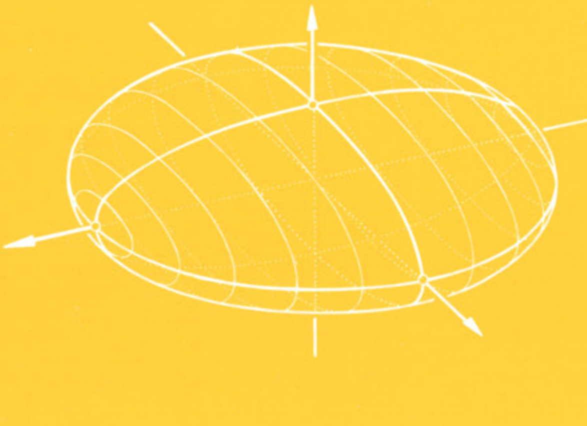
Π. Κολτσάκη
Δ. Παπαδοπούλου
Σ. Σταματάκης

Ασκήσεις αναλυτικής γεωμετρίας



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Θεσσαλονίκη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Αναλυτική Γεωμετρία είναι ένα από τα βασικά μαθήματα, που διδάσκονται στα πρώτα εξάμηνα των σπουδών τους κυρίως οι φοιτητές των Τμημάτων Μαθηματικών και Φυσικής του Πανεπιστημίου και των Σχολών του Πολυτεχνείου.

Πιστεύουμε, ότι οι έννοιες και τα συμπεράσματά της, σημαντικά για άλλους κλάδους των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας ειδικότερα, μπορούν να γίνουν βαθύτερα κατανοητά στο φοιτητή, μόνον όταν είναι σε θέση να λύσει μόνος του συγκεκριμένα προβλήματα. Επομένως, ένα βιβλίο, που θα είναι αφιερωμένο αποκλειστικά στις ασκήσεις και θα δώσει την ευκαιρία στο φοιτητή να ασχοληθεί συστηματικά μ' αυτές, είναι απαραίτητο. Αυτός είναι ο λόγος, που μας ώθησε να γράψουμε αυτό το βιβλίο. Ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει, ότι σκοπός μας δεν ήταν να παραθέσουμε απλά μια σειρά λυμένων ασκήσεων, αλλά, πολύ περισσότερο, να τον παρακινήσουμε να συνεργασθεί και να αυτενεργήσει. Άλλωστε, και εδώ συμβαίνει ό,τι πάντα στα Μαθηματικά: Η μαθηματική γνώση κατακτάται μόνο με πραγματική μαθηματική ενασχόληση.

Το βιβλίο μας απευθύνεται κυρίως στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, οι οποίοι διδάσκονται την Αναλυτική Γεωμετρία από το βιβλίο του κ. Ν. Στεφανίδη, Εισαγωγή στη Γεωμετρία, Γ΄ έκδοση βελτιωμένη, Θεσσαλονίκη 1985. Περιέχει 139 λυμένες και 263 άλυτες ασκήσεις, πολλές από τις οποίες συμπληρώνουν την ύλη του προαναφερθέντος βιβλίου. Για να αποφευχθούν πρόσθετες δυσκολίες, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό και την ορολογία του παραπάνω βιβλίου.

Το βιβλίο χωρίζεται σε επτά κεφάλαια. Για διευκόλυνση του αναγνώστη προτάσσουμε σε κάθε κεφάλαιο εκείνα τα στοιχεία και τους τύπους από τη θεωρία, που κρίναμε απαραίτητους για τη λύση των ασκήσεων που ακολουθούν.

Η προτροπή του καθηγητή κ. Νικόλαου Κ. Στεφανίδη για τη συγγραφή αυτού του βιβλίου ήταν αποφασιστική. Γι' αυτήν, και για το ενδιαφέρον του κατά τη διάρκεια της έκδοσης, του εκφράζουμε και από τη θέση αυτή θερμές *ευχαριστίες. Επίσης, ευχαριστούμε θερμά το Τυπογραφείο Π. Ζήτη για την άρτια τυπογραφική εργασία και το σχεδιαστή κ. Φώτη Κλάδο για τα επιτυχημένα σχήματα.*

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1987

Π. ΚΟΛΤΣΑΚΗ-ΚΙΛΜΠΑΣΑΝΗ
Δ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ-ΦΛΩΡΟΥ
Σ. ΣΤΑΜΑΤΑΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Α. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

Ας είναι K τυχόν σώμα και (V, +, K , φ) ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Στα επόμενα δεν θα αναφέρουμε ως διανυσματικό χώρο την τετράδα (V, +, K, φ), αλλά για συντομία θα λέμε: Το σύνολο V είναι ένας K-*διανυσματικός χώρος*.

