Κωνσταντίνος Σπ. Κατωπόδης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ στα ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θεωρία & Ασκήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Το σχήμα του εξωφύλλου είναι ένα γράφημα στο οποίο υπάρχει ένας κύκλος Hamilton.
Ο κύκλος αυτός είναι:
$u_1 \to u_6 \to u_{11} \to u_9 \to u_{10} \to u_5 \to u_4 \to u_3 \to u_8 \to u_7 \to u_2 \to u_1$

ISBN 978-960-456-446-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο, «Εισαγωγή στα Διακριτά Μαθηματικά», απευθύνεται, κυρίως, στους φοιτητές των τμημάτων Πληροφορικής, στους φοιτητές άλλων τμημάτων στα οποία διδάσκεται η Επιστήμη της Πληροφορικής, καθώς και σε κάθε ενδιαφερόμενο για το αντικείμενο των Διακριτών Μαθηματικών.

Το βιβλίο είναι ο καρπός της διδασκαλίας μου στο Τμήμα Πληροφορικής του ΑΤΕΙ Θεσσαλονίκης, από την ίδρυσή του (1987) μέχρι το 2011, του σχετικού εξαμηνιαίου μαθήματος.

Στα πρώτα χρόνια, η σχετική βιβλιογραφία ήταν ανύπαρκτη στη χώρα μας. Το 1994 κυκλοφόρησε το δίτομο βιβλίο «Διακριτά Μαθηματικά: Προβλήματα και Λύσεις» των Βουτσαδάκη Γ.[i] κ.α., του Πανεπιστημίου Πατρών, το οποίο διανέμονταν στους φοιτητές ως βασικό βοήθημα, παράλληλα με δικές μου σχετικές Σημειώσεις. Στη συνέχεια, η διανομή του παραπάνω βοηθήματος αντικαταστάθηκε από το βιβλίο του Liu, C. «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών»[ii] που μεταφράσθηκε στο πανεπιστήμιο Κρήτης και που είχε οργανώσει το πρώτο τμήμα πληροφορικής περί το 1980 (;). Στη συνέχεια κυκλοφόρησαν αφενός μεν έγκριτα βιβλία της διεθνούς βιβλιογραφίας, αφετέρου δε με την ανάπτυξη των τμημάτων πληροφορικής άρχισαν να κυκλοφορούν και βιβλία ελλήνων συγγραφέων.

Τα Διακριτά Μαθηματικά, που εισήχθησαν περίπου τη δεκαετία του 1980 στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αποτελούν ένα καλό και απαραίτητο εργαλείο για τις εφαρμογές όχι μόνο στις επιστήμες τις σχετικές με την Πληροφορική αλλά και στις Πιθανότητες, στη Στατιστική κ.λπ.

Ο φοιτητής θα παρατηρήσει ότι δεν υπάρχουν πολλές εξειδικευμένες εφαρμογές σε αντικείμενα πληροφορικής. Αυτό συμβαίνει, γιατί παραμένει στην ευχέρεια του καθηγητή ειδικότητας να χρησιμοποιήσει κάθε φορά το συγκεκριμένο αντικείμενο από τα περιεχόμενα του βιβλίου, προκειμένου να επιλύσει προβλήματα που θα προκύψουν από τις εφαρμογές.

Η ύλη του βιβλίου απαιτεί από το φοιτητή καλή γνώση των μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου, ιδιαιτέρως δε της στοιχειώδους Άλγεβρας και της

i. ΒΟΥΤΣΑΔΑΚΗΣ, Γ. κ.α.: «Διακριτά Μαθηματικά: Προβλήματα και Λύσεις», Gutenberg, 1994.

ii. LIU, C.: «ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

Μαθηματικής Ανάλυσης, με έμφαση στις Σειρές, Αριθμητικές και, κυρίως, Δυναμοσειρές, συνήθεις και Δυωνυμικές.

Όμως, στο βιβλίο αυτό υπάρχουν αντικείμενα που διαφέρουν ουσιαστικά από τα αντικείμενα που αντιμετώπισε ο φοιτητής μέχρι τώρα στα μαθηματικά που έχει διδαχθεί στο Λύκειο. Μια βασική διαφορά, π.χ. του μαθήματος αυτού από την Ανάλυση, είναι ότι ως βασικό σύνολο έχει το σύνολο των φυσικών (θετικών ακεραίων) αριθμών, που είναι διακριτό σύνολο και όχι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ως γνωστόν είναι ένα συνεχές σύνολο. Επομένως, ο φοιτητής θα πρέπει να συνηθίσει στην ιδέα ότι βασικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης που γνώρισε μέχρι εδώ, όπως π.χ. το «αρκούντως κοντά» και «η συνέχεια», δεν είναι αναγκαία χρήσιμες. Ομοίως, δεν ορίζεται η παράγωγος, όπως στις πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να δείξει ιδιαίτερη επιμέλεια για να μπορεί να αφομοιώσει τις νέες έννοιες, έτσι ώστε να μπορεί να τις εφαρμόσει. Σε αυτό αποβλέπουν και οι βασικοί στόχοι του μαθήματος που αναφέρονται παρακάτω.

i) Στη διεύρυνση της μαθηματικής ωριμότητας των φοιτητών κατά τη διάρκεια της μελέτης μιας επιστημονικής περιοχής, η οποία είναι αρκετά διαφορετική από την παραδοσιακή κάλυψη στο βασικό Λογισμό.
ii) Στη μελέτη μεθόδων και τεχνικών για να μπορεί ο φοιτητής να επιλύει προβλήματα τα οποία εμφανίζονται σε διάφορα πεδία στην επιστήμη των υπολογιστών.
iii) Στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των φοιτητών για τη δημιουργία και επίλυση τέτοιων προβλημάτων, την ερμηνεία των λύσεών τους, καθώς και τον τρόπο εφαρμογής τους.

