζεται ο χρόνος στον οποίο ολοκληρώνεται το φαινόμενο. Η περίοδος  $T$  είναι ίση με το λόγο του χρόνου  $t$  προς το πλήθος των επαναλήψεων  $N$  του φαινομένου που συμβαίνουν σ' αυτόν το χρόνο. Είναι δηλαδή

$$T = \frac{t}{N} . \quad (1)$$

Το αντίστροφο αυτού του λόγου

$$f = \frac{N}{t} \quad (2)$$

ονομάζεται **συχνότητα** του περιοδικού φαινομένου και εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων του φαινομένου στη μονάδα του χρόνου. Μονάδα της συχνότητας είναι ο  $1\text{c/s}$  (ή  $1\text{Hz}$ ). Από τους ορισμούς (1) και (2) προκύπτει η σχέση

$$f = \frac{1}{T}$$

σύμφωνα με την οποία η συχνότητα και η περίοδος είναι μεγέθη αντίστροφα.

Γενικά, μια συνάρτηση  $f(x)$  ονομάζεται **περιοδική** με περίοδο  $T$ , όταν για κάθε  $x$  του  $\mathbb{R}$  είναι  $f(x) = f(x+T)$ , οπότε  $f(x) = f(x+kT)$ , όπου  $k$  ακέραιος.

Έτσι η συνάρτηση  $y = A\eta\mu\omega t$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , διότι είναι

$$A\eta\mu\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\eta\mu(\omega t + 2\pi) = A\eta\mu\omega t.$$

Το μέγεθος

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα** (ή κυκλική συχνότητα) και μονάδα μέτρησής της είναι το 1 rad/s.

Η κυκλική ομαλή κίνηση είναι περιοδική κίνηση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ίση προς τη γωνιακή ταχύτητα } \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

## 1.2 Η απλή αρμονική ταλάντωση

### A. Ορισμός



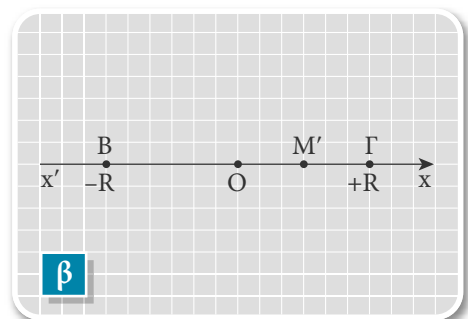
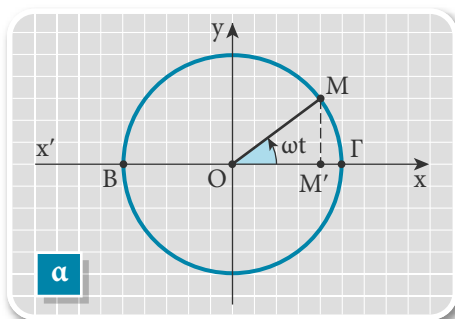
**Ταλάντωση ή δόνηση ή κύμανση ή κράδανση** ονομάζεται κάθε περιοδική και συγχρόνως παλινδρομική κίνηση υλικού σημείου ή στερεού σώματος.

(Θυμίζουμε ότι υλικό σημείο είναι σώμα του οποίου παραλείπονται οι διαστάσεις και παριστάνεται με γεωμετρικό σημείο).

Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία γραμμή ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση**.

Ταλάντωση π.χ. εκτελεί το εκκρεμές ενός ρολογιού, η κούνια στην παιδική χαρά, το νερό μιας πισίνας, όταν ρίξουμε σ' αυτό μια πέτρα κ.λπ.

