Χ. Γ. ΚΑΡΥΟΦΥΛΛΗΣ
Χ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΛΑΚΗ-
ΣΑΒΒΟΠΟΥΛΟΥ

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΙΙ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό περιέχει την ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Τοπολογία ΙΙ» που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και είναι συνέχεια του βιβλίου «Τοπολογία Ι» των ίδιων συγγραφέων.

Σκοπός του είναι η εισαγωγή σε ορισμένα Κεφάλαια της Γενικής Τοπολογίας.

Κύρια προσπάθειά μας κατά την συγγραφή του βιβλίου ήταν η απλούστερη δυνατή παρουσίαση του κειμένου. Τα πολλά Παραδείγματα, οι Παρατηρήσεις και οι Ασκήσεις έχουν σκοπό να διευκολύνουν τον αναγνώστη στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

Ευχαριστούμε το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την αξιόλογη εμφάνιση του βιβλίου καθώς και τον κ. Φώτη Κλάδο για τα επιμελημένα σχέδια.

Θεσσαλονίκη, 1986

Χ. Καρυοφύλλης
Χ. Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου

Κεφάλαιο 1

Τοπολογικοί χώροι

1.1. Ανοικτά και κλειστά σύνολα. Περιοχές σημείων.

1.1.1. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια κλάση $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X λέγεται *τοπολογία* στο X, αν

(O_1) το $\emptyset$ και το X ανήκουν στην $\mathcal{T}$,

(O_2) η τομή δυο οποιωνδήποτε συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$, και

(O_3) η ένωση οσωνδήποτε συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Αν $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο σύνολο $X \neq \emptyset$, το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *τοπολογικός χώρος* και τα σύνολα της $\mathcal{T}$ λέγονται $\mathcal{T}$-*ανοικτά* ή, απλά, *ανοικτά* σύνολα του $(X, \mathcal{T})$.

Σημείωση 1. Στο εξής, όταν λέμε « ο τ.χ.[1] $(X, \mathcal{T})$» θα εννοούμε πάντοτε ότι $X \neq \emptyset$. Επίσης, αν δεν είναι απαραίτητο να αναφέρουμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ θα λέμε, απλά, «ο τ.χ. X». ■

Παράδειγμα 1. Αν $X=\{0, 1\}$, προφανώς η κλάση $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, είναι μια τοπολογία στο X. Ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *τοπολογικός χώρος του Sierpinski*. ■

Παράδειγμα 2. Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, από το Θεώρ. I/2.1 της Τ.I [2] είναι γνωστό ότι η κλάση

---

(1) «τ.χ.» σημαίνει «τοπολογικός χώρος».

(2) Στο εξής κάθε παραπομπή στην Τ.I αναφέρεται στο βιβλίο «Τοπολογία I» των Χ. Καρυοφύλλη και Χ. Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου.

$$\mathcal{T}(d) = \{A/A \subset X \text{ και } \forall\ x \in A,\ \exists\ \varepsilon_x > 0,\ B(x, \varepsilon_x) \subset A\}$$

των d-ανοικτών συνόλων του (X, d) πληροί τις ιδιότητες (O_1), (O_2) και (O_3), επομένως η $\mathcal{T}(d)$ είναι μια τοπολογία στο X.

Η τοπολογία $\mathcal{T}(d)$ λέγεται *τοπολογία της μετρικής* d ή *τοπολογία που παράγεται από τη μετρική* d.

Σημειώνουμε [Παραδ. 3 και 4/2.1. της Τ.Ι] ότι κάθε ανοικτή σφαιρική περιοχή και το συμπλήρωμα κάθε κλειστής σφαιρικής περιοχής μετρικού χώρου (X, d) είναι $\mathcal{T}(d)$-ανοικτά σύνολα. ■

Παράδειγμα 3. Ας θεωρήσουμε τον ευκλείδειο μ.χ. $(\mathbb{R}, e)$. Η τοπολογία $\mathcal{T}(e)$ λέγεται *ευκλείδεια τοπολογία στο* $\mathbb{R}$ και παριστάνεται με $\mathcal{E}$. Ο τ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ λέγεται *ευκλείδειος τοπολογικός χώρος*.

