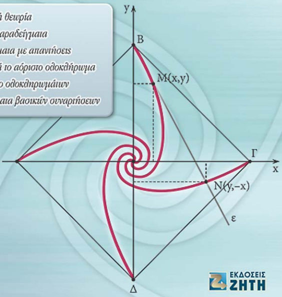
ΜΙΧΑΗΛ Ν. ΚΕΣΟΓΛΙΔΗ
Επίκουρου Καθηγητή Δ.Π.Θ.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- *Συνοπτική θεωρία*
- *Λυμένα παραδείγματα*
- *Άλυτα θέματα με απαντήσεις*
- *Συνοπτικά το αόριστο ολοκλήρωμα*
- *Τυπολόγιο ολοκληρωμάτων*
- *Αναπτύγματα βασικών συναρτήσεων*



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Πολλά προβλήματα των Φυσικών και γενικότερα των Τεχνικών Επιστημών είναι προβλήματα συμμεταβολής διαφόρων μεγεθών. Η μελέτη αυτών των προβλημάτων αποβλέπει στον προσδιορισμό των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των μεγεθών αυτών, δηλαδή στην εύρεση του νόμου (του τύπου), ο οποίος διέπει το φαινόμενο.

Αλλά σε πολλά από τα προβλήματα αυτά δεν είναι δυνατόν να συνδέσουμε αμέσως τις μεταβλητές του προβλήματος, διότι καταλήγουμε σε σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις μεταβλητές και τα διαφορικά τους, δηλαδή σε διαφορικές εξισώσεις. Αυτό σημαίνει ότι, η γνώση μεθόδων για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και από μη μαθηματικούς, είναι απαραίτητη.

Το βιβλίο αυτό περιέχει συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η περιεχόμενη ύλη αναφέρεται στις μεθόδους επίλυσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων και αποτελεί το ελάχιστο των γνώσεων, οι οποίες είναι βασικές και απαραίτητες για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Για την καλύτερη κατανόηση της περιεχόμενης ύλης *(δηλαδή επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων)*, οι σχετικές μέθοδοι παρουσιάζονται αρκετά απλά και με αρκετά λυμένα παραδείγματα, καθώς και πολλές άλυτες ασκήσεις με τις απαντήσεις τους. Αντίθετα το θεωρητικό μέρος είναι περιορισμένο, καθώς τα περισσότερα από τα απαραίτητα θεωρήματα αναφέρονται χωρίς αποδείξεις.

Εκτός από τη συνηθισμένη ύλη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο βιβλίο αυτό έχουν προστεθεί:

- συνοπτική θεωρία που αναφέρεται στο αόριστο ολοκλήρωμα,
- ένα αρκετά εκτεταμένο τυπολόγιο ολοκληρωμάτων, καθώς και
- αναπτύγματα μερικών βασικών συναρτήσεων.

Ξάνθη 2009 *Μιχαήλ Ν. Κεσογλίδης*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Κεφάλαιο 2
Διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξης

Κεφάλαιο 3

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $\nu \geq 2$

Κεφάλαιο 4

Διαφορικά συστήματα ή συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 5

Προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 6

Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια δυναμοσειρών

Κεφάλαιο 7
Διαφορική εξίσωση του Bessel

Κεφάλαιο 8
Εφαρμογές διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 9
Ποιοτική μελέτη των λύσεων αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 10
Προβλήματα συνοριακών τιμών

Παράρτημα I

Παράρτημα II

Παράρτημα III

Κεφάλαιο 1

Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς επί των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, μόρφωση διαφορικής εξίσωσης δοσμένης οικογένειας καμπύλων, επίλυση μερικών αντιπροσωπευτικών τύπων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, και δίνεται βαρύτητα στους ολοκληρωτικούς παράγοντες αφού, όταν μια διαφορική εξίσωση ολοκληρώνεται στοιχειωδώς, τότε αυτή έχει ολοκληρωτικό παράγοντα.

§1.1 Βασικοί ορισμοί – Σχηματισμός διαφορικής εξίσωσης

Ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση (*ή διαφορική εξίσωση μιας μεταβλητής και πολλές φορές θα γράφουμε Δ.Ε.*) κάθε εξίσωση η οποία περιέχει μια πραγματική μεταβλητή x, μιας πραγματικής συνάρτησης y $(y=y(x))$ και ορισμένες (ή όλες) από τις παραγώγους της y ως προς x, δηλαδή τις $y', y'', y''', \ldots, y^{(\nu)}$. *(Τη μεταβλητή x τη λέμε, συνήθως, ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ τη συνάρτηση y τη λέμε εξαρτημένη μεταβλητή ή άγνωστη συνάρτηση)* π.χ.

(ε.1) $\quad xy'''-y''-xy'+y=0$

(ε.2) $\quad y'''-xy''-2y(y')^2+xy=0$

(ε.3) $\quad L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}=0$

(ε.4) $\quad xdx-ydy=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$

- **Τάξη** μιας διαφορικής εξίσωση είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου η οποία υπάρχει σ' αυτήν. Δηλαδή μια συνήθης διαφορική εξίσωση, στην οποία το y θεωρείται συνάρτηση του x, θα λέγεται διαφορική εξίσωση ν-τάξης, αν και μόνον αν περιέχει οπωσδήποτε την ν-οστή παράγωγο $y^{(\nu)}$ του y χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο και για τις υπόλοιπες παραγώγους μικρότερης τάξης. Φυσικά εξυπακούεται ότι $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η γενική μορφή μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης είναι:

(1.1) $\quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}) = 0,$

ή ισοδύναμα

(1.2) $\quad F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu}\right) = 0\,.$

- **Λύση** (ή **ολοκλήρωμα**) της (1.1) (ή την (1.2)) λέγεται κάθε εξίσωση $\Phi(x, y) = 0$, η οποία επαληθεύει την (1.1) (ή την (1.2)) για κάθε x.
  (Εδώ βεβαίως υποτίθεται ότι η συνάρτηση $y = y(x)$ *η οποία ορίζεται από την εξίσωση* $\Phi(x, y) = 0$*, και η οποία μπορεί να είναι πεπλεγμένη, παραγωγίζεται* ν *τουλάχιστον φορές ως προς* x*).*

- **Γενική λύση** (ή **γενικό ολοκλήρωμα**) της (1.1) (ή της (1.2)) ονομάζεται κάθε λύση αυτής η οποία περιέχει ν ακριβώς αυθαίρετες σταθερές. Δηλαδή η γενική λύση της (1.1) (ή της (1.2) αντίστοιχα) είναι εξίσωση της μορφής:

  (1.1) $\quad f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu) = 0$

  όπου $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ είναι αυθαίρετες σταθερές που ανήκουν στο $\mathbb{R}$.

