ΚΩΣΤΑ ΣΠ. ΚΑΤΩΠΟΔΗ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό βασίστηκε στα μαθήματα που παρέδωσα στους φοιτητές του β΄ έτους του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης τα τρία τελευταία χρόνια και αποτελεί μια πρώτη προσέγγιστη της ύλης του εξαμηνιαίου μαθήματος «ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ».

Απευθύνεται κυρίως στους φοιτητές των Τμημάτων Φυσικής κι' αυτός είναι ο κύριος παράγοντας που καθόρισε τόσο το επίπεδο όσο και τα περιεχόμενα αυτού του βιβλίου. Φυσικά ελήφθη υπόψη και το γεγονός, ότι θα πρέπει μέσα στα χρονικά πλαίσια του αντίστοιχου μαθήματος να μπορούν να καλυφθούν ικανοποιητικά οι απαιτήσεις του νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών.

Θέλω, και από τη θέση αυτή, να ευχαριστήσω τους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Θεσ/νίκης, γιατί με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν να διαρθωθούν ορισμένα λάθη του βιβλίου και να σημειώσω, ότι κάθε υπόδειξη που αφορά λάθη, παραλείψεις ή οτιδήποτε άλλο είναι ευπρόσδεκτη. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την επιμελημένη παρουσίαση του βιβλίου καθώς και τον κ. Φώτη Κλάδο για την πολύ καλή σχεδίαση των σχημάτων.

Θεσσαλονίκη, Καλοκαίρι 1985

Κώστας Σπ. Κατωπόδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3. Διπλά ολοκληρώματα

4. Τριπλά ολοκληρώματα

5. Επικαμπύλια ολοκληρώματα

6. Επιεπιφάνεια ολοκληρώματα

7. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

8. Γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα

στοιχεία θεωρίας καμπύλων 1

Από τη Στοιχειώδη Γεωμετρία είναι γνωστές καμπύλες γραμμές, όπως π.χ. η περιφέρεια κύκλου και οι κωνικές τομές (έλλειψη, υπερβολή, παραβολή). Στην Αναλυτική Γεωμετρία βρίσκουμε εξισώσεις, ως προς ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, οι οποίες επαληθεύονται από τα σημεία αυτών των καμπύλων. Είναι οι γνωστές μας εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = a^2 , \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και $y^2 = 2px$ για την περιφέρεια, την έλλειψη, την υπερβολή και την παραβολή αντίστοιχα που το κέντρο τους συμπίπτει με την αρχή του συστήματος Oxy. Παρατηρούμε ότι μία μόνο εξίσωση είναι αρκετή για να περιγράψει τη συγκεκριμένη καμπύλη, όπως επίσης είναι φανερό ότι υπάρχει μία άμεση γεωμετρική εποπτεία.

Μια επίπεδη καμπύλη μπορεί να παρασταθεί επίσης και παραμετρικά. Έτσι π.χ. οι παραμετρικές εξισώσεις της περιφέρειας του κύκλου με ακτίνα a είναι

$$x = a\, \sigma\upsilon\nu\, t , \qquad y = a\, \eta\mu\, t$$

ή διανυσματικά

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = a\, \sigma\upsilon\nu\, t\, \bar{i} + a\, \eta\mu\, t\, \bar{j} \ .$$

Η μελέτη όμως διαφόρων Φυσικών προβλημάτων (και όχι μόνο αυτών), όπως π.χ. η κίνηση ενός υλικού σημείου στο χώρο, δημιουργεί την ανάγκη της επέκτασης της μελέτης των καμπύλων. Όπως όμως είναι φυσικό, η μελέτη τρισδιάστατων καμπύλων δημιουργεί προβλήματα εποπτείας αυτών. Τα προβλήματα αυτά «ξεπερνιούνται» μελετώντας τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των καμπύλων.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον τρισδιάστατο *Ευκλείδειο χώρο* R^3 και το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$. Σε αντίθεση με τις επίπεδες καμπύλες μια εξίσωση στο χώρο της μορφής $\Phi(x, y, z) = 0$, όπου x, y, z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων P ως προς το σύστημα $Oxyz$ που επαληθεύουν αυτή την εξίσωση, παριστάνει, γενικά, μια επιφάνεια[1], ενώ για τον καθορισμό μιας καμπύλης απαιτούνται δύο τέτοιες εξισώσεις. Δηλαδή, γενικά, μια καμπύλη στο χώρο δίνεται ως η τομή δύο επιφανειών. (Ας θυμηθούμε π.χ. την ευθεία στο χώρο που δίνεται ως τομή δύο επιπέδων). Εδώ θα μελετήσουμε καμπύλες οι οποίες δίνονται με τις παραμετρικές (διανυσματικές) τους εξισώσεις.