Η εμπειρία της πολύχρονης διδασκαλίας του συγκεκριμένου μαθήματος, καθώς και η συνεργασία με τους συναδέλφους που δίδασκαν μαθήματα ειδικότητας, καθόρισε τα περιεχόμενα και το εύρος των αντικειμένων.

Το βιβλίο περιλαμβάνει οχτώ κεφάλαια, τα οποία περιέχουν τα βασικά θέματα διδασκαλίας των Διακριτών Μαθηματικών στο χρονικό διάστημα ενός εξαμήνου, και αναφέρονται τα εξής: Βασικά θέματα Άλγεβρας της Λογικής, μια εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων και στην Άλγεβρα Boole με αναφορά στα λογικά κυκλώματα και κυκλώματα διακοπτών, θέματα από τη Θεωρία Αριθμών, βασικοί κανόνες Απαρίθμησης με εισαγωγή στη Συνδυαστική Ανάλυση, Διακριτές Αριθμητικές Συναρτήσεις και Γεννήτριες Συναρτήσεων, Αναδρομικές Σχέσεις, μια ευρεία εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων, και τέλος στοιχεία από τα Δένδρα με περιγραφή των βασικών αλγορίθμων Dijkstra και Kruskal.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν αρκετά λυμένα παραδείγματα. Επίσης κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται από ικανό αριθμό άλυτων ασκήσεων. Συνολικά τα λυμένα παραδείγματα και οι άλυτες ασκήσεις είναι (περίπου) 400 και 250 αντίστοιχα.

Όπως εύκολα παρατηρεί ο αναγνώστης, κάνοντας ένα πέρασμα στο βιβλίο, η ύλη δεν επεκτείνεται πολύ. Τούτο συμβαίνει λόγω του σκοπού που επιτελεί το βιβλίο. Σκοπός μας δηλαδή είναι ο φοιτητής, στο χρονικό διάστημα ενός εξαμήνου, που συνήθως δεν ολοκληρώνεται, να πάρει εκείνες τις γνώσεις που του είναι απαραίτητες σε προπτυχιακό επίπεδο, και να μπορέσει να τις επεκτείνει ευρύτερα, αν θέλει να τις χρησιμοποιήσει είτε σε μεταπτυχιακό επίπεδο είτε σε επαγγελματικό. Γι' αυτό το σκοπό υπάρχει ικανοποιητική διεθνής βιβλιογραφία στην οποία αναφέρουμε αρκετά έγκριτα συγγράμματα.

Σημειώνεται ότι κάθε επιστημονικός όρος συνοδεύεται από την αντίστοιχη αγγλική έκφραση, έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει ευκολότερη πρόσβαση στη διεθνή βιβλιογραφία.

Ο αναγνώστης έχει επιπλέον, μέσω του συνδέσμου

http://www.ziti.gr/docs/pdf/1615_seiron.pdf

πρόσβαση στο ψηφιακό βιβλίο «Μαθήματα Σειρών» με περιεχόμενο ακολουθίες, σειρές, δυναμοσειρές και Διωνυμικές δυναμοσειρές που είναι χρήσιμες στη μελέτη τμημάτων των Διακριτών Μαθηματικών.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν:

i) *Παράρτημα 1*: Οδηγίες, απαντήσεις, ή λύσεις στις άλυτες ασκήσεις του βιβλίου.
ii) *Παράρτημα 2*: Υπόδειγμα λύσης άσκησης γεννητριών συναρτήσεων (Κεφ. 5).
iii) *Παράρτημα 3*: Η απόδειξη του θεωρήματος 8.2.
iv) *Βιβλιογραφία* στην οποία αναφέρονται βιβλία που βρίσκονται στη βιβλιοθήκη του ΑΤΕΙ-Θ και σε βιβλιοθήκες άλλων Ανώτατων Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων. Είναι προφανές, ότι ο αναγνώστης θα βρει σε κάθε βιβλίο πλούσια συμπληρωματική βιβλιογραφία, έτσι ώστε να μπορεί να λύσει τις όποιες απορίες δημιουργηθούν κατά την ενασχόλησή του με τα Διακριτά Μαθηματικά.
v) *Ευρετήριο* Ελληνοαγγλικής ορολογίας

Επιθυμώ να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους φοιτητές που συνεργάστηκα μαζί τους στα 40 χρόνια της διδασκαλίας μου στο Α.Π.Θ. και στο ΑΤΕΙ – Θ. Πιστεύω ότι έβαλα και εγώ ένα μικρό λιθαράκι στο χτίσιμο της γνώσης που απέκτησαν.

Θεσσαλονίκη, Άνοιξη 2016

Κων/νος Σπ. Κατωπόδης

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία από την Άλγεβρα της Λογικής

Όσοι ασχολούνται κυρίως με τα Μαθηματικά και την Πληροφορική, αλλά και με άλλα σχετικά επιστημονικά αντικείμενα, θα βρέθηκαν στο δίλλημα να διαπιστώσουν αν κάποιος **ισχυρισμός**[1] (assertion) που αναφέρεται σ' αυτά είναι **Αληθής** (True) ή **Ψευδής** (False). Συχνά η διαπίστωση είναι εύκολη. Αν π.χ. κληθούμε να αποφανθούμε για το είδος των ισχυρισμών «$5+3=8$» ή «$5+3=10$» είναι προφανές ότι η απάντηση θα είναι ότι ο ισχυρισμός «$5+3=8$» είναι αληθής, ενώ ο ισχυρισμός «$5+3=10$» είναι ψευδής. Οι απαντήσεις σ' αυτές τις ερωτήσεις δίνονται εύκολα, γιατί στηρίζονται στις γνώσεις που έχουμε αποκτήσει από στο σχολείο ή την εμπειρία. Αν όμως ερωτηθούμε γιατί ισχύουν τα παραπάνω, ίσως να μην μπορούμε να δικαιολογήσουμε τις απαντήσεις.

Ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις που οι απαντήσεις δεν είναι τόσο προφανείς. Π.χ. αν τεθεί ο ισχυρισμός, «το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών ακεραίων αριθμών είναι n^2» η αντίδραση θα είναι, «αλήθεια;», «πώς το ξέρουμε;», «πώς φθάσαμε σ' αυτό το συμπέρασμα;», «δεν το πιστεύω» κ.ο.κ. Οι απαντήσεις που δόθηκαν και κατ' επέκταση οι αμφιβολίες που προκύπτουν κάθε φορά που κάποιος βρίσκεται μπροστά σε ένα ισχυρισμό που δεν είναι άμεσα προφανής είναι δικαιολογημένες. Αυτές οι αμφιβολίες ή οι ενστάσεις που δημιουργούνται στα ερωτήματα που τίθενται, και είναι διαχρονικά, βρίσκονται πίσω από μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών που είναι η **απόδειξη** (proof). Με τη χρήση της απόδειξης διερευνούμε όχι μόνο αν ένας ισχυρισμός είναι αληθής αλλά, κυρίως, **γιατί** είναι αληθής. (Θα πρέπει να σημειωθεί και η χρήση της **ανταπόδειξης** (disproof)[2] προκειμένου να αναιρεθεί μια απόδειξη).

---

1. Ή ομοίως **πρόταση** ή **δήλωση** (statement) ή καλύτερα πρόβλημα.
2. Απόδειξη που αναιρεί άλλη απόδειξη.

Όμως, προκειμένου να πετύχουμε μια στέρεα απόδειξη ενός προβλήματος, μια απόδειξη δηλαδή που δε θα επιδέχεται αμφισβήτηση και δε θα μπορεί να αναιρεθεί, π.χ. από μια ανταπόδειξη, θα πρέπει να εδράζεται σε μια στέρεα βάση που θα αποτελείται από τους κανόνες της **Μαθηματικής Λογικής** (Mathematical Logic). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ή Λογική διαπιστώνει με διαδοχικούς συλλογισμούς αν ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής.

Δεν είναι πάντα σίγουρο ότι με την εφαρμογή της μαθηματικής λογικής και της απόδειξης θα μπορούσε να αποδειχθεί κάθε ισχυρισμός όσο κι' αν είναι προφανής η αλήθεια του[3].

Πέρα από τα μαθηματικά, ένας άλλος τομέας που θα πρέπει να χρησιμοποιούνται οι κανόνες της λογικής είναι η περίπτωση της ανάπτυξης προγράμματος ή συστήματος προγραμμάτων σε Η/Υ. Επίσης πολλές **μαθηματικές δομές** (mathematical structures) χρησιμοποιούνται στην επιστήμη των Η/Υ όπως π.χ. η Άλγεβρα Boole[4]. Αυτές οι δομές συχνά περιγράφονται καλύτερα με βάση την τυπική θεωρία των μαθηματικών και σε αυτό το πλαίσιο οι αποδείξεις παίζουν σπουδαίο ρόλο. Η θεωρία γραφημάτων, για παράδειγμα, παρέχει τη βάση για πολλές ιδέες στις δομές δεδομένων, και αυτό αποτελεί τη βάση για μερικά από τα θεωρητικά μοντέλα ενός Η/Υ τα οποία είναι χρήσιμα για την κατανόηση τού πώς οι υπολογιστές μπορούν ή δεν μπορούν να εκτελέσουν ορισμένα έργα. Επίσης η **Συνδυαστική Ανάλυση** (Combinatorial Analysis), οι **Γεννήτριες Συναρτήσεων** (Generating Functions), οι **Αναδρομικές Σχέσεις** (Recurrence Relations), **Άλγεβρα Boole** (Boolean Algebra) κ.λπ. παίζουν σπουδαίο ρόλο στην επιστήμη των Η/Υ.

1.1 Η Πρόταση – Λογικές Πράξεις

Στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου τον κύριο ρόλο έπαιξε η έννοια της απόδειξης ενός ισχυρισμού ή μιας κατάστασης καθώς και η αναφορά του σπουδαίου ρόλου που παίζει η μαθηματική λογική. Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε ως βασικό εργαλείο την έννοια της πρότασης αντί του ισχυρισμού.

3. Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι υπάρχουν και προβλήματα στα μαθηματικά, όπως π.χ. οι λεγόμενες εικασίες, που είτε αποδείχθηκαν πολλά χρόνια μετά τη διατύπωσή τους ή παραμένουν αναπόδεικτες. Δύο πολύ γνωστές εικασίες είναι η εικασία του Fermat για τους πυθαγόρειους αριθμούς που αποδείχτηκε σχετικά πρόσφατα και η εικασία του Goldbach, «κάθε θετικός άρτιος ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών», π.χ. $8=3+5$, $16=3+13=5+11$ που παραμένει αναπόδεικτη.
4. Βλ. Κεφ. 2.

1.1.1. Η Πρόταση

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της πρότασης.

Το βασικότερο εργαλείο έκφρασης και διατύπωσης των διανοημάτων του ανθρώπινου νου είναι η γλώσσα. Με τη βοήθεια της γλώσσας οι άνθρωποι επικοινωνούν μεταξύ τους ανταλλάσσοντας ιδέες και σκέψεις.

Όπως είναι γνωστό η γλώσσα αποτελείται από **φθόγγους** (γράμματα). Συνδυασμοί των φθόγγων είναι οι **συλλαβές**, συνδυασμοί των συλλαβών είναι οι **λέξεις**, ενώ συνδυασμοί των λέξεων είναι οι **προτάσεις**.