Επειδή

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \forall\ \varepsilon > 0,\ \ B_e(x, \varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\,,$$

είναι φανερό [Παράδ. 1/2.1. της Τ.Ι] ότι κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό σύνολο του $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Γενικότερα, είναι γνωστό ['Ασκ. 5/2.1. της Τ.Ι] ότι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, ανν[1] είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών διαστημάτων ξένων (ανά δύο) μεταξύ τους. ■

Παράδειγμα 4. Η τοπολογία $\mathcal{T}(e_n)$ στο $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ευκλείδεια τοπολογία στο* $\mathbb{R}^n$ και παριστάνεται με $\mathcal{E}_n$. Ο τ.χ. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$ λέγεται *ευκλείδειος τοπολογικός χώρος*. ■

Σημείωση 2. Στο εξής όταν λέμε ο τ.χ. $\mathbb{R}^n$, θα εννοούμε πάντοτε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένο με την ευκλείδεια τοπολογία $\mathcal{E}_n$. ■

Παράδειγμα 5. Αν $X \neq \varnothing$ είναι φανερό ότι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι μια τοπολογία στο X. Η τοπολογία αυτή λέγεται *διακεκριμμένη τοπολογία* στο X και ο τ.χ. $(X, \mathcal{P}(X))$ *διακεκριμμένος τοπολογικός χώρος*. ■

Παράδειγμα 6. Αν $X \neq \varnothing$, η κλάση $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ είναι προφανώς μια τοπολογία στο X. Η $\mathcal{T}$ λέγεται *μη διακεκριμμένη τοπολογία* στο X και ο τ.χ. $(X, \{\varnothing, X\})$ *μη διακεκριμμένος τοπολογικός χώρος*.

---

(1) «ανν» σημαίνει «αν και μόνο αν»

Ειδικότερα, στην περίπτωση που το X είναι μονοσύνολο, παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X\} = \mathcal{P}(X),$$

δηλαδή ότι η μη διακεκριμμένη τοπολογία ταυτίζεται με τη διακεκριμμένη τοπολογία στο X. ■

Παράδειγμα 7. Ας θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X και τη κλάση

$$\mathcal{T} = \{A / A \subset X \text{ και } CA \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\varnothing\}.$$

Είναι φανερό ότι $\varnothing \in \mathcal{T}$ και επίσης, εφόσον $CX = \varnothing$, ότι $X \in \mathcal{T}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο οποιαδήποτε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$.

Αν $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, τότε προφανώς $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Αν $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, οπότε $A_1 \neq \varnothing$ και $A_2 \neq \varnothing$, είναι φανερό ότι τα σύνολα CA_1, CA_2 είναι πεπερασμένα, επομένως η ένωση

$$CA_1 \cup CA_2 = C(A_1 \cap A_2)$$

είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο και συνεπώς $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Τέλος, αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι μια οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων της $\mathcal{T}$, τότε, αν $\cup A_i = \varnothing$, προφανώς $\cup A_i \in \mathcal{T}$.

Αν $\cup A_i \neq \varnothing$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας της απόδειξης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\forall\ i \in I$, $A_i \neq \varnothing$, οπότε $\forall\ i \in I$, το CA_i είναι πεπερασμένο σύνολο. Τότε όμως είναι φανερό ότι και η τομή

$$\cap CA_i = C(\cup A_i)$$

είναι πεπερασμένο σύνολο, επομένως $\cup A_i \in \mathcal{T}$.

Ώστε, η κλάση $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X. Η τοπολογία αυτή λέγεται *τοπολογία των πεπερασμένων συμπληρωμάτων* στο X.

Αν το σύνολο X είναι πεπερασμένο, παρατηρούμε ότι

$$\forall\ A \subset X,\ CA \text{ πεπερασμένο},$$

επομένως είναι φανερό ότι $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ [Παράδ. 5/1.1]. ■

Παρατήρηση 1. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι αντί της ιδιότητας (O_2) των ανοικτών συνόλων ισχύει γενικότερα η εξής ιδιότητα:

(O_2') Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. ■

Παρατήρηση 2. Η τομή άπειρου πλήθους ανοικτών συνόλων δεν είναι πάντοτε ανοικτό σύνολο. Πραγματικά, είναι γνωστό ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το διάστημα $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ είναι ανοικτό σύνολο του τ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Αλλά η τομή

$$\bigcap \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

δεν είναι ανοικτό σύνολο, αφού

$$\nexists\ \varepsilon > 0,\ \ B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \{0\}\ .\quad ■$$