- **Μερική λύση** (ή **μερικό ολοκλήρωμα**) μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται κάθε λύση, η οποία προκύπτει από τη γενική, όταν οι αυθαίρετες σταθερές τις οποίες η γενική λύση περιέχει, λάβουν ορισμένες και συγκεκριμένες τιμές.

- **Ιδιάζουσα λύση** (ή **ιδιάζον ολοκλήρωμα**) μιας Δ.Ε. λέγεται **κάθε** λύση αυτής, η οποία δεν μπορεί να προκύψει από τη γενική, όταν στις αυθαίρετες σταθερές τις οποίες η γενική λύση περιέχει, λάβουν ορισμένες και συγκεκριμένες τιμές.

- *Το* **κύριο πρόβλημα** *της θεωρίας των Δ.Ε. είναι η εύρεση όλων των λύσεων μιας δοσμένης Δ.Ε.. Στη γενική του μορφή το πρόβλημα αυτό, μέχρι σήμερα, δε* *λύθηκε. Λύθηκε μόνον σε ορισμένες απλές περιπτώσεις με μερικές από τις ο-ποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό.*

➲ *Είναι γνωστό ότι μια εξίσωση της μορφής:*

(1.4) $f(x, y, c) = 0$,

όπου $c \in \mathbb{R}$ *είναι μια μεταβλητή παράμετρος, για μια ορισμένη τιμή του c, γεωμετρικά στο επίπεδο* Oxy, *ορίζει μια καμπύλη. Το σύνολο όλων των καμπύλων, τις οποίες ορίζει η (1.4), για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου* c, *στο επίπεδο* Oxy, *λέγεται* ***μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων***. *Συνήθως λέμε ότι η (1.4) παριστάνει στο* Oxy *μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων. Γενικεύοντας τα ανωτέρω λέμε ότι η (1.3) παριστάνει* **ν-παραμετρική οικογένεια καμπύλων**, *στο επίπεδο* Oxy.

Όπως προαναφέραμε, το κύριο πρόβλημα της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων είναι η εύρεση όλων των λύσεων μιας δοσμένης διαφορικής εξίσωσης.

Το πρόβλημα κατά το οποίο μας δίνεται μια συνάρτηση y, η οποία στη γενική περίπτωση ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής (1.3) και ζητείται η διαφορική εξίσωση η οποία να έχει λύση την (1.3) λέγεται **αντίστροφο του κύριου προβλήματος**.

Για το σχηματισμό (προσδιορισμό) της διαφορικής εξίσωσης η οποία έχει λύση την (1.3), με άλλα λόγια για τη λύση του αντίστροφου του κύριου προβλήματος εργαζόμαστε ως εξής:

Παραγωγίζουμε την (1.3) ν φορές, ως προς x, και παίρνουμε:

(1.5) $$\begin{cases} f_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_\nu) = 0 \\ f_1(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots, c_\nu) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_\nu(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}, c_1, c_2, \ldots, c_\nu) = 0 \end{cases}$$

Απαλείφοντας τις $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ μεταξύ (1.3) και (1.5) παίρνουμε την ν τάξης διαφορική εξίσωση:

(1.6) $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}) = 0 .$$

Η (1.6) είναι η διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι η ν-παραμετρική οικογένεια των καμπύλων (1.3).

➠ (*Παραδείγματα*: *1, 2*).

Το πρόβλημα των αρχικών τιμών ή πρόβλημα του Cauchy

Το πρόβλημα κατά το οποίο ζητείται να προσδιορισθεί, από τη γενική λύση $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu)=0$ της (1.1), μια λύση $y=f(x)$ αυτής, η οποία σε κάποιο δοσμένο σημείο x_0 ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f(x_0)=y_0, \quad f'(x_0)=y_1, \quad f''(x_0)=y_2, \ldots, f^{(\nu-1)}(x_0)=y_{\nu-1},$$

όπου $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}$ είναι προκαθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** (για συντομία Π.Α.Τ) ή **πρόβλημα Cauchy**.

§1.2 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Κάθε διαφορική εξίσωση η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

(1.7) $\quad M(x)dx+N(y)dy=0$

λέγεται διαφορική εξίσωση **χωριζομένων μεταβλητών**.
Η γενική λύση της (1.7) προκύπτει αμέσως με ολοκλήρωση και είναι:

(1.8) $\quad \int M(x)dx+\int N(y)dy=c$, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Παρατηρήσεις *Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών εργαζόμαστε ως εξής:*

Π1: Αν στην διαφορική εξίσωση υπάρχει η παράγωγος y' την αντικαθιστούμε με $\dfrac{dy}{dx}$.

Π2: Φέρνουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή (1.7)

Π3: Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη και βρίσκουμε τη γενική λύση, και

Π4: Όταν δίνονται και αρχικές συνθήκες, τότε αφού βρούμε τη γενική λύση, αντικαθιστούμε σ' αυτήν τα x και y με τις αρχικές συνθήκες, που μας δίνονται, και προσδιορίζουμε τη σταθερά c. Η λύση που μ' αυτό τον τρόπο προσδιορίζεται είναι η μερική λύση η οποία αντιστοιχεί ακριβώς στις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν.