Ορισμός 1.1. ***Πρόταση*** *(sentence) είναι η οργανωμένη ομάδα λέξεων που εκφράζει μόνο ένα νόημα με σύντομη διατύπωση.*

Για να σχηματισθούν οι λέξεις και κατ' επέκταση οι προτάσεις, απαιτείται η τήρηση κάποιων κανόνων. Οι κανόνες αυτοί περιέχονται στη Γραμματική και το Συντακτικό της συγκεκριμένης γλώσσας.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, σε μια φυσική γλώσσα (όπως π.χ. την ελληνική, την αγγλική, τη γαλλική κ.λπ.) υπάρχει αρκετές φορές αδυναμία στην έκφραση κάποιων εννοιών με αυστηρότητα. Επειδή πολλές λέξεις είναι πολυσήμαντες, που συνεπάγεται ότι και οι προτάσεις που σχηματίζουν είναι κι' αυτές πολυσήμαντες, κρίθηκε απαραίτητη η εισαγωγή γλωσσών με αυστηρότερους κανόνες, έτσι ώστε οι γλωσσολογικές παραστάσεις να είναι αντίστοιχες με το γλωσσικό περιεχόμενό τους. Οι γλώσσες αυτές ονομάζονται **τυπικές** (typical)και συμβάλουν πολύ στη συστηματοποίηση της γνώσης.

Από τον ορισμό της πρότασης που δώσαμε πιο πάνω φαίνεται ότι η πρόταση είναι το βασικότερο στοιχείο μιας γλώσσας για τη διατύπωση ενός νοήματος. Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρισμούς, προφορικούς ή γραπτούς, οι οποίοι θα περιγράφουν **καταστάσεις** που θα μορφοποιούνται σε προτάσεις. *Μια τέτοια πρόταση θα είναι μόνο* ***αληθής*** *(true) ή* ***ψευδής*** *(false), αλλά όχι και τα δύο συγχρόνως*, κι' αυτή είναι η βασική ιδιότητα αυτών των προτάσεων.

Η αλήθεια ή το ψεύδος μιας πρότασης ονομάζεται **τιμή αλήθειας** (truth value) αυτής της πρότασης.

Είναι προφανές, ότι θα πρέπει για κάθε πρόταση να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε την τιμή αλήθειάς της. Έτσι, για να μπορεί να χαρακτηρισθεί μια πρόταση ως αληθής ή ψευδής θα πρέπει να έχουν καθορισθεί εκ των προτέρων αρχές οι οποίες θα έχουν προκύψει είτε από την εμπειρία είτε από την παρατήρηση και θα λειτουργούν ως αξιώματα.

Πιο εύκολα είναι τα πράγματα στις τυπικές γλώσσες. Γι' αυτές τις γλώσσες οι αρχές αυτές είναι σαφείς κανόνες και αναφέρονται σε κάθε φράση με σημαντικό περιεχόμενο. Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός συστηματοποιημένου γνωστικού χώρου είναι ο μεθοδικός προσδιορισμός της αλήθειας ή του ψεύδους των διαφόρων προτασιακών ισχυρισμών και η εξαγωγή νέων αληθών συμπερασμάτων. Θα πρέπει δηλαδή κατά τη δημιουργία και διατύπωση μιας επιστημονικής θεωρίας, κατά την οποία διατυπώνονται ισχυρισμοί και επιχειρήματα που *μορφοποιούνται σε προτάσεις*, να υπάρχει έλεγχος για την ακρίβεια ή μη των ισχυρισμών της. Η θεωρία η οποία ορίζει τους κανόνες ελέγχου είναι η θεωρία της Λογικής[5]. Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελεί ένα πάρα πολύ μικρό τμήμα της θεωρίας της Λογικής, θα προσπαθήσουμε αφενός μεν να κατανοήσουμε τους κανόνες της θεωρίας, αφετέρου να αποκτήσουμε την ικανότητα σχηματισμού σωστών επιστημονικών ισχυρισμών, έτσι ώστε να διατυπώνουμε με ακρίβεια τις επιστημονικές μας απόψεις.

Στα Μαθηματικά, στη Φυσική και σε άλλες Θετικές Επιστήμες το περιεχόμενο των προτάσεων της φυσικής γλώσσας αντικαθίσταται από σύμβολα, όπως π.χ. τα γράμματα $x, y, z, \ldots$ για τον προσδιορισμό μεταβλητών, η παράγωγος $\frac{df}{dx}$, το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ κ.λπ. Είναι γεγονός ότι η εξέλιξη της συμβολικής λογικής επηρέασε θετικά την εξέλιξη των Μαθηματικών.

Όπως στα Μαθηματικά έτσι και στη Συμβολική Λογική χρησιμοποιούμε διάφορα σύμβολα τα οποία ονομάζονται μεταβλητές. Στον Προτασιακό Λογισμό (στον λογισμό που χρησιμοποιεί δηλαδή ως βασικό στοιχείο την πρόταση) χρησιμοποιούμε τα σύμβολα για την παράσταση των προτάσεων. Τα σύμβολα αυτά έχουν αφηρημένη σημασία γιατί μπορούν να αντικατασταθούν από οποιεσδήποτε προτάσεις, οπότε παίρνουν μια ορισμένη τιμή αλήθειας, και ονομάζονται **προτασιακές μεταβλητές** (propositional variables).

Οι μεταβλητές αυτές θα συμβολίζονται με τα γράμματα $p, q, r, s, t, \ldots$ με (ή χωρίς) δείχτες. Επίσης για την τιμή αλήθειας μιας πρότασης θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα T ή F από τις Αγγλικές λέξεις T(rue) ή F(alse) αντίστοιχα, ανάλογα αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

Οι προτάσεις διακρίνονται σε **απλές** (simple) και **σύνθετες** (composite). Οι σύνθετες προτάσεις σχηματίζονται από τις απλές προτάσεις που συνδέονται μεταξύ τους με διάφορους συνδέσμους (και, ή, ...). Αλλά για τις σύνθετες προτάσεις θα μιλήσουμε εκτενώς στα επόμενα. Προς το παρόν θα μελετήσουμε εκείνες τις

5. Η θεωρία της Λογικής εισήχθη από τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.).

σύνθετες προτάσεις που σχηματίζονται από δύο απλές προτάσεις καθώς και τους τρόπους σχηματισμού τους.

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε τις παρακάτω εκφράσεις:

α) «Τι κάνεις;»

β) «$2+2=4$»

γ) «$1+3=7$»

δ) «$x+3=5$»

ε) «$x=2$ ή 5»

ζ) «$2+2=4$ ή $1+3=7$»

η) «Τι ωραία μέρα είναι σήμερα».