1. Αν U_1, U_2 είναι υποχώροι πεπερασμένων διαστάσεων ενός K-διανυσματικού χώρου V, τότε οι υποχώροι U_1+U_2 και $U_1 \cap U_2$ του V είναι επίσης πεπερασμένων διαστάσεων και ισχύει

$$\dim (U_1+U_2) + \dim (U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 .$$

2. Θεωρούμε τον K-διανυσματικό χώρο K^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqq 1$, των διατεταγμένων n-άδων από στοιχεία του σώματος K, όπου $\mathbb{Z}$ συμβολίζει το δακτύλιο των ακεραίων αριθμών. Το σύνολο $B = \{\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n\}$ των διανυσμάτων $\bar{\varepsilon}_i \in K^n$, $i = 1, \ldots, n$, που ορίζονται με τις σχέσεις

$$\bar{\varepsilon}_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}) , \quad i = 1, \ldots, n ,$$

όπου

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 , & \text{όταν } i \neq k \\ 1 , & \text{όταν } i = k \end{cases}$$

είναι *το σύμβολο του* Kronecker, αποτελεί μια βάση του K^n, που ονομάζεται *κανονική*. Στους διανυσματικούς χώρους, που δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο K^n ενός σώματος K, δεν είναι δυνατό να ορισθεί μια «κανονική» βάση.

3. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqq 1$, όπου $\mathbb{R}$ συμβολίζει το σώμα των πραγματικών αριθμών. Η απεικόνιση

$$< , > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} ,$$

που ορίζεται με τη σχέση:

$$<\bar{u}, \bar{\upsilon}> = u_1 \upsilon_1 + \ldots + u_n \upsilon_n \, ,$$

όπου $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ και $\bar{\upsilon} = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n)$ τυχόντα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, είναι ένας εσωτερικός πολλαπλασιασμός του $\mathbb{R}^n$, που ονομάζεται *κανονικός*. Αντίθετα, στους $\mathbb{R}$-διανυσματικούς χώρους, που δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n$ του σώματος $\mathbb{R}$, δεν είναι δυνατό να ορισθεί «κανονικός» εσωτερικός πολλαπλασιασμός.

4. Ας είναι V_n ένας n-διάστατος ευκλείδειος διανυσματικός χώρος. Μια βάση $B = \{\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n\}$ του V_n ονομάζεται *ορθομοναδιαία* ή *ορθοκανονική*, όταν ισχύει

$$<\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_j> = \delta_{ij} \quad \forall\ i, j = 1, \ldots, n \, .$$

Σε κάθε n-διάστατο ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V_n είναι δυνατόν, ξεκινώντας από μια τυχούσα βάση, να κατασκευασθεί, *με τη μέθοδο του* E. Schmidt, μια ορθομοναδιαία βάση (βλ. Λυμένες Ασκήσεις 12, 13). Όταν οι συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\bar{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ και $\bar{\upsilon} = \{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$ του V_n εκφράζονται ως προς μια ορθομοναδιαία βάση του V_n, τότε το εσωτερικό γινόμενο αυτών δίνεται από τη σχέση

$$<\bar{u}, \bar{\upsilon}> = u_1 \upsilon_1 + \ldots + u_n \upsilon_n \, .$$

5. Ας είναι V ένας ευκλείδειος διανυσματικός χώρος. Για όλα τα διανύσματα $\bar{u}, \bar{\upsilon} \in V$ ισχύει:

α) $\quad |<\bar{u}, \bar{\upsilon}>| \leqq |\bar{u}| \cdot |\bar{\upsilon}| \quad$ (*ανισότητα των* Cauchy - Schwarz).

Η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν είναι $\bar{u} = \lambda \bar{\upsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) $\quad \big||\bar{u}| - |\bar{\upsilon}|\big| \leqq |\bar{u} + \bar{\upsilon}| \leqq |\bar{u}| + |\bar{\upsilon}| \quad$ (*ανισότητες του τριγώνου*).