1.1. Παραμετρική παράσταση συνόλου

Όπως είναι γνωστό ένα σημείο P στο χώρο R^3 καθορίζεται αν δοθούν οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες του x, y, z και επομένως το διάνυσμα θέσης του

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z) = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}\,.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι συντεταγμένες είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t, δηλαδή

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t) \;\;\big|\;\; t \in I = (a, \beta)^{(2)}\,, \tag{1.1}$$

όπου $a, \beta \in R$, $a < \beta$ και $a, \beta \neq \pm\infty$.

Σε διανυσματική έκφραση θα έχουμε

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k} \;\;\big|\;\; t \in I\,. \tag{1.2}$$

Επομένως, σε κάθε τιμή $t = t_0 \in I$ αντιστοιχεί ένα σημείο του R^3 μέσω της (1.2). Ας ονομάσουμε M το σύνολο των σημείων του R^3 που παίρνουμε καθώς η μεταβλητή t μεταβάλλεται στο διάστημα I. Η παράσταση (1.2) ή ((2.2)) ονομάζεται *παραμετρική παράσταση του συνόλου* M και η μεταβλητή t *παράμετρος*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι :

---

1. Θεωρούμε προς το παρόν γνωστό ότι μια εξίσωση της μορφής $\Phi(x, y, z) = 0$ παριστάνει, γενικά, επιφάνεια. Για την επιφάνεια θα μιλήσουμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.
2. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις (1.1) δεν είναι όλες συγχρόνως σταθερές.

(i) η συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t)$ είναι κλάσης C^1[1], $\forall\ t \in I$,

(ii) η απεικόνιση μεταξύ των I και M, μέσω της (1.2), είναι αμφιμονότιμη,

(iii) $\forall\ t \in I$ ισχύει

$$\bar{r}'(t) \neq 0\ .$$[2]

Αν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, η παραμετρική παράσταση (1.2) ονομάζεται *ομαλή παραμετρική παράσταση* του συνόλου M.

Σημεία $t \in I$[3] για τα οποία συμβαίνει $\bar{r}'(t) = 0$ ή η παράγωγος $\bar{r}' = \bar{r}'(t)$ δεν υπάρχει, τότε τα σημεία αυτά ονομάζονται *ανώμαλα σημεία του συνόλου M ως προς την παραμετρική παράσταση (1.2).*

Θεωρούμε τώρα την ομαλή παραμετρική παράσταση $\bar{r} = \bar{r}(t) \mid t \in I$ του συνόλου M. Η παράσταση αυτή του M δεν είναι μοναδική. Το σύνολο M δηλαδή μπορεί να παρασταθεί και από άλλες ομαλές παραμετρικές παραστάσεις της μορφής αυτής με την έννοια ότι αλλάζει η παράμετρος.

Έστω ότι $\bar{r} = \bar{r}_1(\theta) \mid \theta \in I_\theta$ είναι μια άλλη ομαλή παραμετρική παράσταση του συνόλου M και ότι μεταξύ των παραμέτρων t και θ υπάρχει η συναρτησιακή σχέση

$$t = t(\theta) \mid \theta \in I_\theta\ , \tag{1.3}$$

όπου $I_\theta C R$ και το πεδίο τιμών της (1.3) περιέχει το I.

Η συνάρτηση (1.3) ονομάζεται *επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου* αν:

(i) η συνάρτηση $t = t(\theta)$ είναι κλάσης C^1, $\forall\ \theta \in I_\theta$

(ii) είναι $dt/d\theta \neq 0$, $\forall\ \theta \in I_\theta$.

Όπως βλέπουμε για τον ορισμό της επιτρεπτής αλλαγής παραμέτρους απαιτήσαμε $dt/d\theta \neq 0$ ανεξάρτητα αν είναι $dt/d\theta > 0$ ή $dt/d\theta < 0$. Λόγω όμως και των επιπλέον προϋποθέσεων που θέσαμε παραπάνω, αν είναι $dt/d\theta > 0$ ή $dt/d\theta < 0$ η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα αντίστοιχα. Επομένως διαπιστώνουμε ότι της συνάρτησης $t = t(\theta)$ υπάρχει και η αντίστροφή της $\theta = \theta(t) \mid t \in I$ που είναι κλάσης C^1, $\forall\ t \in I$. Επιπλέον ισχύει $d\theta/dt \neq 0$. Τα παραπάνω μας οδηγούν στην εξής πρόταση :

---

1. Ο συμβολισμός C^0, C^1, C^2,... δείχνει ότι η συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t) \mid t \in I$ είναι τουλάχιστον συνεχής ή συνεχής με συνεχή τουλάχιστον την πρώτη παράγωγο ή συνεχής με συνεχείς τουλάχιστον την πρώτη και δεύτερη παράγωγο κ.ο.κ.

2. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον παράγωγος των συναρτήσεων (1.1) και είναι διάφορη από το μηδέν.

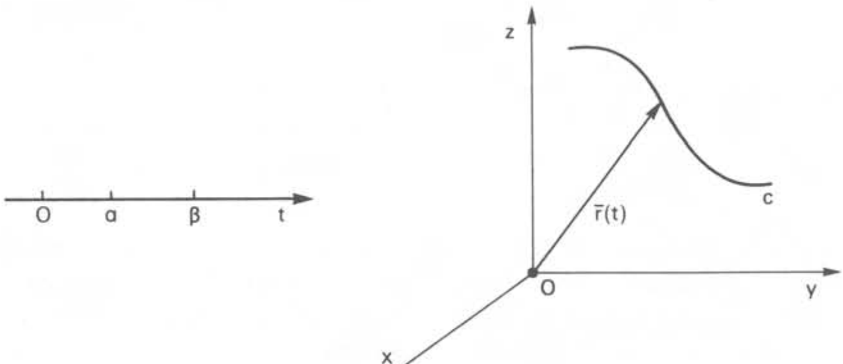
3. Όπως φαίνεται με τη βοήθεια των (1.1) (ή (1.2)) μπορούμε να μιλάμε είτε για το σημείο $P(x, y, z)$ είτε για το σημείο $P(t = t_0)$.

Πρόταση 1.1. *Αν $t = t(\theta) \mid \theta \in I_\theta$ είναι μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, τότε και η αντίστροφη της συνάρτησης $\theta = \theta(t) \mid t \in I$ είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου στο διάστημα I, όπου I είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης $t = t(\theta)$.*

1.2. Ο ορισμός της καμπύλης

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο όλων των ομαλών παραμετρικών παραστάσεων του συνόλου M. Το σύνολο αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε κλάσεις ισοδυναμίας ως εξής: Θα λέμε ότι δύο ομαλές παραμετρικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες, δηλαδή ότι ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, αν υπάρχει μια επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου που να μετασχηματίζει τη μία παράσταση στην άλλη.

Ορισμός 1.1. Ένα σύνολο σημείων M του R^3 που μπορεί να παρασταθεί από μια ομαλή παραμετρική παράσταση της μορφής (1.2) που είναι αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας ομαλών παραμετρικών παραστάσεων ονομάζεται *τόξο καμπύλης*.



Σχ. 1.1

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ανοικτό διάστημα $I = (a, \beta)$ δεν είναι περατωμένο· είναι δηλαδή είτε $a = -\infty$ είτε $\beta = +\infty$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι :

(i) η συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (σχέση (1.2)) είναι κλάσης C^1, $\forall\, t \in I$,

(ii) ισχύει $\bar{r}'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$.

Τότε η παραμετρική παράσταση (1.2) ονομάζεται *γενική ομαλή παρα-*

μετρική παράσταση του συνόλου M[1].

Όπως πιο πάνω έτσι και στην περίπτωση των γενικών ομαλών παραμετρικών παραστάσεων ορίζουμε κλάσεις ισοδυναμίας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Έτσι :

Ορισμός 1.2: Ένα σύνολο σημείων M του R^3 που μπορεί να παρασταθεί από μια γενική ομαλή παραμετρική παράσταση της μορφής (1.2) που είναι αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας γενικών ομαλών παραμετρικών παραστάσεων ονομάζεται *ομαλή καμπύλη* (Σχ. 1.1).

Σημείωση. Ο ορισμός που δώσαμε πιο πάνω δεν αφορά μόνο καμπύλες του χώρου αλλά ισχύει και για επίπεδες καμπύλες. Επίπεδες είναι εκείνες οι καμπύλες που το σύνολο M είναι υποσύνολο του R^2. Με την υπόθεση ότι μια επίπεδη καμπύλη βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy του συστήματος $Oxyz$ θα έχει παραμετρική παράσταση της μορφής

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = 0 \;\mid\; t \in I$$

ή

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} \;\mid\; t \in I. \qquad \square$$

Στις προϋποθέσεις που θέσαμε στους ορισμούς του τόξου καμπύλης και της καμπύλης υποθέσαμε ότι $\bar{r}'(t) \neq 0$. Είναι δυνατόν όμως να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό υποθέτοντας ότι $\bar{r}'(t) = 0$. Τότε χρησιμοποιούμε αντί τον όρο «ομαλή καμπύλη» τον όρο «καμπύλη». Σημεία $t \in I$ για τα οποία συμβαίνει $\bar{r}'(t) = 0$ ονομάζονται *ανώμαλα* σημεία της καμπύλης.

