Χ. Γ. ΚΑΡΥΟΦΥΛΛΗΣ

Χ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΛΑΚΗ-ΣΑΒΒΟΠΟΥΛΟΥ

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό περιέχει την ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Τοπολογία Ι» που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Σκοπός του είναι η εισαγωγή σε ορισμένα Κεφάλαια της Τοπολογίας Μετρικών χώρων, στα οποία γενικεύονται και μελετώνται οι έννοιες της συνέχειας απεικονίσεων και της σύγκλισης ακολουθιών.

Στο Κεφάλαιο 0 περιέχονται έννοιες και προτάσεις της Θεωρίας Συνόλων, απαραίτητες για την ανάπτυξη και κατανόηση της κυρίως ύλης.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την απλούστερη παρουσίαση του κειμένου. Στην καλύτερη κατανόησή του νομίζουμε ότι συμβάλλουν τα πολυάριθμα Παραδείγματα και οι Παρατηρήσεις καθώς επίσης και οι Ασκήσεις μαζί με τις υποδείξεις για τη λύση τους, που συνοδεύουν τις πιο δύσκολες απ' αυτές.

Ευχαριστούμε θερμά το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την άριστη εμφάνιση του βιβλίου καθώς και τον κ. Φώτη Κλάδο για τα επιμελημένα σχέδια.

Θεσσαλονίκη, 1985

Χ. Καρυοφύλλης
Χ. Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Βασικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο περιέχονται συγκεντρωτικά συμβολισμοί, έννοιες και προτάσεις της Θεωρίας Συνόλων που προαπαιτούνται για την ανάπτυξη ενός μαθήματος Τοπολογίας.

0.1. Σύνολα

0.1.1. Είναι γνωστό ότι κάθε συλλογή αντικειμένων λέγεται *σύνολο* και ότι τα αντικείμενα ενός συνόλου λέγονται *στοιχεία* ή *σημεία* του συνόλου.

Τα σύνολα παριστάνονται συνήθως με κεφαλαία και τα στοιχεία (των συνόλων) με μικρά γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου.

Ο συμβολισμός

$$a \in A \quad (\text{αντίστ.}^{(1)} \ a \notin A)$$

σημαίνει ότι το a *είναι* (αντίστ. *δεν είναι*) στοιχείο του συνόλου A.

Αν $a \in A$ (αντίστ. $a \notin A$), λέμε επίσης ότι το a *ανήκει* (αντίστ. *δεν ανήκει*) στο A.

Αν δυο σύνολα A και B περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, λέμε ότι το A είναι *ίσο* (ή *ισούται*) με το B ή ακόμη ότι τα σύνολα A και B είναι *ίσα* και γράφουμε

$$A = B .$$

---

(1) «αντίστ.» σημαίνει «αντίστοιχα»

Τέλος, αν τα σύνολα A και B δεν είναι ίσα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$A \neq B$$

και λέμε ότι το A είναι *διάφορο* (ή *διαφορετικό*) του B.

0.1.2. Δεχόμαστε την ύπαρξη συνόλου χωρίς κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό λέγεται *κενό* σύνολο και παριστάνεται με το σύμβολο $\varnothing$.

Τα σύνολα που θεωρούμε περιέχουν συνήθως στοιχεία κάποιου συγκεκριμένου συνόλου X που λέγεται σύνολο *αναφοράς* ή *καθολικό* σύνολο.

0.1.3. Ο καθορισμός ενός συνόλου γίνεται με δυο τρόπους:

(i) Αν είναι δυνατό να καταγράψουμε τα στοιχεία $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ συνόλου A, τότε το A παριστάνεται με το συμβολισμό

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Παράδειγμα 1. Το σύνολο που έχει μοναδικό στοιχείο το x λέγεται *μονοσύνολο* και παριστάνεται με $\{x\}$.

Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός [0.1.9.], το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n παριστάνεται με

$$\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Το σύνολο αυτό λέγεται *απόκομμα* του συνόλου των φυσικών αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{N}_n$ [0.1.9.]. ■

(ii) Αν τα στοιχεία συνόλου A ανήκουν σε ένα σύνολο X και έχουν μια κοινή ιδιότητα P, ενώ κανένα άλλο σημείο του X δεν έχει την ιδιότητα αυτή, τότε το A παριστάνεται με το συμβολισμό

$$A = \{x \,/\, x \in X \;\; \textit{και} \;\; x \;\; \textit{έχει την ιδιότητα} \;\; P\}.$$

Στην περίπτωση αυτή η ιδιότητα P λέγεται *χαρακτηριστική ιδιότητα* του συνόλου A.