Η πρώτη (αντίστοιχα η δεύτερη) ισότητα ισχύει ακριβώς τότε, όταν είναι $\bar{u} = \lambda \bar{\upsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \leqq 0$ (αντίστοιχα $\lambda \geqq 0$).

6. Ονομάζουμε *γωνία* των μη μηδενικών διανυσμάτων $\bar{u}$ και $\bar{\upsilon}$ ενός ευκλείδειου διανυσματικού χώρου V, τον πραγματικό αριθμό φ, που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\cos\varphi = \frac{<\bar{u}, \bar{\upsilon}>}{|\bar{u}| \cdot |\bar{\upsilon}|} \, , \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi .$$

7. Ας είναι V_2 ένας διδιάστατος προσανατολισμένος ευκλείδειος

διανυσματικός χώρος και B μια θετικά προσανατολισμένη βάση αυτού. Ονομάζουμε *προσανατολισμένη γωνία* των διατεταγμένων και μη μηδενικών διανυσμάτων $\bar{u}, \bar{\upsilon} \in V_2$ τον πραγματικό αριθμό ω, που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\cos\omega = \frac{<\bar{u}, \bar{\upsilon}>}{|\bar{u}|\cdot|\bar{\upsilon}|}, \qquad \sin\omega = \frac{(\bar{u}, \bar{\upsilon})}{|\bar{u}|\cdot|\bar{\upsilon}|}, \quad 0 \leqq \omega < 2\pi,$$

όπου $(\bar{u}, \bar{\upsilon})$ συμβολίζει την ορίζουσα των διατεταγμένων διανυσμάτων $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$ ως προς τη βάση B.

8. Ας είναι V_2 (ή V_3) ένας διδιάστατος (ή τριδιάστατος) ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και $\bar{u}, \bar{\upsilon} \in V_2$ (ή $\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w} \in V_3$). Ο αριθμός

$$F = |(\bar{u}, \bar{\upsilon})| \qquad (\text{ή } J = |(\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w})|),$$

όπου $(\bar{u}, \bar{\upsilon})$ (ή $(\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w})$) είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\bar{u}, \bar{\upsilon} \in V_2$ (ή $\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w} \in V_3$), ονομάζεται *εμβαδόν* του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\bar{u}$ και $\bar{\upsilon}$ (ή *όγκος* του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$ και $\bar{w}$).

9. Ας είναι V_3 ένας τριδιάστατος προσανατολισμένος ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και

$$\bar{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \bar{\upsilon} = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}, \quad \bar{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

τρία διανύσματα αυτού, με συντεταγμένες ως προς μια ορθομοναδιαία και θετικά προσανατολισμένη βάση. Το διάνυσμα

$$\bar{u} \times \bar{\upsilon} = \{u_2\upsilon_3 - u_3\upsilon_2,\ u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3,\ u_1\upsilon_2 - u_2\upsilon_1\}$$

ονομάζεται *διανυσματικό ή εξωτερικό γινόμενο* των διατεταγμένων διανυσμάτων $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$. Ο αριθμός

$$<\bar{u}, \bar{\upsilon} \times \bar{w}>$$

ονομάζεται *μικτό γινόμενο* των διατεταγμένων διανυσμάτων $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$, $\bar{w}$. Μάλιστα ισχύει

$$<\bar{u}, \bar{\upsilon} \times \bar{w}> = (\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w}),$$

όπου $(\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w})$ συμβολίζει την ορίζουσα των διατεταγμένων διανυσμάτων $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$, $\bar{w}$.