Π5: Ότι είπαμε στην παρατήρηση Π4, ισχύει όχι μόνον στις διαφορικές εξισώσεις *χωριζομένων μεταβλητών αλλά και σε διαφορικές εξισώσεις οποιασδήποτε άλλης μορφής που θα δούμε παρακάτω.*

Π6: Μια ειδική περίπτωση διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών είναι εκείνες που έχουν τη γενική μορφή:

$$y' = f(y)$$

δηλαδή οι εξισώσεις, οι οποίες περιέχουν μόνο την εξαρτημένων μεταβλητή y *και δεν περιέχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή* x. *Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται* ***αυτόνομες****.*

➠ *(Παραδείγματα 3, 4, 5).*

§1.3 Εξισώσεις ομογενείς

Πριν μιλήσουμε για τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις θ' αναφέρουμε πρώτα τι ονομάζουμε ομογενή συνάρτηση. Μια συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών π.χ. η ν μεταβλητών συνάρτηση $\varphi(x, y, z, \ldots)$ ονομάζεται ομογενής ν βαθμού όταν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχουμε την ταυτότητα:

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^\nu \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x,y) = 8x^2 - 5xy + 7y^2$ είναι ομογενής δευτέρου βαθμού.

Πράγματι είναι

$$\varphi(\lambda x, \lambda y) = 8(\lambda x)^2 - 5(\lambda x)(\lambda y) + 7(\lambda y)^2 = \lambda^2(8x^2 - 5xy + 7y^2) = \lambda^2 \varphi(x,y).$$

Ύστερα απ' αυτά:

Κάθε διαφορική εξίσωση η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.9}$$

όπου οι συναρτήσεις $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς του αυτού βαθμού ως προς x, y, λέγεται ομογενής πρώτης τάξης.

Για τη λύση της (1.9) κάνουμε τα εξής βήματα:

β1: Θέτουμε:

$$\frac{y}{x} = u, \quad (u = u(x)) \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du \tag{1.10}$$

β2: Αντικαθιστούμε στην (1.9) τα y και dy με τα ίσα τους, από τις (1.10), και καταλήγουμε σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

➠ *(Παραδείγματα 6, 7).*

§1.4 Εξισώσεις αναγόμενες σε ομογενείς

Η γενική μορφή των εξισώσεων αυτών είναι:

$$(1.11) \qquad y' = f\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right).$$

Για την αντιμετώπιση των εξισώσεων αυτών διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν είναι $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$,

τότε θέτουμε: $\alpha_1 x + \beta_1 y = \omega \Rightarrow y' = (\omega' - \alpha_1) : \beta_1$ και καταλήγουμε σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

β) Αν είναι $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$,

τότε θέτουμε:

$$(1.12) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = u \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = \upsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 dx + \beta_1 dy = du \\ \alpha_2 dx + \beta_2 dy = d\upsilon \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το δεύτερο από τα συστήματα των (1.12), ως προς dx, dy, και αντικαθιστώντας στην (1.11) τις τιμές των dx, dy, τις οποίες βρήκαμε από τη λύση του δευτέρου από τα συστήματα των (1.12), και τα $\alpha_1 x + \beta_2 y + \gamma_2$ με τα ίσα τους, από το πρώτο σύστημα των (1.12), καταλήγουμε σε ομογενή διαφορική εξίσωση.

➠ *(Παραδείγματα 8, 9).*

§1.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Κάθε διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξης, η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

(1.13) $y' + P(x)y + Q(x) = 0$, όπου $P(x) \neq 0$, $Q(x) \neq 0$ (*γιατί;*)

λέγεται **γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης**. Η γενική λύση της (1.13) δίνεται από τον τύπο:

(1.14) $$y = e^{-\int P(x)dx}\left[c - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

(Παραδείγματα 10, 11).

§1.6 Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Κάθε διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξης, η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

(1.15) $y' + P(x)y + Q(x)y^{\alpha} = 0$,

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 1$, λέγεται **διαφορική εξίσωση Bernoulli.**

Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση εργαζόμαστε ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε την (2.8) επί $y^{-\alpha}$, οπότε παίρνουμε:

  (1.16) $y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} + Q(x) = 0$.

- Θέτουμε:

  (1.17) $y^{1-\alpha} = u$, όπου $u = u(x)$ $\Rightarrow$ $(1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$.

  Η (1.16) λόγω των (1.17) γίνεται:

  $$\frac{du}{dx} + (1-\alpha)P(x)u + (1-\alpha)Q(x) = 0.$$

Η (1.16) λόγω των (1.17) γίνεται:

$$\frac{du}{dx}+(1-\alpha)P(x)u+(1-\alpha)Q(x)=0.$$

Η τελευταία είναι, πλέον, γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και λύνεται κατά τα γνωστά.

➲ Όταν $\alpha=0$, τότε η (1.15) είναι γραμμική πρώτης τάξης.

➲ Όταν πάλι $\alpha=1$, τότε η (1.15) είναι χωριζομένων μεταβλητών.

➟ *(Παραδείγματα 12, 13, 14)*.

§1.7 Διαφορικές εξισώσεις Riccati

Κάθε διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξης, η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

(1.18) $\quad y'+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0,$

όπου και οι P, Q, R είναι συναρτήσεις συνεχείς σ' ένα διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$.
$P(x)\neq 0$, $R(x)\neq 0$ (*γιατί;*) λέγεται **διαφορική εξίσωση Riccati**.
Η επίλυση της (1.18) είναι δυνατή όταν γνωρίζουμε μια μερική λύση αυτής. Έστω $y=y_1(x)$ μια μερική λύση της (1.18), τότε με την αντικατάσταση

$$y=y_1+\frac{1}{u}(u=u(x))\Rightarrow y'=y_1-\left(\frac{1}{u^2}\right)u'$$

αυτή μετατρέπεται σε γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης, με άγνωστη συνάρτηση την $u(x)$.