Παρατήρηση 3. Αν $(A_i)_{i \in \varnothing}$ είναι μια κενή οικογένεια υποσυνόλων του X, από την Άσκ. 1/0.3 της Τ.Ι, είναι γνωστό ότι

$$\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing\ , \qquad \bigcap_{i \in \varnothing} A_i = X\ ,$$

επομένως είναι φανερό ότι μια κλάση $\mathcal{T}$ υποσυνόλων ενός μη κενού συνόλου X είναι μια τοπολογία στο X, ανν

(O_1*) η τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$, και

(O_2*) η ένωση οσωνδήποτε συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. ■

1.1.2. Ένας τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *μετρήσιμος*, αν υπάρχει μια τουλάχιστο μετρική d στο X, τέτοια ώστε $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$.

Παράδειγμα 8. Ο ευκλείδειος τ.χ. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$ είναι μετρήσιμος. ■

Παράδειγμα 9. Αν $X \neq \varnothing$ και $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ x, y \in X,\ \ d_0(x, y) = \begin{cases} 0\ , & \text{όταν } x = y \\ 1\ , & \text{όταν } x \neq y \end{cases}\ ,$$

η τετριμμένη μετρική στο X, είναι γνωστό [Παράδ. 5/2.1. της Τ.Ι] ότι $\mathcal{T}(d_0) = \mathcal{P}(X)$, επομένως ο διακεκριμμένος τ.χ. $(X, \mathcal{P}(X))$ είναι μετρήσιμος. ■

Παράδειγμα 10. Ο τ.χ. του ***Sierpinski***, δηλαδή ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, όπου $X = \{0, 1\}$ και $\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{0\}\}$, δεν είναι μετρήσιμος.

Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρήσιμος, δηλαδή ότι υπάρχει μετρική d στο X, τέτοια ώστε $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$.

Επειδή $\{0\} \in \mathcal{T}$,

$$\exists\, \varepsilon > 0 , \quad B_d(0, \varepsilon) \subset \{0\} ,$$

επομένως, είναι φανερό ότι

$$B_d(0, \varepsilon) = \{0\} .$$

Εφόσον τώρα $1 \notin B_d(0, \varepsilon)$, οπότε $d(0, 1) \geq \varepsilon$, προκύπτει ότι

$$B_d(1, \varepsilon) = \{1\} ,$$

δηλαδή ότι $\{1\} \in \mathcal{T}$, πράγμα άτοπο. ■

1.1.3. Ένα σύνολο K τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *$\mathcal{T}$-κλειστό*, ή απλά, *κλειστό*, αν το συμπλήρωμά του CK είναι $\mathcal{T}$-ανοικτό.

Η κλάση όλων των κλειστών συνόλων του τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ παριστάνεται με $\mathcal{T}^C$.

Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων (O_1), (O_2), (O_3) των ανοικτών συνόλων τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι ότι:

Θεώρημα I. *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος, τότε*

(K_1) το $\varnothing$ και το X είναι κλειστά σύνολα,

(K_2) η ένωση δυο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, και

(K_3) η τομή οσωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει αμέσως με τη βοήθεια των κανόνων του *De Morgan*. ■

Παράδειγμα 11. Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ο τ.χ. του *Sierpinski*, είναι φανερό ότι

$$\mathcal{T}^C = \{\varnothing, X, \{1\}\} . \quad ■$$

Παράδειγμα 12. Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, $a \in X$ και $\varepsilon > 0$, από το Παράδ. 4/2.1 της Τ.Ι και την ιδιότητα (O_3) των ανοικτών συνόλων προκύπτει ότι

$$C\,\bar{B}\,(a,\,\varepsilon) \in \mathcal{T}(d)$$

και

$$C\,S\,(a,\,\varepsilon) = C\,\{x/d\,(a,\,x) = \varepsilon\} = B\,(a,\,\varepsilon) \cup C\bar{B}\,(a,\,\varepsilon) \in \mathcal{T}(d)\,,$$

επομένως

$$\bar{B}\,(a,\,\varepsilon) \in \mathcal{T}^{C}\,(d) \quad \text{και} \quad S\,(a,\,\varepsilon) \in \mathcal{T}^{C}(d)\,.$$

Ώστε, κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή και κάθε σφαιρική επιφάνεια μετρικού χώρου $(X,\,d)$ είναι $\mathcal{T}(d)$-κλειστά σύνολα. ■