Επίσης από τον ορισμό της ομαλής καμπύλης δεν αποτεκλείεται το γεγονός μια ομαλή καμπύλη c να τεμνει τον εαυτό της. Τούτο σημαίνει ότι για $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I$, να είναι $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$. Τα σημεία αυτά ονομάζονται *διπλά σημεία*[2]. Αν η ομαλή καμπύλη *δεν* έχει πολλαπλά σημεία ονομάζεται *απλή*.

Μια ομαλή καμπύλη ονομάζεται *κλειστή* αν υπάρχει μία τουλάχιστον παραμετρική της παράσταση της οποίας η διανυσματική συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t)$ είναι περιοδική, δηδαδή

$$\bar{r}(t+\omega) = \bar{r}(t)\,, \quad \omega > 0.$$

---

1. Όπως φαίνεται, στις παραπάνω προϋποθέσεις δεν απαιτήσαμε την αμφιμονότιμη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων I και M. Το γεγονός αυτό όμως δεν αποκλείει την περίπτωση σε μια κατάλληλη περιοχή ενός σημείου $t_0 \in I$ να αποκατασταθεί αμφιμονότιμη απεικόνιση.

2. Δεν αποκλείεται φυσικά η καμπύλη να έχει *τριπλά* ή *πολλαπλά* σημεία.

1.3. Προσανατολισμός καμπύλης

Η παραμετρική παράσταση (1.2) μιας ομαλής καμπύλης c ορίζει και ένα προσανατολισμό, με την έννοια ότι επιλέγεται ένας από τους δύο δυνατούς τρόπους διαγραφής της.

Στην παράγραφο 1.2 διαπιστώσαμε ότι η απαίτηση του ορισμού της επιτρεπτής αλλαγής παραμέτρου $dt/d\theta \neq 0$ συνεπάγεται ότι είναι είτε $dt/d\theta > 0$ είτε $dt/d\theta < 0$, δηλαδή ότι η συνάρτηση $t = t(\theta)$ είναι αντίστοιχα αύξουσα ή φθίνουσα. Τότε οι παραμετρικές παραστάσεις $\bar{r} = \bar{r}(t)$ και $\bar{r} = \bar{r}_1(\theta)$ διαγράφουν την καμπύλη με την ίδια ή αντίθετη φορά αντίστοιχα.

Καταλήγουμε επομένως στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3: Θα λέμε ότι η ομαλή καμπύλη $\bar{r} = \bar{r}(t) \mid t \in I$ είναι θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένη, αν η αλλαγή της παραμέτρου $t = t(\theta)$ είναι επιτρεπτή και ισχύουν $dt/d\theta > 0$ ή $dt/d\theta < 0$ αντίστοιχα.

Πιο πρακτικά προσανατολίζουμε την καμπύλη ως εξής :

Ας θεωρήσουμε τα σημεία $t_1, t_2, t_3, \ldots$ του διαστήματος I στα οποία αντιστοιχούν τα σημεία $P_1, P_2, P_3, \ldots$ της ομαλής καμπύλης c. Αν είναι $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ η κίνηση πάνω στην καμπύλη γίνεται από το σημείο P_1 στο σημείο P_2, από το P_2 στο P_3 κ.ο.κ. Τότε λέμε ότι η καμπύλη διαγράφεται κατά τη φορά των αυξανόμενων t. Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίθετη φορά διαγραφής. Επιλέγουμε την πρώτη φορά διαγραφής ως *θετική*, οπότε η αντίθετή της είναι η *αρνητική*.

Αν τώρα ορίσουμε μια φορά διαγραφής της ομαλής καμπύλης c, τότε η καμπύλη c ονομάζεται *προσανατολισμένη*.

Παρατηρήσεις - Παραδείγματα

1. Η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης[1] είναι πολύ χρήσιμη, όπως π.χ. στη Μηχανική όπου η καμπύλη αντιπροσωπεύει την τροχιά ενός υλικού σημείου που κινείται στο χώρο και η παράμετρος t αντιπροσωπεύει το χρόνο. Επιπλέον η παραμετρική παράσταση (1.2) προσφέρεται και για το γεγονός ότι έχουμε μια απλούστερη γραφή της καμπύλης και γιατί η μελέτη Φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια του Διανυσματικού Λογισμού έχει αρκετά πλεονεκτήματα.

---

1. Με τον όρο καμπύλη στα επόμενα θα εννοούμε ομαλή καμπύλη.