Όταν είναι φανερό, ποιο είναι το σύνολο X, γράφουμε απλά

$$A = \{x/x \;\; \textit{έχει την ιδιότητα} \;\; P\}.$$

Παράδειγμα 2. Το σύνολο

$$\{x/x \;\; \textit{πραγματικός αριθμός και} \;\; x^2+1 = 0\}$$

είναι προφανώς το $\varnothing$.

Το σύνολο

$$\{x/x \;\; \textit{πραγματικός αριθμός και} \;\; x^2 < 1\}$$

είναι το ανοικτό διάστημα $]-1, 1[$ [0.1.9.]. ■

0.1.4. Αν κάθε στοιχείο του συνόλου A ανήκει στο σύνολο B (αντίστ. αν υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο του A που δεν ανήκει στο B), λέμε ότι το A είναι (αντίστ. δεν είναι) *υποσύνολο* του B ή ότι το A *περιέχεται* (αντίστ. *δεν περιέχεται*) στο B και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

(1) $$A \subset B \quad (\text{αντίστ. } A \not\subset B)\ .$$

Αντί του συμβολισμού (1) χρησιμοποιούμε συχνά και το συμβολισμό

$$B \supset A \quad (\text{αντίστ. } B \not\supset A)$$

και λέμε ότι το B *είναι* (αντίστ. *δεν είναι*) *υπερσύνολο* του A ή ότι το B *περιέχει* (αντίστ. *δεν περιέχει*) το A.

Τέλος, αν $A \subset B$ και $A \neq B$, το A λέγεται *γνήσιο υποσύνολο* του B ή ισοδύναμα, το B λέγεται *γνήσιο υπερσύνολο* του A.

Είναι φανερό ότι αν A, B, Γ είναι υποσύνολα του X, τότε

(i) $\varnothing \subset A$

(ii) $A \subset A$

(iii) $(A \subset B$ και $B \subset \Gamma) \Rightarrow$ [1] $A \subset \Gamma$, και

(iv) $A = B \Leftrightarrow$ [2] $(A \subset B$ και $B \subset A)$.

0.1.5. Σύνολα που τα στοιχεία τους είναι επίσης σύνολα λέγονται και *κλάσεις* ή *συστήματα* συνόλων. Οι κλάσεις συνόλων παριστάνονται συνήθως με καλλιγραφικά κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου.

Ειδικότερα η κλάση όλων των υποσυνόλων συνόλου X λέγεται *δυναμοσύνολο* του X και παριστάνεται με το συμβολισμό $\mathcal{P}(X)$.

0.1.6. Αν A και B είναι υποσύνολα του συνόλου X, ορίζουμε την *ένωση* $A \cup B$ και την *τομή* $A \cap B$ των A, B ως εξής:

$$A \cup B = \{x/x \in A \quad ή \quad x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x/x \in A \quad και \quad x \in B\}\ .$$

Αν A, B, Γ είναι υποσύνολα του συνόλου X, είναι φανερό ότι

(1) Αν p και q είναι προτάσεις, ο συμβολισμός «$p \Rightarrow q$» σημαίνει «*αν* p, *τότε* q» ή, ισοδύναμα, «η p *συνεπάγεται* την q».

(2) Ο συμβολισμός «$p \Leftrightarrow q$» σημαίνει «q *αν και μόνον αν* p» ή, ισοδύναμα, «η p *συνεπάγεται* την q και η q *συνεπάγεται* την p».

(i) $A \subset A \cup B$	*(ii)* $A \cap B \subset A$
(iii) $A \cup A = A$	*(iv)* $A \cap A = A$
(v) $A \cup \varnothing = A$	*(vi)* $A \cap \varnothing = \varnothing$
(vii) $A \cup X = X$	*(viii)* $A \cap X = A$
(ix) $A \cup B = B \cup A$	*(x)* $A \cap B = B \cap A$
(xi) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	*(xii)* $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
(xiii) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	*(xiv)* $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Αν $A \cap B = \varnothing$, τα σύνολα A, B λέγονται *ξένα* (μεταξύ τους).

0.1.7. Αν A και B είναι υποσύνολα του X ορίζουμε τη *διαφορά* $A-B$ των A, B ως εξής:

$$A-B = \{x/x \in A \quad \kappa\alpha\iota \quad x \notin B\} .$$

Αν τώρα $A \subset B$, η διαφορά $B-A$ λέγεται *συμπλήρωμα του* A *στο* B και παριστάνεται με το συμβολισμό $C_B A$.