Παράδειγμα 13. Ας θεωρήσουμε τον ευκλείδειο τ.χ. $(\mathbb{R},\,\mathcal{E})$.

i) Αν $\mathbb{R} \ni a < \beta \in \mathbb{R}$, χάρη στο Παράδ. 3/1.1. και την ιδιότητα (O_3) των ανοικτών συνόλων, παρατηρούμε ότι

$$C\,[a,\,\beta] = \,]-\infty,\,a[\,\cup\,]\beta,\,+\infty[\, \in \mathcal{E}$$

$$C\,]-\infty,\,a] = \,]a\,+\infty[\, \in \mathcal{E},$$

και

$$C\,[\beta,\,+\infty[\, = \,]-\infty,\,\beta[\, \in \mathcal{E}\,,$$

επομένως κάθε κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ (φραγμένο ή όχι) είναι κλειστό σύνολο του $(\mathbb{R},\,\mathcal{E})$.

ii) Αν $A = \{x_1\,,\,x_2\,,..,\,x_n\}$, όπου $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο του $(\mathbb{R},\,\mathcal{E})$, τότε

$$C\,A = \,]-\infty,\,x_1[\,\cup\,]x_1,\,x_2\,[\,\cup \ldots \cup\,]x_n,\,+\infty[\, \in \mathcal{E}\,,$$

επομένως κάθε πεπερασμένο σύνολο του $(\mathbb{R},\,\mathcal{E})$ είναι κλειστό. ■

Παράδειγμα 14. Αν $(X,\,\mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T} = \mathcal{P}\,(X)$, είναι ο διακεκριμμένος τοπολογικός χώρος, είναι φανερό ότι

$$\forall\ A \subset X\,,\quad C\,A \in \mathcal{T}\,,$$

επομένως

$$\mathcal{T}^{C} = \mathcal{T} = \mathcal{P}\,(X)\,.$$

Επίσης, αν $(X,\,\mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T} = \{\varnothing,\,X\}$, είναι ο μη διακεκριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε

$$\tau^C = \tau = \{\varnothing, X\}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 15. Αν τ είναι η τοπολογία των πεπερασμένων συμπληρωμάτων στο μη κενό σύνολο X [Παράδ. 7/1.1], παρατηρούμε ότι

$$\tau^C = \{K \,/\, K \subset X \text{ και } K \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{X\}. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 4. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι αντί της ιδιότητας (K_2) των κλειστών συνόλων ισχύει γενικότερα η εξής ιδιότητα:

(K_2') Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. $\blacksquare$

Παρατήρηση 5. Η ένωση άπειρου πλήθους κλειστών συνόλων δεν είναι πάντοτε κλειστό σύνολο. Πραγματικά, είναι γνωστό ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το διάστημα $\left[\, 0,\ 2-\frac{1}{n} \,\right]$ είναι κλειστό σύνολο του $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Αλλά η ένωση

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\, 0,\ 2-\frac{1}{n} \,\right] = [0,\ 2[$$

δεν είναι κλειστό σύνολο, επειδή το συμπλήρωμα

$$C\,[0,\ 2[\ = \ ]-\infty,\ 0[\ \cup\ [2,\ +\infty[$$

δεν είναι ανοικτό σύνολο του $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, αφού

$$\nexists\ \varepsilon > 0,\quad B(2,\ \varepsilon) = \ ]2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon[\ \subset C\,[0,\ 2[\,. \quad \blacksquare$$

1.1.4. Ας θεωρήσουμε ένα τ.χ. (X, τ) και ένα σημείο $x \in X$. Ένα σύνολο $V \subset X$ λέγεται *τ-περιοχή*, ή απλά, *περιοχή* του x, αν

$$\exists\, A \in \tau,\quad x \in A \subset V \quad (\text{σχ. } 1).$$

Η κλάση όλων των τ-περιοχών του σημείου x λέγεται *φίλτρο περιοχών* του x και παριστάνεται με $\mathcal{N}_\tau(x)$, ή, απλά, εφόσον δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται η τοπολογία τ, με $\mathcal{N}(x)$.

Αν $x \in A$ και $A \in \tau$, είναι φανερό ότι $A \in \mathcal{N}(x)$.

Στην περίπτωση αυτή το σύνολο A λέγεται *ανοικτή περιοχή* του x.