Ένα γεωμετρικό παράδειγμα ταλάντωσης προκύπτει από την κυκλική ομαλή κίνηση ενός σημείου  $M$ , το οποίο κινείται σε περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$  (Σχ. 1-1α). Η γωνιακή ταχύτητα του σημείου  $M$  είναι



Σχ. 1-1

$\omega$  και η περίοδος του  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Η προβολή  $M'$  του σημείου  $M$  στην οριζόντια διάμετρο  $B\Gamma$  του κύκλου (άξονας  $x'x$ ) εκτελεί περιοδική και συγχρόνως παλινδρομική κίνηση με περίοδο  $T$  όση είναι και η περίοδος του σημείου  $M$ . Αν κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σημείο  $M$  βρίσκεται στη θέση  $\Gamma$ , η τετμημένη  $x$  του σημείου  $M'$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$  είναι  $x = OM$  συνωτ, όπου  $OM=R$ , οπότε

$$x = R \sin \omega t.$$

Και επειδή  $\sin \omega t = \eta \mu \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ , έχουμε

$$x = R \eta \mu \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

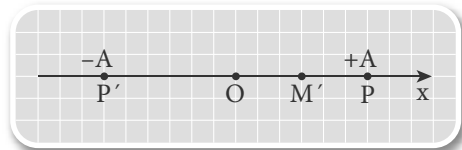


Κάθε γραμμική ταλάντωση υλικού σημείου στην οποία η απομάκρυνση του υλικού σημείου από ένα σταθερό σημείο  $O$  της τροχιάς του είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή δίνεται από εξίσωση της μορφής

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση**.

Το σημείο  $O$  είναι το μέσο της τροχιάς του υλικού σημείου και ονομάζεται **θέση ισορροπίας** (Σχ. 1-2). Τα μεγέθη  $A$ ,  $\omega$  και  $\varphi_0$  είναι σταθερά. Τα  $A$  και  $\omega$  είναι θετικά, ενώ το  $\varphi_0$  μπορεί να έχει τιμή θετική, αρνητική ή μηδενική. Όταν είναι  $\varphi_0 = 0$ , η εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή της



Σχ. 1-2

$$x = A \eta \mu \omega t \quad (2)$$

Το  $A$  ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης και αποτελεί τη μέγιστη απομάκρυνση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του.

Το  $\omega$  είναι η **γωνιακή συχνότητα** της ταλάντωσης, μετριέται σε rad/s και εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η **φάση**  $\omega t + \varphi_0$ .

Η φάση  $\omega t + \varphi_0$  μετριέται σε rad, αυξάνεται ανάλογα προς το χρόνο και σε χρόνο μιας περιόδου αυξάνεται κατά  $2\pi$  rad.

Συνεπώς, όπως είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, είναι

$$\omega(t+T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi \quad \text{ή} \quad \omega T = 2\pi \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

και, επειδή  $\frac{1}{T} = f$ , είναι

$$\omega = 2\pi f$$

όπου  $T$  η **περίοδος** και  $f$  η **συχνότητα** της ταλάντωσης.

Περίοδος είναι χρόνος στον οποίο εκτελείται μία ταλάντωση, ενώ η συχνότητα εκφράζει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το κινούμενο υλικό σημείο στη μονάδα του χρόνου.

Το  $\varphi_0$  είναι η φάση της ταλάντωσης κατά τη χρονική στιγμή  $t=0$ , ονομάζεται **αρχική φάση** και η τιμή της εξαρτάται από την αρχική συνθήκη. Η αρχική συνθήκη προσδιορίζει τη θέση του υλικού σημείου κατά την αρχή των χρόνων και τη φορά της ταχύτητάς του την ίδια στιγμή, αν αυτή δεν είναι μηδενική. Η αρχική φάση λαμβάνει τιμές που είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες από  $2\pi$  rad. Λεπτομέρειες για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης υπάρχουν στην παρ. 1.12/2.

Από κάθε σημείο της τροχιάς του, εκτός από τα ακραία, το υλικό σημείο διέρχεται δύο φορές ανά περίοδο με ταχύτητες που έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά. Σε κάθε ακραία θέση το υλικό σημείο βρίσκεται μια φορά ανά περίοδο.