Παρατηρήσεις

Π1: Αν γνωρίζουμε δύο μερικές λύσεις $y_1(x)$ *και* $y_2(x)$ *της (1.18), τότε αποδεικνύεται ότι, η γενική λύση αυτής δίνεται από τον τύπο*

$$y-y_1=c(y-y_2)e^{\int(y_1-y_2)P(x)dx},\quad c=\textit{αυθαίρετη σταθερά}$$

Π2: Αν γνωρίζουμε τρεις μερικές λύσεις y_1, y_2 *και* y_3 *της (1.18), τότε αποδεικνύεται ότι, κάθε άλλη λύση αυτής δίνεται από τον τύπο:*

$$\frac{y-y_2}{y-y_3}=c\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}, \quad \textit{όπου } c = \textit{αυθαίρετη σταθερά}$$

δηλαδή η τελευταία μας δίνει τη γενική λύση της (1.18)

Π3: Όταν γνωρίζουμε μια μερική λύση y_1 *της (1.18), τότε αυτή με τον μετασχηματισμό* $y=y_1+u(x)$, *καταλήγει σε εξίσωση Bernoulli, την οποία για να την επιλύσουμε πρέπει να τη μετατρέψουμε σε γραμμική. Ενώ με τον μετασχηματισμό*

$$y=y_1+\frac{1}{u(x)}$$

καταλήγουμε αμέσως σε γραμμική. Γι' αυτό ο πρώτος μετασχηματισμός, συνήθως, αποφεύγεται.

➠ *(Παράδειγμα 15).*

§1.8 Διαφορικές εξισώσεις Lagrange

Κάθε διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξης, η οποία έχει, ή με συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μπορεί να πάρει, τη μορφή:

(1.19) $\quad y=x\varphi(y')+f(y')$

λέγεται **διαφορική εξίσωση Lagrange**.

Για να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση του Lagrange εργαζόμαστε ως εξής:

➲ Θέτουμε $y'=p$, όπου $p=p(x)$, οπότε η (1.19) γίνεται:

(1.20) $\quad y=x\varphi(p)+f(p)$.

➲ Παραγωγίζουμε την (1.20), ως προς x, οπότε παίρνουμε:

$$p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}+f'(x)\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow$$

(1.21) $$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x+\frac{f(p)}{\varphi(p)-p}=0.$$

Αν στη (1.21) θεωρήσουμε άγνωστη συνάρτηση το x και ανεξάρτητη μεταβλητή το p, τότε αυτή είναι μια γραμμική Δ.Ε πρώτης τάξης.

Έστω ότι η γενική λύση της (1.21) είναι η:

(1.22) $x = c\varphi_1(p) + f_1(p)$.

- Όταν η (1.22) μπορεί να λυθεί ως προς p, τότε βρίσκουμε το p από την (1.22) και θέτουμε την τιμή αυτή του p στην (1.20). Αυτό που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία θα είναι η γενική λύση της δοθείσης διαφορικής εξίσωσης.
- Όταν η (1.22) δεν λύνεται ως προς p, τότε θέτουμε την τιμή του x από την (1.22) στο δεξιό μέλος της (1.20) και παίρνουμε:

  (1.23) $x = c\Phi(p) + F(p)$.

  Οι εξισώσεις (1.22) και (1.23) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της γενικής λύσης της δοθείσης διαφορικής εξίσωσης.

➠ *(Παράδειγμα 16, 17).*

§1.9 Διαφορικές εξισώσεις Clairaut

Η γενική μορφή των εξισώσεων αυτών είναι:

(1.24) $y = yx' + f(y')$.

Όπως, εύκολα διαπιστώνεται, η (1.24) είναι ειδική περίπτωση της (1.19). Επομένως για να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση του Clairaut αρκεί να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τη λύση της εξίσωσης του Lagrange, δηλαδή:

- Θέτουμε $y' = p$, όπου $p = p(x)$, οπότε η (1.24) γίνεται:

  (1.25) $y = xp + f(p)$.

- Παραγωγίζουμε την (1.25), ως προς x, οπότε παίρνουμε:

  (1.26) $(x + f'(p))\dfrac{dp}{dx} = 0$.

  Η (1.26) χωρίζεται στις εξής δύο εξισώσεις:

  (1.27) $\dfrac{dp}{dx} = 0$ και

(1.28) $(x+f'(p))=0$.

➲ Από την (1.27) προκύπτει $dp=0 \Rightarrow p=c$ και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του p στην (1.25) παίρνουμε τη γενική λύση της (1.24) η οποία είναι:

$$y=cx+f(c).$$

➲ Από την (1.28) παίρνουμε:

(1.29) $x=-f'(p)$.

Θέτοντας την τιμή του x από την (1.29) στην (1.25) παίρνουμε:

(1.30) $y=-pf'(p)+f(p)$.

Οι (1.29) και (1.30) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της **ιδιάζουσας λύσης.**

➠ *(Παράδειγμα 18).*

§1.10 Διαφορικές εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες

Αυτές είναι της μορφής:

(1.31) $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$

όπου οι συναρτήσεις $M(x, y)$ και $N(x, y)$ επαληθεύουν εκ ταυτότητος τη σχέση:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

τότε το πρώτο μέλος της (1.31) είναι τέλειο (ολικό) διαφορικό μιας συνάρτησης $\Phi(x, y)$ η οποία δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi(x, y)=\int_{\alpha}^{x}M(t, y)dt+\int_{\beta}^{y}N(\alpha, t)dt.$$

Οπότε η γενική λύση της (1.31) δίνεται από τον τύπο:

(1.32) $$\int_{\alpha}^{x}M(t, y)dt+\int_{\beta}^{y}N(\alpha, t)dt=c, \quad c = \text{αυθαίρετη σταθερά}$$

όπου τα α, β εκλέγονται αυθαίρετα.