θ) «Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής.»

ι) «Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο.»

κ) «Πήγαινε να διαβάσεις.»

λ) «Ο Σαμαράκης είναι Έλληνας συγγραφέας και η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο.»

Από τις εκφράσεις αυτές οι α), ε), η) και κ) δεν μπορούν να θεωρηθούν προτάσεις γιατί δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν ως αληθείς ή ψευδείς. Οι εκφράσεις β), γ), και δ) μπορούν να θεωρηθούν προτάσεις, από τις οποίες η β) είναι αληθής η γ) είναι ψευδής ενώ η δ) είναι αληθής ή ψευδής ανάλογα με την τιμή του x. Ομοίως και για τις προτάσεις θ) και ι). Εκφράσεις όπως οι ζ) και λ) που αποτελούνται από δύο, ή περισσότερες, προτάσεις και που συνδέονται με έναν, ή περισσότερους, συνδέσμους ονομάζονται **σύνθετες προτάσεις** (compound propositions). Η τιμή αλήθειας των σύνθετων προτάσεων εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των απλών προτάσεων που τις απαρτίζουν και από τους συνδέσμους που τις συνδέουν. Προτάσεις που δεν είναι σύνθετες ονομάζονται **απλές**.

1.1.2. Λογικές Πράξεις

Όπως στην Άλγεβρα των αριθμών ορίζονται πράξεις μεταξύ των αριθμών έτσι και στον **Προτασιακό Λογισμό** (Propositional Calculus) ή **Άλγεβρα της Λογικής** (Algebra of Logic) ορίζονται πράξεις μεταξύ των προτάσεων που αποτελούν συνθέσεις μεταξύ των προτάσεων με τη χρήση των **λογικών συνδέσμων** (connectives)[6] **και** (and), **ή** (or) κ.λπ.

6. Ή απλά σύνδεσμοι.

Ορισμός 1.2. *Μια σύνθεση προτάσεων ονομάζεται συναρτησιακή πράξη αλήθειας ή **λογική πράξη** (logical operation) αν η τιμή αλήθειας της πρότασης που προκύπτει καθορίζεται από την τιμή αλήθειας των πρωταρχικών προτάσεων.*

*Αν σε μία λογική πράξη συντίθενται δύο το πολύ απλές προτάσεις τότε η λογική πράξη ονομάζεται **απλή**. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **σύνθετη**.*

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τις εξής λογικές πράξεις:

i) Η άρνηση

Η **άρνηση** (negation – NOT) μιας πρότασης p είναι μια νέα πρόταση η οποία συμβολίζεται $\overline{p}$ (ή ~p ή $\neg p$) και για την οποία χρησιμοποιούμε την έκφραση «είναι λάθος ότι p» ή «δεν είναι αλήθεια ότι p».

Μια βασική ιδιότητα της άρνησης είναι η εξής: *«Αν η πρόταση p είναι αληθής η πρόταση $\overline{p}$ είναι ψευδής και αντίστροφα».*

Για την πρόταση p: «Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής» η άρνηση $\neg p$: είναι «Τα Διακριτά Μαθηματικά δεν είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής» ή «Δεν είναι αλήθεια ότι τα Διακριτά Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής».

ii) Η σύζευξη

Η **σύζευξη** (conjunction – AND) δύο προτάσεων p και q είναι μια νέα πρόταση η οποία συμβολίζεται $p \wedge q$ και για την οποία χρησιμοποιούμε την έκφραση «p και q».

Μια βασική ιδιότητα της σύζευξης είναι η εξής: *«Η σύνθετη πρόταση* $p \wedge q$ *είναι τότε και μόνο τότε αληθής αν είναι συγχρόνως αληθείς και οι δύο προτάσεις* p *και* q».

Ένα παράδειγμα σύζευξης των προτάσεων p: «Ο Σαμαράκης είναι Έλληνας συγγραφέας» και q: «Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο» είναι: «Ο Σαμαράκης είναι Έλληνας συγγραφέας **και** η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο».

iii) Η διάζευξη

Η **διάζευξη** (disjunction – OR)[7] δύο προτάσεων p και q είναι μια νέα πρόταση η οποία συμβολίζεται $p \vee q$ και για την οποία χρησιμοποιούμε την έκφραση «p *ή* q».

Μια βασική ιδιότητα της διάζευξης είναι η εξής: «Η σύνθετη πρόταση $p \vee q$ είναι τότε και μόνο τότε ψευδής αν είναι συγχρόνως ψευδείς και οι δύο προτάσεις p και q».

7. Ή «inclusive disjunction».

Για τις προτάσεις p: «Ο ουρανός σήμερα είναι συννεφιασμένος» και q: «Η Αθήνα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας» η διάζευξή τους είναι «Ο ουρανός σήμερα είναι συννεφιασμένος **ή** η Αθήνα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας».

iv) Η αποκλειστική διάζευξη

Η **αποκλειστική διάζευξη** (exclusive disjunction) δύο προτάσεων p και q είναι μια νέα πρόταση η οποία συμβολίζεται $p \veebar q$ και για την οποία χρησιμοποιούμε την έκφραση «p είτε q».

Μια βασική ιδιότητα της διάζευξης είναι η εξής: «Η σύνθετη πρόταση $p \veebar q$ είναι τότε και μόνο τότε αληθής αν ακριβώς μία από τις δύο προτάσεις είναι αληθής». Για τις προτάσεις p: «Ο Γιώργος εργάζεται στη Θεσσαλονίκη» και q: «Ο Γιώργος κατοικεί στο Παρίσι» η αποκλειστική διάζευξή τους είναι «Ο Γιώργος εργάζεται στη Θεσσαλονίκη **είτε** ο Γιώργος κατοικεί μόνιμα στο Παρίσι».