## B. Ταχύτητα και επιτάχυνση

Η εξίσωση της ταχύτητας και η εξίσωση της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση προκύπτουν με παραγώγιση και είναι:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{και τελικά} \quad v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{και τελικά} \quad a = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (4)$$

$$\text{και, επειδή } A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) = x, \text{ είναι και } a = -\omega^2 x \quad (5)$$

Εξάλλου, επειδή  $\sin(\omega t + \varphi_0) = \pm \sqrt{1 - \eta \mu^2(\omega t + \varphi_0)}$ , η (3) δίνει

$$v = \pm \omega A \sqrt{1 - \eta \mu^2(\omega t + \varphi_0)} \quad \text{ή} \quad v = \pm \omega \sqrt{A^2 - A^2 \eta \mu^2(\omega t + \varphi_0)}$$

και, επειδή  $A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) = x$ , έχουμε

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (6)$$

Είναι επίσης  $\sin(\omega t + \varphi_0) = \eta \mu\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$  και  $\eta \mu(\omega t + \varphi_0) = -\eta \mu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$ , οπότε οι (3) και (4) παίρνουν και τη μορφή:

$$v = \omega A \eta \mu \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7)$$

και

$$a = \omega^2 A \eta \mu (\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (8)$$

Από τις (1), (7) και (8) προκύπτει ότι η φάση της ταχύτητας είναι μεγαλύτερη από τη φάση της απομάκρυνσης κατά  $\frac{\pi}{2}$  rad και η φάση της επιτάχυνσης μεγαλύτερη από τη φάση της ταχύτητας κατά  $\frac{\pi}{2}$  rad.

Από την εξίσωση (6) προκύπτουν τα εξής:

- α.** στη θέση ισορροπίας ( $x=0$ ) είναι  $v = \pm \omega A$  και  $|v| = v_{\max} = \omega A$ ,
- β.** στις ακραίες θέσεις ( $x = \pm A$ ) είναι  $v = 0$ ,
- γ.** σε κάθε θέση με  $-A < x < A$  αντιστοιχούν δύο τιμές της ταχύτητας που έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά και
- δ.** σε δύο θέσεις με απομακρύνσεις  $x_1$  και  $x_2 = -x_1$ , που είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας  $O$ , η ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο.

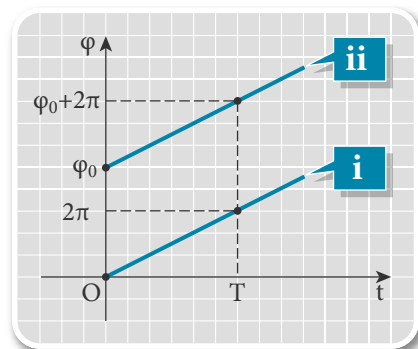
Από την εξίσωση (5) προκύπτουν τα εξής:

- α.** η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά αντίθετη προς τη φορά της απομάκρυνσης, δηλαδή έχει πάντοτε φορά προς τη θέση ισορροπίας  $O$ ,
- β.** στη θέση ισορροπίας ( $x=0$ ) είναι  $a=0$ ,
- γ.** στις ακραίες θέσεις ( $x = \pm A$ ) είναι  $a = \mp \omega^2 A$  και  $|a| = a_{\max} = \omega^2 A$  και
- δ.** σε δύο θέσεις με απομακρύνσεις  $x_1$  και  $x_2 = -x_1$ , που είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας  $O$ , η επιτάχυνση έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά.

### Γραφικές παραστάσεις

Όπως είπαμε, η φάση  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  αυξάνεται ανάλογα προς το χρόνο και σε χρόνο μιας περιόδου  $T$  αυξάνεται κατά  $2\pi$  rad.

Συνεπώς, σε χρόνο  $\frac{T}{4}$  η φάση αυξάνεται κατά  $\frac{\pi}{2}$  rad.



**Σχ. 1-3.** Γραφική παράσταση της φάσης  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  της απλής αρμονικής ταλάντωσης:  
i. με  $\varphi_0 = 0$  και ii. με  $\varphi_0 > 0$ .