Ώστε, αν $A \subset B$, τότε

$$C_B A = B-A .$$

Τέλος, αν $A \subset X$ και είναι γνωστό ότι το X είναι το καθολικό σύνολο [0.1.2.], το $C_X A$ λέγεται, απλά, *συμπλήρωμα του* A και παριστάνεται με CA.

Ώστε, αν $A \subset X$ και X είναι το καθολικό σύνολο, τότε

$$CA = C_X A = X-A .$$

Αν $A, B \subset X$ και X είναι το καθολικό σύνολο, είναι φανερό ότι

(i) $C(CA) = A$	*(ii)* $CX = \varnothing$	*(iii)* $C\varnothing = X$
(iv) $A \cup CA = X$	*(v)* $A \cap CA = \varnothing$	*(vi)* $A \subset B \Leftrightarrow CA \supset CB$.

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι

(vii) $C(A \cup B) = CA \cap CB$ *(viii)* $C(A \cap B) = CA \cup CB$.

Οι *(vii)* και *(viii)* λέγονται *ιδιότητες* ή *τύποι* ή *νόμοι* του *De Morgan*.

0.1.8. Αν θεωρήσουμε δυο στοιχεία x, y, σχηματίζεται ένα νέο στοιχείο που παριστάνεται με το συμβολισμό (x, y) και λέγεται *διατεταγμένο ζεύγος*, εφόσον δεχθούμε ότι

$$(x, y) = (a, \beta) \Leftrightarrow (x = a \quad \text{και} \quad y = \beta) .$$

Αν τώρα A, B είναι δυο οποιαδήποτε σύνολα, ονομάζουμε *καρτεσιανό γινόμενο* των A, B το σύνολο

$$A \times B = \{(x, y) \;/\; x \in A \;\text{ και }\; y \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι

$$(1) \qquad A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow (A \neq \emptyset \;\text{ και }\; B \neq \emptyset).$$

Τέλος, αν $A = B$ το $A \times A$ γράφεται A^2.

0.1.9. Θα παραθέσουμε τώρα τους συμβολισμούς ορισμένων σημαντικών υποσυνόλων του συνόλου των πραγματικών αριθμών:

$\mathbb{R}$: το σύνολο όλων των *πραγματικών* αριθμών

$\mathbb{R}^+$: το σύνολο όλων των *θετικών πραγματικών* αριθμών

$\mathbb{R}^-$: το σύνολο όλων των *αρνητικών πραγματικών* αριθμών

$\mathbb{Z}$: το σύνολο όλων των *ακέραιων* αριθμών

$\mathbb{Z}^+$: το σύνολο όλων των *θετικών ακέραιων* αριθμών

$\mathbb{Z}^-$: το σύνολο όλων των *αρνητικών ακέραιων* αριθμών

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$: το σύνολο όλων των *φυσικών* αριθμών

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;/\; p \in \mathbb{Z} \;\text{ και }\; q \in \mathbb{N} \right\}$: το σύνολο όλων των *ρητών* αριθμών

$\mathbb{Q}^+$: το σύνολο όλων των *θετικών ρητών* αριθμών

$\mathbb{Q}^-$: το σύνολο όλων των *αρνητικών ρητών* αριθμών

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$: το σύνολο όλων των *ασύμμετρων* αριθμών

$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$: *απόκομμα* του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, τότε

$]\alpha, \beta[\;= \{x \;/\; \alpha < x < \beta\}$: *ανοικτό* (και *φραγμένο*) *διάστημα*

$[\alpha, \beta] = \{x \;/\; \alpha \leq x \leq \beta\}$: *κλειστό* (και *φραγμένο*) *διάστημα*

$]\alpha, \beta] = \{x \;/\; \alpha < x \leq \beta\}$: *ανοικτό-κλειστό (ημιανοικτό) διάστημα*

$[\alpha, \beta[\;= \{x \;/\; \alpha \leq x < \beta\}$: *κλειστό−ανοικτό (ημιανοικτό) διάστημα*

$]\alpha, +\infty[\;= \{x \;/\; \alpha < x\}$: *ανοικτό* (και *μη φραγμένο*) *διάστημα*

$[\alpha, +\infty[\;= \{x \;/\; \alpha \leq x\}$: *κλειστό* (και *μη φραγμένο*) *διάστημα*

$]-\infty, \alpha[\;= \{x \;/\; x < \alpha\}$: *ανοικτό* (και *μη φραγμένο*) *διάστημα*

$]-\infty, \alpha] = \{x \;/\; x \leq \alpha\}$: *κλειστό* (και *μη φραγμένο*) *διάστημα*.