➠ *(Παραδείγματα 19, 20).*

§1.11 Ολοκληρωτικοί παράγοντες ή πολλαπλασιαστές του Euler

Έστω μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

(1.33) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$,

της οποίας το πρώτο μέλος δεν είναι τέλειο (ή ολικό) διαφορικό. Αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\mu(x, y)$ τέτοια ώστε η εξίσωση:

(1.34) $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$

να γίνεται αμέσως ολοκληρώσιμη, δηλαδή να πληρούται η συνθήκη:

(1.35) $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu N)$

τότε η συνάρτηση $\mu(x, y)$ λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** ή **πολλαπλασιαστής του Euler**, και τότε η γενική λύση της (1.34) δίνεται από τον τύπο:

(1.36) $\int_{\alpha}^{x} \mu(t, y)M(t, y)dt + \int_{\beta}^{y} \mu(\alpha, t)N(\alpha, t)dt = c$

όπου τα α, β εκλέγονται αυθαίρετα.

Προσδιορισμός ολοκληρωτικών παραγόντων

Αν οι συναρτήσεις $M(x, y)$, $N(x, y)$ της (1.33) είναι τέτοιες ώστε:

(1.37) $\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) : \left(M\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} - N\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) = \varphi(\upsilon)$, όπου $\upsilon = \upsilon(x, y)$,

τότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (1.33) είναι η συνάρτηση:

(1.38) $\mu(\upsilon) = e^{\int \varphi(\upsilon)d\upsilon}$.

Από τις (1.37) και (1.38) προκύπτουν, εκτός των άλλων, και οι εξής αξιοσημείωτες περιπτώσεις:

1. Για να έχει η (1.33) έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x)$ πρέπει και αρκεί:

$$-\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : N = \varphi(x)$$

και τότε ο πολλαπλασιαστής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(x)=e^{\int \varphi(x)dx}.$$

2. Για να έχει η (1.33) έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(y)$ πρέπει και αρκεί:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right):\ M=\varphi(y)$$

και τότε ο πολλαπλασιαστής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(y)=e^{\int \varphi(y)dy}.$$

3. Για να έχει η (1.33) έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x+y)$ πρέπει και αρκεί:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right):\ (M-N)=\varphi(x+y)$$

και τότε ο πολλαπλασιαστής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(x+y)=e^{\int \varphi(x+y)d(x+y)}.$$

4. Για να έχει η (1.33) έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(xy)$ πρέπει και αρκεί:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right):\ (xM-yN)=\varphi(xy)$$

και τότε ο πολλαπλασιαστής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(xy)=e^{\int \varphi(xy)d(xy)}.$$

5. Για να έχει η (1.33) έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x^2+y^2)$ πρέπει και αρκεί:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right):\ (2yM-2xN)=\varphi(x^2+y^2)$$

και τότε για $x^2+y^2=z$ ο πολλαπλασιαστής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(x^2+y^2)=\mu(z)=e^{\int \varphi(z)dz}.$$

Παρατηρήσεις

Π1: Για την εύρεση των λύσεων της (1.33) πρέπει από τη γενική λύση (1.36) της Δ.Ε (1.34) να εξαιρούμε τη λύση $\mu(x, y)=0$ *όταν αυτή δεν επαληθεύει την (1.33) και να λαμβάνουμε πάντα τη λύση* $\mu^{-1}(x, y)=0$.

Π2: Αποδεικνύεται ότι, όταν μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει γενική λύση, τότε αυτή έχει και ολοκληρωτικό παράγοντα.

➠ *(Παραδείγματα 21, 22, 23, 24).*

§1.12 Ιδιάζουσες λύσεις

Έστω η διαφορική εξίσωση

(1.39) $F(x, y, y')=0$.

Παριστάνουμε την παράγωγο y' με το γράμμα p και παίρνουμε το

(1.40) $\begin{cases} F(x, y, p)=0 \\ F_p(x, y, y')=0 \end{cases}$.

Αν, μεταξύ των (1.40), απαλείψουμε την μεταβλητή p προκύπτει εν γένει μια εξίσωση της μορφής:

(1.41) $D(x, y)=0$.

Η (1.41) λέγεται **p-διακρίνουσα** της διαφορικής (1.39).
Όταν μια συνάρτηση η οποία ορίζεται ή παραμετρικά με τις εξισώσεις (1.40), ή με πλεγμένη μορφή από την εξίσωση (1.41), είναι λύση της (1.39), τότε λέγεται **ιδιάζουσα λύση** αυτής.
Έστω $\Phi(x, y, c)=0$ είναι η γενική λύση της Δ.Ε. (1.39).
Παίρνουμε το σύστημα:

(1.42) $\begin{cases} \Phi(x, y, c)=0 \\ \Phi_c(x, y, c)=0 \end{cases}$.

Απαλείφοντας τη μεταβλητή c μεταξύ των (1.42) προκύπτει εν γένει μια εξίσωση της μορφής:

(1.43) $D(x, y)=0$.

Αν υπάρχει ιδιάζουσα λύση, τότε σαν εξισώσεις αυτής λαμβάνονται ή οι εξισώσεις (1.42), ή η εξίσωση (1.43).

Παρατήρηση

Η καμπύλη την οποία παριστάνει η ιδιάζουσα λύση έχει την ιδιότητα να εφάπτεται σε κάθε μία από τις καμπύλες της οικογένειας $\Phi(x, y, c)=0$, *δηλαδή, η ιδιάζουσα λύση είναι η περιβάλλουσα της μονοπαραμετρικής οικογένειας των καμπύλων* $\Phi(x, y, c)=0$.