Παρατήρηση 1.1. Η διαφορά μεταξύ της διάζευξης και της αποκλειστικής διάζευξης, έγκειται στο γεγονός της διφορούμενης σημασίας του συνδέσμου «ή». Ενώ η σύνθετη πρόταση $p \vee q$ είναι αληθής αν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς ή η μία από τις δύο, στην περίπτωση της αποκλειστικής διάζευξης η σύνθετη πρόταση $p \veebar q$ είναι αληθής αν μόνο η μία από τις προτάσεις είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Δηλαδή στη δεύτερη περίπτωση δύο γεγονότα δεν μπορεί να συμβαίνουν ταυτοχρόνως[8].

v) Οι πράξεις της συνεπαγωγής

Μια άλλη ενδιαφέρουσα σύνθεση των δύο προτάσεων p και q είναι μια νέα πρόταση η οποία συμβολίζεται $p \to q$ και ονομάζεται **συνεπαγωγή** (implication) και για την οποία χρησιμοποιούμε την έκφραση «αν p τότε q» (ή η p συνεπάγεται την q).

Ορίζουμε ότι, «*Η σύνθετη πρόταση* $p \to q$ *είναι τότε και μόνο τότε ψευδής αν η πρόταση* p *είναι αληθής και η πρόταση* q *είναι ψευδής. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η πρόταση* $p \to q$ *είναι αληθής*».

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι «*η πρόταση* p *είναι η* ***ικανή συνθήκη*** *(sufficient condition) για την πρόταση* q» και «*η πρόταση* q *είναι η* ***αναγκαία συνθήκη*** *(necessary condition) για την πρόταση* p».

Συνήθως η πρόταση p ονομάζεται **υπόθεση** (hypothesis) και η πρόταση q ονομά-

8. Σε αρκετές φυσικές γλώσσες υπάρχουν διαφορετικές λέξεις για τις δύο εκφράσεις της διάζευξης. Έτσι στη Λατινική Γλώσσα υπάρχουν οι λέξεις «vel» και «aut» αντίστοιχα.

ζεται **συνέπεια** (consequence) ή **συμπέρασμα** (conclusion).

Για τις προτάσεις p: «Τα Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής» και q: «Ο Σαμαράκης έγραψε το ΛΑΘΟΣ» η σύνθετη πρόταση $p \to q$ είναι «Αν τα Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής τότε ο Σαμαράκης έγραψε το ΛΑΘΟΣ».

Η σύνθετη πρόταση «p ανν[9] q» ή «p τότε και μόνον τότε q» η οποία συμβολίζεται $p \leftrightarrow q$ και ονομάζεται **αμφισυνεπαγωγή ή ισοδυναμία** (biconditional) είναι η σύζευξη των σύνθετων προτάσεων $p \to q$ και $q \to p$. Η σύνθετη πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής αν και οι δύο σύνθετες προτάσεις $p \to q$ και $q \to p$ είναι αληθείς. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η p είναι συγχρόνως **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για την q και αντίστροφα.

Μια βασική ιδιότητα της αμφισυνεπαγωγής είναι η εξής: «Η σύνθετη πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής αν και οι δύο προτάσεις p και q έχουν την ίδια τιμή αλήθειας».

Για τις προηγούμενες προτάσεις p και q η σύνθετη πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι «Τα Μαθηματικά είναι απαραίτητο μάθημα για τους φοιτητές της Πληροφορικής ανν ο Σαμαράκης έγραψε το ΛΑΘΟΣ».

Σημείωση 1.1. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πρόταση $p \leftrightarrow q$ έχει την ίδια τιμή αλήθειας με τη σύνθετη πρόταση $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Είναι δε γνωστό ότι στα Μαθηματικά προκειμένου να αποδείξουμε την ισοδυναμία δύο προτάσεων p και q αποδεικνύουμε χωριστά τις $p \to q$ και $q \to p$[10].

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να παρασταθούν σε πίνακες οι οποίοι ονομάζονται **πίνακες αλήθειας** (truth tables). Σ' ένα πίνακα αλήθειας φαίνονται οι τιμές αλήθειας των σύνθετων προτάσεων για όλους τους συνδυασμούς των τιμών αλήθειας των προτάσεων p και q.

Πίνακας 1.1.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

9. ανν = αν και μόνον αν.
10. Για σύνθετες προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται περισσότεροι από δύο σύνδεσμοι θα αναφερθούμε αμέσως παρακάτω.

Παρατήρηση 1.2. Σ' όλες τις λογικές πράξεις που αναφέρονται σε δύο απλές προτάσεις (**διμελείς** λογικές πράξεις) δεν απαιτείται σημασιολογική εξάρτηση μεταξύ των προτάσεων. (Στην πραγματικότητα όμως, και ιδιαίτερα στις φυσικές γλώσσες, αν οι προτάσεις p και q δεν σχετίζονται δεν λαμβάνονται καθόλου υπόψη).

Παρατήρηση 1.3. Μέχρις εδώ μελετήσαμε τις τέσσερις βασικές απλές λογικές πράξεις. Εισάγοντας τρεις νέους συνδέσμους ορίζονται ισάριθμες βοηθητικές πράξεις μεταξύ των προτάσεων p και q. Έτσι:

α) Με το σύνδεσμο NOR ορίζεται η πράξη $p \text{ NOR } q = {\sim}p \wedge {\sim}q$.

β) Με το σύνδεσμο NAND ορίζεται η πράξη $p \text{ NAND } q = {\sim}p \vee {\sim}q$.

γ) Με το σύνδεσμο NEITHER ορίζεται η πράξη $p \text{ NEITHER } q = {\sim}(p \vee q)$.