Ασκήσεις

1. Ποια είναι τα σύνολα

$$A = \{x/x \in \mathbb{R} \ \textit{και} \ x=x\}, \qquad B = \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{και} \ x < x\}\ ;$$

2. Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες όχι:

(i) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, (ii) $\emptyset = \{\emptyset\}$

(iii) $x \in A \Rightarrow \{x\} \in A$, (iv) $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A$.

3. Να αποδειχθούν οι προτάσεις *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, *(iv)* της 0.1.4.

Υπόδειξη. Η απόδειξη της *(i)* γίνεται με τη μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο*: Αν δεν ισχύει η *(i)*, δηλαδή αν $\emptyset \not\subset A$, τότε υπάρχει $x \in \emptyset$, τέτοιο ώστε $x \notin A$, πράγμα άτοπο, εφόσον το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία.

4. Να αποδειχθεί ότι

(i) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (ii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

(iii) $A \subset B \Rightarrow A \cup \Gamma \subset B \cup \Gamma$ (iv) $A \subset B \Rightarrow A \cap \Gamma \subset B \cap \Gamma$

(v) $(A \subset \Gamma \text{ και } B \subset \Gamma) \Rightarrow A \cup B \subset \Gamma$ (vi) $(A \subset B \text{ και } A \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset B \cap \Gamma$.

5. Αν A, B είναι υποσύνολα του καθολικού συνόλου X, να αποδειχθεί ότι

(i) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset CB \Leftrightarrow B \subset CA$

(ii) $A \cup B = X \Leftrightarrow CA \subset B \Leftrightarrow CB \subset A$.

6. Να αποδειχθούν οι προτάσεις *(i)* έως και *(xiv)* της 0.1.6.

Σημείωση. Για να αποδείξουμε ότι δυο σύνολα είναι ίσα, χρησιμοποιούμε την *(iv)* της 0.1.4.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \ \textit{και} \ B \subset A). \ \blacksquare$$

7. Να αποδειχθούν οι προτάσεις *(i)* έως και *(viii)* της 0.1.7.

8. Να αποδειχθεί ότι

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \ \text{ ή } \ B = \emptyset)$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε την (1) της 0.1.8. και χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

9. Να αποδειχθεί ότι

(i) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

(ii) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

(iii) $(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \subset (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$

(iv) $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$.

0.2. Απεικονίσεις

0.2.1. Αν X και Y είναι δυο μη κενά σύνολα, είναι γνωστό ότι *απεικόνιση* (ή *συνάρτηση*)

$$f\colon X \to Y$$

από το X στο Y είναι μια σύνθετη έννοια που αποτελείται από τα σύνολα X, Y και ένα *κανόνα* f, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του X ένα και μόνο ένα στοιχείο του Y.

Το X λέγεται σύνολο *ορισμού* και το Y σύνολο *άφιξης* της f.

Αν τώρα $x \in X$, το στοιχείο y του Y που αντιστοιχεί στο x παριστάνεται με $f(x)$ και λέγεται *εικόνα* του x. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f *απεικονίζει* το x στο y (ή $f(x)$) και χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{ή} \quad x \to f(x).$$

Όταν είναι φανερό ποια είναι τα σύνολα X και Y, η απεικόνιση $f: X \to Y$ παριστάνεται απλά με f.

Παράδειγμα 1. Αν $X \neq \varnothing$, η απεικόνιση $f: X \to X$, όπου

$$\forall^{(1)}\, x \in X,\ f(x) = x,$$

λέγεται *ταυτοτική* ή *μοναδιαία* απεικόνιση και παριστάνεται συνήθως με τους συμβολισμούς i_X, 1_X.

Αν $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$ και $c \in Y$, η απεικόνιση $f: X \to Y$, όπου

$$\forall\ x \in X,\ f(x) = c,$$

λέγεται *σταθερή*. ■

Τέλος, λέμε ότι δυο απεικονίσεις $f\colon X \to Y$, $g\colon K \to \Lambda$ είναι *ίσες*, όταν

(i) $X = K$

---

(1) « $\forall$ » σημαίνει «για κάθε»

(ii) $Y = \Lambda$, και

(iii) $\forall\ x \in X,\ f(x) = g(x)$.