10. Για κάθε $\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w}, \bar{z} \in V_3$ ισχύουν οι ταυτότητες:

$$<\bar{u}\times\bar{\upsilon}, \bar{w}\times\bar{z}> = <\bar{u}, \bar{w}> <\bar{\upsilon}, \bar{z}> - <\bar{u}, \bar{z}> <\bar{\upsilon}, \bar{w}> \quad \text{(Lagrange)},$$

$$|\bar{u}\times\bar{\upsilon}|^2 = |\bar{u}|^2 |\bar{\upsilon}|^2 - <\bar{u}, \bar{\upsilon}>^2,$$

$$(\bar{u}\times\bar{\upsilon}) \times (\bar{w}\times\bar{z}) = (\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{z})\,\bar{w} - (\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w})\,\bar{z}\,.$$

Β. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνονται τρία μη μηδενικά διανύσματα* $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$ *και* $\bar{\upsilon}_3$ *ενός* K- *διανυσματικού χώρου* V. *Να αποδειχθεί, ότι αν οι υποχώροι* $\mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2\})$ *και* $\mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_3\})$, *που εκτείνονται από τα διανύσματα* $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$ *και* $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_3$ *αντίστοιχα, ταυτίζονται, τότε τα διανύσματα* $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$ *και* $\bar{\upsilon}_3$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση

Θέτουμε

$$U_1 = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2\})\,, \qquad U_2 = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_3\}).$$

Ως γνωστόν είναι

$$U_1 = \{\lambda_1\bar{\upsilon}_1 + \lambda_2\bar{\upsilon}_2 \,/\, \lambda_1, \lambda_2 \in K\}\,,$$

$$U_2 = \{\mu_1\bar{\upsilon}_1 + \mu_2\bar{\upsilon}_3 \,/\, \mu_1, \mu_2 \in K\}\,.$$

Το διάνυσμα $\bar{\upsilon}_1+\bar{\upsilon}_2$ ανήκει στον υποχώρο U_1. Από την υπόθεση έχουμε $U_1 \equiv U_2$, άρα $(\bar{\upsilon}_1+\bar{\upsilon}_2) \in U_2$. Υπάρχουν συνεπώς στοιχεία $\mu_1, \mu_2 \in K$ τέτοια, ώστε να είναι

$$\bar{\upsilon}_1 + \bar{\upsilon}_2 = \mu_1\bar{\upsilon}_1 + \mu_2\bar{\upsilon}_3 \quad \Rightarrow \quad (1-\mu_1)\bar{\upsilon}_1 + \bar{\upsilon}_2 - \mu_2\bar{\upsilon}_3 = \bar{0}.$$

Επειδή στην τελευταία ισότητα ο συντελεστής του $\bar{\upsilon}_2$ είναι το 1, που είναι διάφορο του $0 \in K$, έπεται, ότι τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$ και $\bar{\upsilon}_2$ και πάρουμε $\bar{\upsilon}_3 = -\bar{\upsilon}_1$, τότε τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, ενώ είναι $U_2 = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_3\}) = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1\})$, δηλ. ισχύει $U_1 \supsetneqq U_2$. ▲

2. *Δίνονται τρεις υποχώροι* U_1, U_2 *και* U_3 *ενός* K-*διανυσματικού χώρου* V, *που πληρούν τις σχέσεις*

$$U_2 \subset U_3\,, \qquad U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3\,, \qquad U_1+U_2 = U_1+U_3\,.$$

Να αποδειχθεί, ότι οι υποχώροι U_2 *και* U_3 *ταυτίζονται.*

Λύση

Ας υποθέσουμε, ότι ισχύει $U_2 \subsetneqq U_3$. Τότε υπάρχει διάνυσμα $\bar{u}_3 \in U_3$ τέτοιο, ώστε $\bar{u}_3 \notin U_2$. Ισχύει επίσης $\bar{u}_3 \notin U_1$, γιατί αν ήταν $\bar{u}_3 \in U_1$, επειδή $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3$, θα είχαμε

$$\bar{u}_3 \in U_1 \cap U_3 \Rightarrow \bar{u}_3 \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \bar{u}_3 \in U_2 ,$$

που είναι άτοπο. Εξάλλου, επειδή $U_1+U_2 = U_1+U_3$, έχουμε

$$\bar{u}_3 \in U_1+U_3 \Rightarrow \bar{u}_3 \in U_1+U_2$$

και επομένως, υπάρχουν διανύσματα $\bar{u}_1 \in U_1$, $\bar{u}_2 \in U_2$ τέτοια, ώστε:

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 .$$

Όμως το διάνυσμα $\bar{u}_2$ ανήκει και στον υποχώρο U_3, γιατί $U_2 \subset U_3$. Άρα το διάνυσμα $\bar{u}_1 = \bar{u}_3 - \bar{u}_2$ ανήκει στον υποχώρο U_3. Ώστε ισχύει:

$$\bar{u}_1 \in U_1 ,\ \bar{u}_1 \in U_3 \Rightarrow \bar{u}_1 \in U_1 \cap U_3 \Rightarrow \bar{u}_1 \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \bar{u}_1 \in U_2$$

και

$$\bar{u}_1 \in U_2 ,\ \bar{u}_2 \in U_2 \Rightarrow (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \in U_2 \Rightarrow \bar{u}_3 \in U_2 .$$

Αλλά $\bar{u}_3 \notin U_2$, δηλ. η αρχική υπόθεση $U_2 \subsetneqq U_3$ οδήγησε σε άτοπο. Συνεπώς ισχύει $U_2 \equiv U_3$. ▲

3. *Να αποδειχθεί, ότι δύο διανύσματα* $\bar{u}=\{u_1, \ldots, u_n\}$ *και* $\bar{\upsilon}=\{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n\}$ *ενός* n-*διάστατου* K-*διανυσματικού χώρου* V_n *είναι ακριβώς τότε γραμμικά εξαρτημένα, όταν για όλους τους δείκτες* j, k=1, 2, ..., n *ισχύει*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ \upsilon_j & \upsilon_k \end{vmatrix} = 0 .$$

Λύση

I. Ας είναι τα $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$ γραμμικά εξαρτημένα. Υπάρχουν στοιχεία $\lambda, \mu \in K$, $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$, $0 \in K$, τέτοια, ώστε να είναι

$$(2) \qquad \lambda \bar{u} + \mu \bar{\upsilon} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda u_i + \mu \upsilon_i = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Αν είναι $\lambda = 0$, από τη (2) έπεται $\upsilon_i = 0$ $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$ και συνεπώς ισχύει η (1) για κάθε j, k = 1, 2,..., n. Ας είναι λοιπόν $\lambda \neq 0$. Από τη (2) προκύπτει

$$u_i = -\frac{\mu}{\lambda} \upsilon_i \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

και συνεπώς για κάθε j, k = 1, 2,..., n ισχύει

$$\begin{vmatrix} u_j & u_k \\ \upsilon_j & \upsilon_k \end{vmatrix} = u_j \upsilon_k - u_k \upsilon_j = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\upsilon_j\right)\upsilon_k - \left(-\frac{\mu}{\lambda}\upsilon_k\right)\upsilon_j = 0\,,$$

δηλ. η (1).

II. Αντίστροφα, ας ισχύει η (1) για κάθε $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε είναι

$$\frac{u_j}{\upsilon_j} = \frac{u_k}{\upsilon_k} \qquad \forall\ j, k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

δηλ.

$$u_1 : u_2 : \ldots : u_n = \upsilon_1 : \upsilon_2 : \ldots : \upsilon_n$$

και τα $\bar{u}$, $\bar{\upsilon}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. ▲

4. *Στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο*

$$V = \{\, f \,/\, f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f\ \textit{συνεχής}\}$$

θεωρούμε τα σύνολα

$$U_1 = \left\{g \in V \,/\, g(x) = c = \text{σταθ.}\ \ \forall\ x \in [0, 1]\right\}\,,$$
$$U_2 = \left\{h \in V \,\Big/ \int_0^1 h(x)\,dx = 0\right\}\,.$$

α) Να αποδειχθεί, ότι τα σύνολα U_1, U_2 *είναι υποχώροι του* V.
β) Να αποδειχθεί, ότι ισχύει $V = U_1 \oplus U_2$.

Λύση

Συμβολίζουμε με f_0 τη μηδενική συνάρτηση, δηλ. τη συνάρτηση $f_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f_0(x) = 0\ \forall\ x \in [0, 1]$. Η f_0 είναι το μηδενικό διάνυσμα του V.