➠ *(Παραδείγματα 25, 26).*

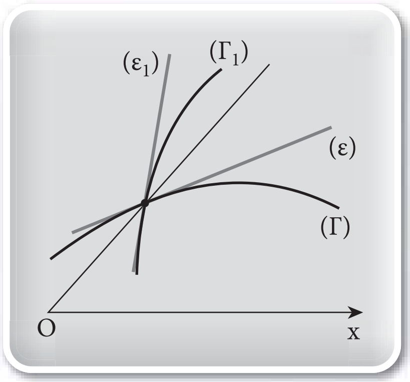
§1.13 Ισογώνιες τροχιές

Α. Ισογώνιες τροχιές σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Όταν έχουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών στο επίπεδο Oxy με εξίσωση

(1.44) $\Phi(x, y, \alpha)=0$, όπου $\alpha(\in\mathbb{R})$ μεταβλητή παράμετρος,

τότε μια άλλη γραμμή (Γ_1) του επιπέδου Oxy λέγεται **ω-ισογώνια τροχιά της οικογένειας** (1.44), αν τέμνει κάθε γραμμή της οικογένειας (1.44) και μάλιστα με σταθερή γωνία ω. Όταν είναι $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, τότε η ω-ισογώνια τροχιά της οικογένειας (1.44) λέγεται **ορθογώνια τροχιά**.



Όταν μας δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών (1.44) και ζητούμε να βρούμε εκείνη την οικογένεια γραμμών οι οποίες τέμνουν τις γραμμές (1.44) με σταθερή γωνία ω, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

(α) Βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας (1.44). Έστω ότι αυτή είναι η:

(1.45) $F(x, y, y')=0$.

(β) Αντικαθιστούμε στην (1.45) το y' με την παράσταση $\dfrac{y'-\text{εφ}\omega}{1+y'\text{εφ}\omega}$ έτσι βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση:

(1.46) $F\left(x,\ y,\ \dfrac{y'-\varepsilon\varphi\omega}{1+y'\varepsilon\varphi\omega}\right)=0$.

Η (1.46) είναι η διαφορική εξίσωση των ω-ισογωνίων τροχιών της οικογένειας (1.44).

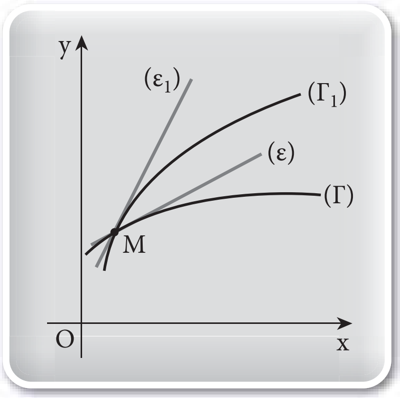
(γ) Ολοκληρώνουμε την (1.46) και βρίσκουμε την αλγεβρική εξίσωση των ω-ισογωνίων τροχιών της (1.44).

➲ **Στην περίπτωση που είναι $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, τότε αντικαθιστούμε στην (1.45) το y' με $-\dfrac{1}{y'}$.**

Β. Ισογώνιες τροχιές σε πολικές συντεταγμένες

Όταν η μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών δίνεται, ως προς ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων, με την εξίσωση:

(1.47) $G(\rho,\ \theta,\ \alpha)=0$,



όπου $\alpha(\in\mathbb{R})$ μεταβλητή παράμετρος, και θέλουμε να βρούμε την οικογένεια της οποίας οι γραμμές τέμνουν τις (1.47) με σταθερή γωνία ω, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

(α) Βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας (1.44). Έστω ότι αυτή είναι

(1.48) $F(\rho,\ \theta,\ \dot{\rho})=0$.

(β) Αντικαθιστούμε στην (1.48) το $\dot{\rho}$ με την παράσταση

$$\frac{\rho(d\rho+\rho\varepsilon\varphi\omega\cdot d\theta)}{\rho d\theta-\varepsilon\varphi\omega\cdot d\rho}$$

έτσι βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση:

(1.49) $F\left(\rho,\ \theta,\ \dfrac{\rho(d\rho+\rho\varepsilon\varphi\omega\cdot d\theta)}{\rho d\theta-\varepsilon\varphi\omega\cdot d\rho}=0\right)$.

Η (1.49) είναι η διαφορική εξίσωση των ω-ισογωνίων τροχιών της οικογένειας (1.47).

(γ) Ολοκληρώνουμε την (1.49) και βρίσκουμε την αλγεβρική εξίσωση των ω-ισογωνίων τροχιών της (1.47).

➲ **Στην περίπτωση των ορθογωνίων τροχιών αντικαθιστούμε στην (1.45) το $\dot{\rho}$ με $-\rho^2 \dfrac{du}{d\rho}$.**

➠ *(Παραδείγματα 27, 28, 29).*

§1.14 Μαθηματικά μοντέλα

Παραθέτουμε, τώρα, ορισμένα παραδείγματα εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. *(Αριθμητικά παραδείγματα καθώς και πολλά άλλα παραδείγματα βλέπε παρακάτω στο ομώνυμο κεφάλαιο).*

➲ **Στη ραδιενεργό αποσύνθεση**, η χρονική μεταβολή της ποσότητας $N(t)$ του ραδιενεργού υλικού ικανοποιεί την εξίσωση:

(1.50) $$\frac{dN}{dt} = -kN, \quad \text{όπου } k \text{ είναι μια θετική σταθερά.}$$

Η (1.50) είναι μια απλή διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και η γενική λύση αυτής είναι εκθετική συνάρτηση του t.

➲ **Στην ανάμειξη υγρών με ανάδευση**, η χρονική μεταβολή της σύνθεσης $Q(t)$ των αναμειγνυομένων υγρών ικανοποιεί την εξίσωση:

(1.51) $$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{V(t)} r_2(t) Q + m_1(t) + r_1(t),$$

όπου:

- $r_1(t)$ και $r_2(t)$ οι παροχές των υγρών πριν και μετά την ανάμειξη,
- $m_1(t)$ η σύνθεση του υγρού πριν την ανάμειξη, και
- $V(t)$ ο όγκος των υγρών κατά την ανάμειξη.

Η (1.51) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με ανεξάρτητη μεταβλητή το t και εξαρτημένη συνάρτηση το Q.