0.2.2. Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $f\colon X \to Y$ και τα σύνολα $A \subset X$ και $\Gamma \subset Y$.

Με $f(A)$ θα παριστάνουμε το σύνολο των εικόνων όλων των σημείων του A, ενώ με $f^{-1}(\Gamma)$ το σύνολο των σημείων του X, οι εικόνες των οποίων ανήκουν στο Γ.

Ώστε,

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(\Gamma) = \{x/f(x) \in \Gamma\}\ .$$

Το $f(A)$ λέγεται *εικόνα* του A και το $f^{-1}(\Gamma)$ *αντίστροφη εικόνα* του Γ.

Ειδικότερα η εικόνα του συνόλου ορισμού X της f, δηλαδή το σύνολο

$$f(X) = \{f(x)/x \in X\}\ ,$$

λέγεται *σύνολο τιμών* της f.

Τέλος, αν $f\colon X \to Y$ είναι μια απεικόνιση, $A \subset X$, $B \subset X$, $\Gamma \subset Y$ και $\Delta \subset Y$, εύκολα αποδεικνύεται ότι

(i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$ *(ii)* $f(f^{-1}(\Gamma)) \subset \Gamma$

(iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *(iv)* $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$

(v) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *(vi)* $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$.

0.2.3. Η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ λέγεται *αμφιμονότιμη* όταν

$$\forall\ x, y \in X,\ \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

ή, ισοδύναμα, όταν

$$\forall\ x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\ .$$

Η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ λέγεται *επί-απεικόνιση*, όταν

$$\forall\ y \in Y,\ \exists^{(1)} x \in X,\ f(x) = y\ ,$$

ή, ισοδύναμα, όταν

$$f(X) = Y\ .$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f απεικονίζει το X *επί* του Y.

Τέλος, αν η $f\colon X \to Y$ είναι αμφιμονότιμη και επί-απεικόνιση, λέμε ότι η f είναι *ένα-προς-ένα* απεικόνιση.

---

(1) « $\exists$ » σημαίνει «υπάρχει ένα τουλάχιστο»

Παράδειγμα 2. Η ταυτοτική απεικόνιση $i_X : X \to X$ [Παράδ.1 /0.2] είναι προφανώς ένα-προς-ένα απεικόνιση.

Η σταθερή απεικόνιση $f : X \to Y$, όπου

$$\forall \ x \in X \ , \ f(x) = c \ ,$$

είναι αμφιμονότιμη μόνο όταν το X είναι μονοσύνολο και επί-απεικόνιση μόνον όταν $Y = \{c\}$. ■

0.2.4. Αν η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα, τότε ορίζεται μια νέα απεικόνιση, η $g\colon Y \to X$, τέτοια ώστε

$$\forall \ x \in Y, \ g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \ .$$

Η απεικόνιση αυτή λέγεται *αντίστροφη* της f και παριστάνεται με f^{-1}.

Είναι φανερό ότι η αντίστροφη f^{-1} της ένα-προς-ένα απεικόνισης f είναι επίσης ένα-προς-ένα.

Παράδειγμα 3. Αν $i_X\colon X \to X$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση τότε ισχύει προφανώς ότι

$$i_X^{-1} = i_X \ . \ ■$$

Τέλος, αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, τότε ορίζεται μια νέα απεικόνιση η $h\colon X \to Z$, τέτοια ώστε

$$\forall \ x \in X, \ h(x) = g\big(f(x)\big) \ .$$

Η απεικόνιση αυτή λέγεται *σύνθετη* απεικόνιση των f, g ή *σύνθεση* των f, g και παριστάνεται με το συμβολισμό $g \circ f$.

Παράδειγμα 4. Αν $i_X\colon X \to X$, $i_Y\colon Y \to Y$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις και $f\colon X \to Y$ μια οποιαδήποτε απεικόνιση, είναι φανερό ότι

$$f \circ i_X = f \quad \text{και} \quad i_Y \circ f = f. \ ■$$

0.2.5. *Περιορισμός* της απεικόνισης $f\colon X \to Y$ στο σύνολο $A \subset X$ λέγεται η απεικόνιση $g\colon A \to Y$, όπου

$$\forall \ x \in A, \ g(x) = f(x).$$

Ο περιορισμός της f στο A παριστάνεται απλά με f/A.