α) Είναι φανερό, ότι $f_0 \in U_1$, $f_0 \in U_2$ και συνεπώς ισχύει $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$. Για κάθε $g_1, g_2 \in U_1$, δηλ.

$$g_1(x) = c_1 = \text{σταθ.}, \qquad g_2(x) = c_2 = \text{σταθ.}\ \ \forall\ x \in [0, 1]$$

και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(g_1+g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) = c_1 + c_2 = \text{σταθ.}\ \ \forall\ x \in [0, 1],$$
$$(\lambda\, g_1)(x) = \lambda\, g_1(x) = \lambda\, c_1 = \text{σταθ.}\ \ \forall\ x \in [0, 1],$$

δηλ. $(g_1+g_2) \in U_1$, $(\lambda\, g_1) \in U_1$. Το σύνολο U_1 είναι λοιπόν υποχώρος του V. Ανάλογα αποδεικνύεται, ότι και το σύνολο U_2 είναι υποχώρος του V.

β) Για να αποδείξουμε, ότι είναι $V = U_1 \oplus U_2$, αρκεί, σύμφωνα με τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος, να αποδείξουμε, ότι ισχύει

$$V = U_1 + U_2 \quad \text{και} \quad U_1 \cap U_2 = \{f_0\}.$$

Ας είναι f τυχούσα συνάρτηση του V. Θέτουμε

$$\int_0^1 f(x)\, dx = c_1$$

και θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h \in V$, που ορίζονται ως εξής:

$$(1) \qquad g(x) = c_1 , \qquad h(x) = f(x) - c_1 \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

Είναι φανερό ότι $g \in U_1$. Από τη

$$\int_0^1 h(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 c_1\, dx = c_1 - c_1 \int_0^1 dx = c_1 - c_1 = 0$$

έπεται $h \in U_2$. Από τις (1) εξάλλου, προκύπτει

$$f(x) = c_1 + h(x) = g(x) + h(x) = (g+h)(x) \quad \forall\, x \in [0, 1],$$

δηλ. είναι $f = g+h$ και συνεπώς ισχύει $V = U_1 + U_2$.

Ας είναι τώρα $f \in U_1 \cap U_2$. Έχουμε

$$f \in U_1 \Rightarrow f(x) = c \quad \forall\, x \in [0, 1],$$

$$f \in U_2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

και επομένως

$$\int_0^1 c\, dx = c \int_0^1 dx = c = 0 ,$$

δηλ. η συνάρτηση f είναι η μηδενική f_0. Ώστε είναι $U_1 \cap U_2 = \{f_0\}$, άρα $V = U_1 \oplus U_2$. ▲

5. *Σ' έναν* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* V_4 *με διάσταση 4, θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\bar{\upsilon}_1 = \{2, 2, 1, 0\}, \quad \bar{\upsilon}_2 = \{1, 4, 2, -1\}, \quad \bar{\upsilon}_3 = \{2, 1, -1, 0\},$$
$$\bar{\upsilon}_4 = \{2, -5, -4, 2\}, \quad \bar{\upsilon}_5 = \{2, 1, 4, 5\}, \quad \bar{\upsilon}_6 = \{1, 2, 3, 4\}$$

και τους υποχώρους

$$U_1 = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3, \bar{\upsilon}_4\}), \qquad U_2 = \mathcal{L}(\{\bar{\upsilon}_5, \bar{\upsilon}_6\}).$$

α) Να βρεθεί η διάσταση και ανά μία βάση των υποχώρων U_1 *και* U_2.

β) Το ίδιο για τους υποχώρους U_1+U_2 *και* $U_1 \cap U_2$. *Ισχύει* $V_4=U_1 \oplus U_2$;

Λύση

α) Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, ότι τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$ και $\bar{\upsilon}_4$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια γραμμική σχέση $\lambda_1 \bar{\upsilon}_1 + \lambda_2 \bar{\upsilon}_2 + \lambda_3 \bar{\upsilon}_3 + \lambda_4 \bar{\upsilon}_4 = \bar{0}$ αυτών με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ και αντικαταστήσουμε στο διάνυσμα του αριστερού μέλους τα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$, $\bar{\upsilon}_4$ με τις συντεταγμένες τους, προκύπτει, ότι τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι λύσεις του γραμμικού,ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 - 5\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 4\lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0 \,, \end{aligned}$$

μια λύση του οποίου είναι η

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_4 = 1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Ισχύει λοιπόν

$$\bar{\upsilon}_1 - 2\bar{\upsilon}_2 + \bar{\upsilon}_3 - \bar{\upsilon}_4 = \bar{0} \,.$$

Τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$ και $\bar{\upsilon}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: Θεωρούμε μια γραμμική σχέση $\mu_1 \bar{\upsilon}_1 + \mu_2 \bar{\upsilon}_2 + \mu_3 \bar{\upsilon}_3 = \bar{0}$ αυτών με $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ και εργαζόμαστε ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση. Προκύπτει, ότι τα μ_1, μ_2, μ_3 είναι λύσεις του γραμμικού,ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 0 \\ 2\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ -\mu_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι η τετριμμένη $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

Το διάνυσμα $\bar{\upsilon}_4$ γράφεται:

$$\bar{\upsilon}_4 = \bar{\upsilon}_1 - 2\bar{\upsilon}_2 + \bar{\upsilon}_3 \,.$$

Συνεπώς,ο υποχώρος U_1 εκτείνεται μόνο από τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$, που είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Μια βάση του U_1,λοιπόν,είναι το σύνολο $\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3\}$ και ισχύει $\dim U_1 = 3$. Εύκολα διαπιστώνεται, ότι τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_5$, $\bar{\upsilon}_6$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επειδή εκτείνουν τον υποχώρο U_2, αποτελούν μία βάση αυτού. Άρα $\dim U_2 = 2$.

β) Από τις σχέσεις $U_1 \subset U_1 + U_2 \subset V_4$ προκύπτει

$$\dim U_1 \leqq \dim (U_1 + U_2) \leqq \dim V_4 \implies 3 \leqq \dim (U_1 + U_2) \leqq 4.$$

Τα διανύσματα $\bar{\upsilon}_1$, $\bar{\upsilon}_2$, $\bar{\upsilon}_3$, $\bar{\upsilon}_5$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ανήκουν στον υποχώρο $U_1 + U_2$. Άρα είναι $\dim(U_1+U_2) = 4$, το σύνολο $\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3, \bar{\upsilon}_5\}$ είναι βάση του υποχώρου U_1+U_2 και ισχύει $U_1+U_2=V_4$.

Εξάλλου είναι

$$\dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \quad \Rightarrow$$
$$\dim(U_1 \cap U_2) = 1,$$

ώστε δεν είναι δυνατόν να ισχύει $U_1 \oplus U_2 = V_4$.

Για να βρούμε μία βάση του υποχώρου $U_1 \cap U_2$ θεωρούμε ένα τυχόν διάνυσμα $\bar{u} \in U_1 \cap U_2$. Επειδή $\bar{u} \in U_1$, $\bar{u} \in U_2$ και τα σύνολα $\{\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3\}$, $\{\bar{\upsilon}_5, \bar{\upsilon}_6\}$ είναι βάσεις των υποχώρων U_1, U_2 αντίστοιχα, το $\bar{u}$ γράφεται κατά τους εξής δύο διαφορετικούς τρόπους

$$\bar{u} = \kappa_1 \bar{\upsilon}_1 + \kappa_2 \bar{\upsilon}_2 + \kappa_3 \bar{\upsilon}_3 , \qquad \bar{u} = \nu_1 \bar{\upsilon}_5 + \nu_2 \bar{\upsilon}_6 ,$$

οπότε είναι

$$\kappa_1\bar{\upsilon}_1 + \kappa_2\bar{\upsilon}_2 + \kappa_3\bar{\upsilon}_3 - \nu_1\bar{\upsilon}_5 - \nu_2\bar{\upsilon}_6 = \bar{0}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 2\kappa_1 + \kappa_2 + 2\kappa_3 - 2\nu_1 - \nu_2 &= 0 \\ 2\kappa_1 + 4\kappa_2 + \kappa_3 - \nu_1 - 2\nu_2 &= 0 \\ \kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_3 - 4\nu_1 - 3\nu_2 &= 0 \\ -\kappa_2 \qquad - 5\nu_1 - 4\nu_2 &= 0 , \end{aligned}$$

από το οποίο βρίσκουμε $\nu_1+\nu_2 = 0$, δηλ. είναι

$$\bar{u} = \nu_1(\bar{\upsilon}_5-\bar{\upsilon}_6) = \nu_1\{1, -1, 1, 1\}.$$

Το διάνυσμα $\bar{\upsilon}_7 = \{1, -1, 1, 1\}$ είναι διάφορο του $\bar{0}$, συνεπώς είναι μια βάση του υποχώρου $U_1 \cap U_2$. ▲

6. *Ας είναι* V *ένας* $\mathbb{C}$-*διανυσματικός χώρος, όπου* $\mathbb{C}$ *είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών.*

α) Να αποδειχθεί, ότι μπορούμε να εφοδιάσουμε τον V *με μία δομή* $\mathbb{R}$-*διανυσματικού χώρου, και ας τον συμβολίσουμε με* $\hat{V}$.