➲ Στην **κλασική μηχανική**, σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, η χρονική μεταβολή της ταχύτητας $\upsilon(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(1.52) \qquad m\frac{d\upsilon}{dt}=F.$$

Στην (1.52) οι τιμές της μάζας m και της δύναμης F είναι γνωστές.
Η (1.52) είναι μια απλή διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

➲ Σε **μοντέλα πληθυσμών** η χρονική μεταβολή του πληθυσμού $P(t)$, σύμφωνα με το Μαλθασιανό μοντέλο, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(1.53) \qquad \frac{dP}{dt}=\alpha P,$$ όπου $\alpha>0$ και λέγεται **συντελεστής ανάπτυξης**.

Η (1.53) είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και η γενική λύση αυτής, όπως ήδη αναφέραμε στην (1.50), είναι εκθετική συνάρτηση του t.

➲ Στην **κινητική των χημικών αντιδράσεων** η χρονική μεταβολή της συγκέντρωσης $C(t)$ μιας αντιδρούσης ουσίας ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής:

$$(1.54) \qquad \frac{dC}{dt}=k(\alpha-C)^{\mu}(\beta-C)^{\nu}$$

όπου $\alpha, \beta, k, \mu, \nu$ είναι γνωστές σταθερές.

➲ Στην **Οικονομική Θεωρία**, η χρονική μεταβολή της τιμής $P(t)$ ενός προϊόντος ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$(1.55) \qquad \frac{Dp}{dt}=k[D(t, P)-S(t, P)],$$ όπου:

- $k>0$ γνωστή σταθερά, και
- οι τιμές $D(t, P), S(t, P)$ της ζήτησης και προσφοράς αντίστοιχα είναι γνωστές.

Η (1.55) αφού οι τιμές των $D(t, P$ και $S(t, P)$ είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών , η οποία λύνεται εύκολα.
Αριθμητικά παραδείγματα καθώς και άλλα παραδείγματα βλέπε παρακάτω στο κεφάλαιο 8.

Λύση της γραμμικής Δ.Ε. πρώτης τάξης

1ος τρόπος

Η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει τη μορφή:

(1.13) $y' + P(x)y + Q(x) = 0$

όπου $P(x), Q(x)$ είναι συναρτήσεις του x.
Θα δώσουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.13) με τη βοήθεια (*χρήση*) ολοκληρωτικού παράγοντα. Για να βρούμε τη γενική λύση της (1.13) με τον τρόπο που προαναφέραμε τη μετασχηματίζουμε ως εξής:

(1.13.1) $[P(x)y + Q(x)]dx + dy = 0$.

Αναζητούμε ολοκληρωτικό παράγοντα ώστε η (1.13.1) να είναι αμέσως ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε ότι:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right): (-N) = [O - P(x)]: (-1) = P(x) = \varphi(x)$$

αυτό σημαίνει ότι (1.13.1) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x)$ και αυτός (*βλέπε παράγραφο 1.10*) είναι:

(1.13.2) $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (1.13) επί $\mu(x)$ παίρνουμε:

(1.13.3) $\mu \cdot y' + \mu \cdot y \cdot P(x) = -\mu \cdot Q(x)$

και επειδή με παραγώγιση της (1.13.2) προκύπτει $\mu'(x) = \ldots = P(x)\mu(x)$
η (1.13.3) γίνεται:

$$\mu \cdot y' + \mu' \cdot y = -\mu Q(x) \;\Rightarrow\; (\mu y)' = -\mu Q(x) \;\Rightarrow\; \frac{d(\mu y)}{dx} = -\mu Q(x)$$

και ολοκληρώνοντας την τελευταία βρίσκουμε:

$$\mu y = -\int \mu Q(x)dx + c \;\Rightarrow\; y = \mu^{-1}\left[c - \int \mu Q(x)dx\right].$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση όπου μ το ίσον του από την (1.13.2) παίρνουμε:

(1.13.4) $\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left[c - \int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx\right].}$

Η (1.13.4) δίνει τη γενική λύση της (1.13), όπου c = αυθαίρετη σταθερά.

2ος τρόπος

Τώρα, για τον προσδιορισμό της λύσης της (1.13) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Lagrange, ή μέθοδο μεταβολής αυθαιρέτων σταθερών.
Η ονομασία αυτή ίσως ακούγεται κάπως παράξενα, αλλά γρήγορα μπορεί κάποιος να καταλάβει τη σημασία της, και να θαυμάσει την ευφυΐα του Lagrange.
Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή λύνουμε πρώτα την εξίσωση που προκύπτει από την (1.13) όταν $Q(x)=0$, δηλαδή την:

(1.13.5) $y' + P(x)y = 0$.

Στην (1.13.5) οι μεταβλητές χωρίζονται οπότε έχουμε:

$$\frac{dy}{y} = -Pdx \quad \text{και ολοκληρώνοντας παίρνουμε}$$

$$\ln y = \int P(x)dx + \ln c \;\Rightarrow$$

(1.13.6) $y = ce^{-\int P(x)dx}$, όπου c = αυθαίρετη σταθερά.

Παίρνουμε μια μερική λύση της (1.13.5). Έστω την $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$.
Αν τώρα στην (1.13.6) θεωρήσουμε το c όχι αυθαίρετη σταθερά αλλά συνάρτηση του x, τότε από την (1.13.6) παίρνουμε:

(1.13.7) $y(x) = y_1(x)c(x)$.

Παραγωγίζοντας την (1.13.7) βρίσκουμε:

$$y'(x) = y_1'(x)c(x) + y_1(x)c'(x).$$

Αν θέσουμε τις τιμές των $y(x)$ και $y'(x)$ στην (1.13) παίρνουμε:

$$y_1'(x)c(x) + y_1(x)c'(x) + P(x)y_1(x)c(x) + Q(x) = 0 \;\Rightarrow$$

(1.13.8) $c(x)[y_1'(x) + P(x)y_1(x)] + y_1(x)c'(x) + Q(x) = 0$

και επειδή η $y_1(x)$ είναι λύση της (1.13.5) άρα $y_1'(x) + P(x)y_1(x) = 0$,
οπότε από την (1.13.8) παίρνουμε:

$$y_1(x)c'(x)+Q(x)=0 \quad \Rightarrow \; y_1(x)\frac{dc}{dx}=-Q(x) \Rightarrow$$

$$dc=-Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \;\; \Rightarrow \; c(x)=k-\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx$$

Η (1.13.9) δίνει τη γενική λύση της (1.13), όπου k = αυθαίρετη σταθερά.