Η κλάση όλων των ανοικτών περιοχών σημείου x θα παριστάνεται στο εξής με $\tau(x)$. Ώστε, *Παράδειγμα 19.* Αν θεωρήσουμε τον τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ η διακεκριμμένη τοπολογία στο X, είναι γνωστό ότι, για κάθε $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{T}$, επομένως

$$\forall \; x \in X, \quad \{x\} \in \mathcal{N}(x)$$

και συνεπώς, από την Παρατ. 6/1.1. είναι φανερό ότι

$$\forall \; x \in X, \; \mathcal{N}(x) = \{A \,/\, A \subset X \text{ και } x \in A\}\,.$$

Επίσης, αν $(X, \{\varnothing, X\})$ είναι ο μη διακεκριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε

$$\forall \; x \in X, \; \mathcal{N}(x) = \{X\}\,. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 20. Ας θεωρήσουμε τον τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, όπου

$$\mathcal{T} = \{A \,/\, A \subset X \text{ και } CA \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\varnothing\}\,,$$

και το σημείο $x \in X$.

Αν $V \in \mathcal{N}(x)$, τότε

$$\exists \, A \in \mathcal{T}, \quad x \in A \subset V.$$

Αλλά

(1) $$A \subset V \;\Rightarrow\; CV \subset CA$$

και

(2) $$A \in \mathcal{T} - \{\varnothing\} \;\Rightarrow\; CA \text{ πεπερασμένο}\,,$$

επομένως, από τις (1) και (2), προκύπτει ότι το CV είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X, δηλαδή ότι $V \in \mathcal{T}$.

Ώστε, αποδείχθηκε ότι

(3) $$\forall \; x \in X, \; \mathcal{N}(x) \subset \mathcal{T}(x)\,.$$

Από την Παρατ. 6/1.1 όμως είναι γνωστό επίσης ότι

(4) $$\forall \; x \in X, \; \mathcal{T}(x) \subset \mathcal{N}(x)\,,$$

επομένως, χάρη στις (3) και (4), είναι φανερό ότι

$$\forall \; x \in X, \; \mathcal{N}(x) = \mathcal{T}(x)\,. \quad \blacksquare$$

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα ΙΙ. *Ένα σύνολο A τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι ανοικτό, ανν είναι περιοχή κάθε σημείου του.*

Απόδειξη. *(i)* Ας υποθέσουμε ότι $A \in \mathcal{T} - \{\varnothing\}$ και ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x \in A$. Τότε

$$\exists G \in \mathcal{T} \;\; (G = A), \quad x \in G \subset A\,,$$

επομένως $A \in \mathcal{N}(x)$.

Αν τώρα $A = \varnothing$ με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται επίσης ότι

$$\forall \; x \in A, \;\; A \in \mathcal{N}(x)\,.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο A είναι περιοχή κάθε σημείου του.

Αν $A = \varnothing$, τότε $A \in \mathcal{T}$.

Αν $A \neq \varnothing$, τότε

$$\forall \; x \in A, \quad \exists\, G_x \in \mathcal{T}\,, \;\; x \in G_x \subset A\,,$$

οπότε είναι φανερό ότι

$$A \subset \bigcup_{x \in A} G_x \subset A\,,$$

δηλαδή ότι

$$A = \bigcup_{x \in A} G_x\,,$$

επομένως, χάρη στην ιδιότητα (O_3) των ανοικτών συνόλων, προκύπτει ότι

$$A \in \mathcal{T}. \qquad \blacksquare$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα ΙΙΙ. *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε για κάθε $x \in X$, το φίλτρο περιοχών $\mathcal{N}(x)$ έχει τις εξής ιδιότητες:*

(N_1) $\quad \forall\; V \in \mathcal{N}(x),\; x \in V.$

(N_2) $\quad \forall\; V, W \in \mathcal{N}(x),\; V \cap W \in \mathcal{N}(x)$

(N_3) $\quad (V \in \mathcal{N}(x)$ *και* $V \subset W) \;\Rightarrow\; W \in \mathcal{N}(x)$

(N_4) $\quad \forall\; V \in \mathcal{N}(x),\;\; \exists\; W \in \mathcal{N}(x),\; \forall\; y \in W,\; V \in \mathcal{N}(y).$

Απόδειξη. Χάρη στον ορισμό της περιοχής σημείου, οι αποδείξεις των (N_1) και (N_3) είναι προφανείς.

(N_2) Αν $V, W \in \mathcal{N}(x)$, είναι φανερό ότι