Αν τώρα $f\colon X \to Y$ είναι μια απεικόνιση και $X \subset Z$, τότε κάθε απεικόνιση $g\colon Z \to Y$, τέτοια ώστε

$$\forall \ x \in X, \ g(x) = f(x) \ ,$$

λέγεται *επέκταση* της f στο Z.

Είναι φανερό ότι η $g\colon Z \to Y$ είναι επέκταση της $f\colon X \to Y$, όπου $X \subset Z$, όταν ο περιορισμός της g στο X ισούται με την f, δηλαδή όταν

$$g/X = f\,.$$

Επίσης, αν $A \subset X$ και $f/A\colon A \to Y$ είναι ο περιορισμός της $f\colon X \to Y$ στο A, τότε η f είναι επέκταση της f/A στο X.

Ασκήσεις

1. Αν $f\colon X \to Y$ είναι μια οποιαδήποτε απεικόνιση και $A \subset B \subset X$, $\Gamma \subset \Delta \subset Y$, να αποδειχθεί ότι

$$f(A) \subset f(B), \quad f^{-1}(\Gamma) \subset f^{-1}(\Delta)\,.$$

2. Να αποδειχθούν οι προτάσεις *(i)* έως *(vi)* της 0.2.2.

3. Αν η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ είναι αμφιμονότιμη και $A \subset X$, $B \subset X$, δείξτε ότι

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A, \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\,.$$

Επίσης, αν η $f\colon X \to Y$ είναι επί-απεικόνιση και $\Gamma \subset Y$, τότε

$$f\big(f^{-1}(\Gamma)\big) = \Gamma\,.$$

4. Αν $f\colon X \to Y$ είναι μια οποιαδήποτε απεικόνιση και $A \subset X$, $\Gamma \subset Y$, να αποδειχθεί ότι

$$f(C_X A) \supset f(X) - f(A), \quad f^{-1}(C_Y \Gamma) = C_X f^{-1}(\Gamma)\,.$$

Αν, ειδικότερα, η $f\colon X \to Y$ είναι αμφιμονότιμη, τότε

$$f(C_X A) = f(X) - f(A)\,,$$

ενώ, αν η $f\colon X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα, τότε

$$f(C_X A) = C_Y f(A)\,.$$

5. Αν η απεικόνιση $f\colon X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα, να αποδειχθεί ότι

$$(f^{-1})^{-1} = f\,, \quad f^{-1} \circ f = i_X\,, \quad f \circ f^{-1} = i_Y\,,$$

όπου $i_X : X \to X$ και $i_Y : Y \to Y$ οι ταυτοτικές απεικονίσεις [Παράδ. 1/0.2].

6. Αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις $f : X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$, να αποδειχθεί ότι

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

7. Αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, να αποδειχθεί ότι

(i) (f και g αμφιμονότιμες) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ αμφιμονότιμη)

(ii) (f και g επί) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ επί)

(iii) (f και g ένα-προς-ένα) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ ένα-προς-ένα και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$)

8. Αν $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ είναι δυο (οποιεσδήποτε) απεικονίσεις και $A \subset Z$, να αποδειχθεί ότι

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) .$$

0.3. Οικογένειες

0.3.1. Σε ορισμένες περιπτώσεις η απεικόνιση $f: I \to X$ $(X \neq \varnothing)$ λέγεται *οικογένεια* στοιχείων του X και παριστάνεται με

$$(x_i / i \in I) \quad \text{ή} \quad (x_i)_{i \in I} ,$$

όπου για κάθε i του I, το x_i παριστάνει την εικόνα $f(i)$ του i.

Τα στοιχεία του συνόλου I λέγονται *δείκτες* της οικογένειας $(x_i)_{i \in I}$ και το I *σύνολο δεικτών* της $(x_i)_{i \in I}$. Τέλος, για κάθε $i \in I$, το x_i λέγεται *μέλος* της οικογένειας που αντιστοιχεί στο δείκτη i.

Είναι φανερό ότι τα μέλη μιας οικογένειας δεν είναι αναγκαστικά διαφορετικά μεταξύ τους.

Δεχόμαστε την ύπαρξη οικογένειας με σύνολο δεικτών $I = \varnothing$. Η οικογένεια αυτή λέγεται *κενή οικογένεια*.

0.3.2. Αν το σύνολο δεικτών I μιας οικογένειας στοιχείων του συνόλου $X \neq \varnothing$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, τότε η οικογένεια $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται *ακολουθία* σημείων του X και παριστάνεται επίσης με το συμβολισμό $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.