Περίληψη 1ου Κεφαλαίου

Στο πρώτο κεφάλαιο ασχολούμαστε **με το σχηματισμό της Δ.Ε. μιας ν-παραμετρικής οικογένειας γραμμών** καθώς **και με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.**

Για να βρούμε τη Δ.Ε. μιας ν-παραμετρικής οικογένειας γραμμών παραγωγίζουμε την εξίσωση της οικογένειας διαδοχικά ν φορές και απαλείφουμε τις παραμέτρους μεταξύ της δοθείσης και των εξισώσεων που προέκυψαν από τις ν διαδοχικές παραγωγίσεις.

Οι πιο συνηθισμένες μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης τις οποίες μπορούμε να επιλύσουμε με στοιχειώδεις μεθόδους είναι:

1. *Χωριζομένων μεταβλητών*
2. *Ομογενείς*
3. *Αναγόμενες σε ομογενείς*
4. *Γραμμικές*
5. *Bernoulli*
6. *Riccati*
7. *Lagrange*
8. *Clairaut*
9. *Αμέσως ολοκληρώσιμες*

Αν μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης δεν ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω μορφές, τότε εξετάζουμε τη δυνατότητα προσδιορισμού **ολοκληρωτικού παράγοντα** *(κατάλληλου πολλαπλασιαστού).*

Αν και ο προσδιορισμός κατάλληλου πολλαπλασιαστού είναι δύσκολος, τότε προσπαθούμε να βρούμε κατάλληλο μετασχηματισμό, με τη βοήθεια του οποίου, από τη δοθείσα διαφορική εξίσωση, προκύπτει διαφορική εξίσωση γνωστής μορφής. Δεν υπάρχουν κανόνες για τον προσδιορισμό κατάλληλου μετασχηματισμού. Τον πρώτο που μπορούμε να δοκιμάσουμε είναι να αλλάξουμε το ρόλο των μεταβλητών, δηλαδή να θεωρήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή ως συνάρτηση και την άγνωστη συνάρτηση ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Ο προσδιορισμός των ισογωνίων τροχιών μονοπαραμετρικής οκογένειας γραμμών ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

Τέλος, στην παράγραφο με τίτλο «**Μαθηματικά μοντέλα**» παραθέτουμε, ορισμένα παραδείγματα εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αριθμητικά παραδείγματα, τόσο από τα Μαθηματικά μοντέλα Δ.Ε. πρώτης τάξης, όσο και πολλά άλλα παραδείγματα εφαρμογών υπάρχουν παρακάτω στο κεφάλαιο «**Εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων**».

Λυμένες Ασκήσεις Διαφορικών Εξισώσεων 1ης Τάξης

§1.2 Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

1 Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση δίνεται από την εξίσωση:

(1) $$\ln y = -\frac{\alpha}{x} + \ln x + \beta$$

όπου $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές.

Λύση

Παραγωγίζοντας την (1) δύο φορές, ως προς x, παίρνουμε αντίστοιχα:

(2) $$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x}$$

(3) $$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = -\frac{2\alpha}{x^2} - \frac{1}{x^2}.$$

Από την (2) παίρνουμε:

(4) $$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}.$$

Από την (3) λόγω της (4) παίρνουμε:

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = -\frac{2}{x}\left(\frac{y'}{y} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 yy'' = y^2 - 2xyy' + x^2 (y')^2 \quad \Rightarrow$$

(5) $$\boxed{x^2 yy'' = (y - xy')^2.}$$

Η (5) είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση. ⊛

2 Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων, της οποίας η γενική λύση δίνεται από την εξίσωση:

(1) $$y=c_1e^x ημ\,x+c_2e^x συν\,x$$

όπου c_1, c_2 $(\in\mathbb{R})$ αυθαίρετες σταθερές.

Λύση

Παραγωγίζοντας την (1) δύο φορές, ως προς x, παίρνουμε αντίστοιχα:

(2) $$y'=c_1(e^x ημx+e^x συνx)+c_2(e^x συνx-e^x ημx)$$

(3) $$y''=\ldots=c_1(2e^x συνx)-c_2(2e^x ημx).$$

Επειδή το ως προς c_1, c_2 σύστημα των (1), (2), (3) είναι συμβιβαστό, κατά τα γνωστά, η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων καθώς και των γνωστών όρων αυτού είναι ίση με το μηδέν. Οπότε έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2e^x συνx & -2e^x ημx & y'' \\ e^x ημx+e^x συνx & e^x συνx-e^x ημx & y' \\ e^x ημx & e^x συνx & y \end{vmatrix}=0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή της παραπάνω ορίζουσας επί -2 και την τρίτη γραμμή αυτής επί 2 και προσθέτοντας, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, στην πρώτη γραμμή βρίσκουμε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & y''-2y'+2y \\ e^x ημx+e^x συνx & e^x συνx-e^x ημx & y' \\ e^x ημx & e^x συνx & y \end{vmatrix}=0.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή και εκτελώντας τις σημειούμενες πράξεις βρίσκουμε:

(4) $$e^{2x}(y''-2y'+2y)(συν^2x+ημ^2x)=0$$

και επειδή $e^{2x}\neq 0$, για κάθε x του $\mathbb{R}$ από την (4) προκύπτει:

(5) $$y''-2y'+2y=0.$$

Η (5) είναι η διαφορική εξίσωση που ζητούσαμε. ❁