Οι πίνακες αλήθειας των πράξεων αυτών είναι οι εξής:

Πίνακας 1.2.

p	q	p NOR q	p NAND q	p NEITHER q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T

1.1.3. Προτασιακές Παραστάσεις – Πολυώνυμα Boole

Μέχρις εδώ μελετήσαμε σύνθετες προτάσεις που αποτελούσαν σύνθεση δύο απλών προτάσεων. Η σύνθεση περισσοτέρων προτάσεων με τη χρήση, φυσικά, περισσότερων από δύο συνδέσμους δημιουργεί πολυπλοκότερες προτάσεις οι οποίες ονομάζονται **προτασιακές παραστάσεις** (propositional expressions). Οι παραστάσεις αυτές συμβολίζονται $P(p, q, r, \ldots)$ ή $Q(p, q, r, \ldots)$ κ.λπ. Συνηθέστερα, και ανάλογα με το πρόβλημα που περιγράφει, μια προτασιακή παράσταση ονομάζεται **πολυώνυμο Boole** (Boole polynomial). Ένα πολυώνυμο Boole συμβολίζεται $f(p, q, r, \ldots)$ ή $g(p, q, r, \ldots)$ κ.λπ.

Παραδείγματα προτασιακών παραστάσεων και πολυωνύμων Boole είναι

$$P(p, q, r, t) = p \rightarrow (q \vee (r \underline{\vee} t)) \quad \text{και} \quad Q(p, q) = \overline{(p \leftrightarrow \overline{q})}$$

ή

$$f(p, q) = p \vee (p \rightarrow q) \quad \text{και} \quad g(p, q) = \overline{p} \leftrightarrow (q \vee p)$$

αντίστοιχα.

Μεταξύ των προτασιακών παραστάσεων, ή μεταξύ των πολυωνύμων Boole, είναι επιτρεπτές οι λογικές πράξεις με τη χρήση των λογικών συνδέσμων και προκύπτουν πάλι πολυώνυμα Boole. Έτσι έχουμε π.χ.

$$f(p, q) \wedge g(p, q) = [p \vee (p \rightarrow q)] \wedge [\,\overline{p} \leftrightarrow (q \vee p)]$$

κ.ο.κ.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι μεταβλητές $p, q, r, \ldots$ αντιπροσωπεύουν κάθε μία και μια συγκεκριμένη πρόταση $p_0, q_0, r_0, \ldots$ Τότε το πολυώνυμο Boole έχει και μια τιμή αλήθειας (παράβαλλε με την αριθμητική τιμή του αλγεβρικού πολυώνυμου)[11].

Ας θεωρήσουμε π.χ. το πολυώνυμο Boole

$$f(p, q) = p \vee (p \rightarrow q).$$

και τις προτάσεις p_0: «Η Αθήνα είναι στη Γαλλία» και q_0 «$2+2=4$». Τότε το πολυώνυμο Boole $f(p_0, q_0)$ διαβάζεται: «Η Αθήνα είναι στην Γαλλία, ή αν η Αθήνα είναι στην Γαλλία» τότε $2+2=4$».

Η εύρεση της τιμής αλήθειας μιας προτασιακής παράστασης προκύπτει από τους συνδυασμούς των τιμών αλήθειας των απλών προτάσεων που την απαρτίζουν και με τη χρήση πινάκων αλήθειας. Ο πίνακας αλήθειας για μια προτασιακή παράσταση που αποτελείται από n το πλήθος απλές προτάσεις θα περιέχει 2^n γραμμές. Στην περίπτωση όμως που οι τιμές αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών είναι δεδομένες τότε η τιμή αλήθειας μιας προτασιακής παράστασης ή ενός πολυωνύμου Boole βρίσκεται άμεσα και είναι μία και μοναδική. Όπως εύκολα διαπιστώνεται, η τιμή αλήθειας του παραπάνω πολυωνύμου Boole f (p, q) είναι (αληθής) και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

p	q	p	$\vee$	(p	$\rightarrow$	q)
F	T	F	**T**	F	T	T

Η χρήση των παρενθέσεων σε ένα πολυώνυμο Boole παίζει πρωταρχικό ρόλο. Ας θεωρήσουμε π.χ. το πολυώνυμα Boole $f(p,q) = p \vee \overline{p} \rightarrow q$. Το πολυώνυμο αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$f(p, q) = (p \vee \overline{p}\,) \rightarrow q \quad \text{ή} \quad f(p, q) = p \vee (\,\overline{p} \rightarrow q).$$

Τα δύο αυτά πολυώνυμα δεν περιγράφουν την ίδια σύνθετη πρόταση και προ-

11. Ο τρόπος με τον οποίο διαπιστώνεται η τιμή αλήθειας του πολυωνύμου Boole θα αναφερθεί αμέσως παρακάτω.

φανώς δεν έχουν και την ίδια τιμή αλήθειας για τις ίδιες τιμές των p και q. (Π.χ. αν οι προτάσεις p και q έχουν τιμές αλήθειας T και F αντίστοιχα, τότε το πρώτο έχει τιμή αλήθειας F και το δεύτερο τιμή αλήθειας T. Ουσιαστικά δηλαδή είναι δύο διαφορετικά πολυώνυμα. Και τούτο διότι πράξεις μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο μεταξύ δύο προτάσεων και επί πλέον *δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα μεταξύ προτάσεων που συνδέονται με διαφορετικούς συνδέσμους*. Επομένως με την χρήση των παρενθέσεων και αγκύλων το πολυώνυμο Boole γίνεται περισσότερο σαφές. Η χρήση όμως των παρενθέσεων θα πρέπει να γίνεται με φειδώ και μόνον όπου κρίνεται απόλυτα απαραίτητο. Είναι δυνατόν δηλαδή σε μερικές περιπτώσεις σε ένα πολυώνυμο Boole μερικές παρενθέσεις να παραλειφθούν και το πολυώνυμο Boole που σχηματίζεται να έχει την ίδια τιμή αλήθειας με το αρχικό. Για το σκοπό αυτό δεχόμαστε κάποιους κανόνες για την παράλειψη των περιττών παρενθέσεων σε ένα πολυώνυμο Boole.

i) Σε κάθε πολυώνυμο Boole στο οποίο υπάρχει ένα ζεύγος εξωτερικών παρενθέσεων μπορούμε να παραλείψουμε αυτές τις παρενθέσεις χωρίς τον κίνδυνο να μεταβληθεί η τιμή αλήθειας του.
Π.χ. αντί $f(p, q, r) = ((p \wedge q) \vee r)$ γράφουμε $f(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$.