β) Να αποδειχθεί, ότι αν ο V *έχει πεπερασμένη διάσταση* n, *τότε ο* $\hat{V}$ *έχει διάσταση* 2n .

Λύση

α) Από την τετράδα $(V, +, \mathbb{C}, \cdot)$, που είναι διανυσματικός χώρος, θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $(V, +)$ και χρησιμοποιούμε σαν πολλαπλασιασμό φ: $\mathbb{R} \times V \to V$ τον περιορισμό του πολλαπλασιασμού $\cdot$: $\mathbb{C} \times V \to V$ πάνω στο σύνολο $\mathbb{R} \times V$. Η τετράδα $(V, +, \mathbb{R}, \varphi)$, που προκύπτει, πληρεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου, γιατί αυτά πληρούνται ήδη για την τετράδα $(V, +, \mathbb{C}, \cdot)$ και είναι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Το σύνολο V εφοδιάζεται λοιπόν και με δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$, που τον συμβολίζουμε με $\hat{V}$.

β) Ας είναι ο V πεπερασμένης διάστασης n, $B = \{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n\}$ μια βάση αυτού και $\bar{\upsilon}$ τυχόν διάνυσμα του $\hat{V}$. Επειδή $\bar{\upsilon} \in V$, το $\bar{\upsilon}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

(1) $$\bar{\upsilon} = z_1 \bar{\varepsilon}_1 + \dots + z_n \bar{\varepsilon}_n$$

των διανυσμάτων της βάσης B με $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Ας είναι

(2) $$z_j = \alpha_j + i\,\beta_j\,, \quad \alpha_j\,,\, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\bar{\upsilon} = (\alpha_1 + i\,\beta_1)\,\bar{\varepsilon}_1 + \dots + (\alpha_n + i\,\beta_n)\,\bar{\varepsilon}_n =$$
$$= \alpha_1 \bar{\varepsilon}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\varepsilon}_n + \beta_1 (i\,\bar{\varepsilon}_1) + \dots + \beta_n (i\,\bar{\varepsilon}_n),$$

δηλ. ο διανυσματικός χώρος $\hat{V}$ εκτείνεται από το σύνολο $\hat{B} = \{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n\,,\, i\,\bar{\varepsilon}_1\,, \dots, i\,\bar{\varepsilon}_n\}$.

Θεωρούμε μια γραμμική σχέση

(3) $$\lambda_1 \bar{\varepsilon}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\varepsilon}_n + \mu_1 (i\,\bar{\varepsilon}_1) + \dots + \mu_n (i\,\bar{\varepsilon}_n) = \bar{0}$$

των διανυσμάτων του συνόλου $\hat{B}$ με $\lambda_1, \dots, \lambda_n\,,\, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$.

Από την (3) έχουμε

$$(\lambda_1 + i\,\mu_1)\,\bar{\varepsilon}_1 + \dots + (\lambda_n + i\,\mu_n)\,\bar{\varepsilon}_n = \bar{0}\,,$$

απ' όπου, επειδή το σύνολο B είναι βάση του V, προκύπτει

$$\lambda_j + i\,\mu_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = \mu_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Το σύνολο $\hat{B}$ είναι λοιπόν γραμμικά ανεξάρτητο, άρα είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\hat{V}$ και ισχύει $\dim \hat{V} = 2n$. ▲

7. *Ας είναι* V_3 *ένας τριδιάστατος* K*-διανυσματικός χώρος και* λ_1, λ_2, λ_3 *τρία στοιχεία του* K, *όχι όλα μηδέν. Να αποδειχθεί, ότι το σύνολο*

$$U = \left\{\bar{u} = \{u_1, u_2, u_3\} \in V_3 \;/\; \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0\right\}$$

είναι ένας υποχώρος του V_3. *Να βρεθεί μια βάση του και η διάστασή του.*