ii) Αν σε ένα πολυώνυμο Boole δεν υπάρχουν παρενθέσεις τότε η τιμή αλήθειας του πολυωνύμου Boole βρίσκεται αφού τοποθετήσουμε παρενθέσεις εφαρμόζοντας την αρχή του προσεταιρισμού από τα αριστερά για κάθε διμελή σύνδεσμο.
Π.χ. το πολυώνυμο Boole $f(p,q,r) = p \wedge q \vee \overline{r}$ γράφεται $f(p,q,r) = (p \wedge q) \vee \overline{r}$.
Επίσης το πολυώνυμο Boole $f(p,q,r) = \big(((p \wedge (\overline{q})) \vee r) \rightarrow (\overline{p})\big)$ είναι ισοδύναμο με το $f(p, q, r) = ((p \wedge (\overline{q}) \vee r) \rightarrow \overline{p}$.

Παράδειγμα 1.2. Ας Θεωρούμε τις προτάσεις p: «Ένα byte έχει 7 bits», q: «Μία λέξη είναι 2 bytes» και r: «Ένα bit είναι 0 ή 1» . Να γραφούν με λέξεις οι παρακάτω συμβολικές προτάσεις[12] και να βρεθεί η τιμή αλήθειάς τους.

i) $p \wedge q$, **ii)** $p \vee q$, **iii)** $\sim p$, **iv)** $\sim(p \wedge q)$, **v)** $\sim p \vee \sim q$,

vi) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim(p \wedge q)]$.

Λύση:

Κατ' αρχάς διαπιστώνουμε ότι η πρόταση p είναι ψευδής (F) και οι q και r είναι αληθείς (T).

i) Ένα byte έχει 7 bits **και** μία λέξη είναι 2 bytes. (F)

12. Δηλαδή προτάσεις που είναι γραμμένες στη συμβολική Λογική.

ii) Ένα byte έχει 7 bits **ή** μία λέξη είναι 2 bytes. (T)

iii) Ένα byte **δεν** έχει 7 bits. (T)

iv) Δεν είναι αλήθεια ότι, ένα byte έχει 7 bits **και** μία λέξη είναι 2 bytes. (T)

v) Ένα byte ***δεν*** έχει 7 bits **ή** μία λέξη ***δεν*** είναι 2 bytes. (T)

vi) Ένα byte έχει 7 bits ***και*** μία λέξη είναι 2 bytes, ***ή*** ένα bit είναι 0 ή 1 ***και*** δεν είναι αλήθεια ότι, ένα byte έχει 7 bits *και* μία λέξη είναι 2 bytes. (T)

Παράδειγμα 1.3. Δίνονται οι προτάσεις p: «Ο Γιώργος είναι γιατρός» και q: «Ο Γιώργος είναι ψηλός». Να γραφούν οι παρακάτω προτάσεις σε συμβολική μορφή με τη χρήση των p και q.

i) Ο Γιώργος είναι γιατρός και ψηλός.

ii) Ο Γιώργος είναι γιατρός και δεν είναι ψηλός.

iii) Είναι λάθος ότι ο Γιώργος δεν είναι γιατρός ή ψηλός.

iv) Ο Γιώργος δεν είναι γιατρός και δεν είναι ψηλός.

v) Ο Γιώργος είναι γιατρός, ή ο Γιώργος δεν είναι γιατρός και ψηλός.

vi) Δεν είναι αλήθεια ότι, ο Γιώργος δεν είναι γιατρός ή δεν είναι ψηλός.

Λύση:

i)	$p \wedge q$	**iii)**	$\sim(\sim p \vee q)$	**v)**	$p \vee (\sim p \wedge q)$
ii)	$p \wedge \sim q$	**iv)**	$\sim p \wedge \sim q$	**vi)**	$\sim(\sim p \vee \sim q)$

Παράδειγμα 1.4. Να γραφεί ο πίνακας αλήθειας για το πολυώνυμο Boole[13]

$$f(p, q) = p \rightarrow (\sim p \wedge q).$$

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1.3 υπάρχουν δύο τρόποι για το σχηματισμό του. Ο δεύτερος τρόπος απαιτεί την εύρεση του πρωτεύοντα συνδέσμου του πολυωνύμου Boole, *δηλαδή του συνδέσμου εκείνου που καθορίζει τελικά την τιμή αλήθειας του πολυωνύμου*. Στο πολυώνυμο $f(p, q)$ πρωτεύον σύνδεσμος είναι ο $\rightarrow$. Με διαδοχικά βήματα καταλήγουμε στη στήλη 4 η οποία είναι και η τελική στήλη στην οποία φαίνονται οι τιμές αλήθειας του πολυωνύμου για τους διαφορετικούς συνδυασμούς των τιμών αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών. Είναι φανερό ότι για περισσότερο σύνθετα πολυώνυμα ο δεύτερος τρόπος χρειάζεται και λιγότερο χρόνο και καταλαμβάνει λιγότερο χώρο.

13. Ή προτασιακή παράσταση.

Πίνακας 1.3.

p	q	~p	~p∧q	p→(~p∧q)
T	T	F	F	**F**
T	F	F	F	**F**
F	T	T	T	**T**
F	F	T	F	**T**

1^{ος} Τρόπος

p	q	p	→	~	p	∧	q
T	T	T	**F**	F	T	F	T
T	F	T	**F**	F	T	F	F
F	T	F	**T**	T	F	T	T
F	F	F	**T**	T	F	F	F
		1	**4**	2	1	3	1

2^{ος} Τρόπος

Παράδειγμα 1.5. Ομοίως για το πολυώνυμο Boole

$$f(p,q,r) = [(p \wedge q) \vee \sim r] \leftrightarrow (\sim q \rightarrow r).$$

Πίνακας 1.4.

p	q	r	[(p	∧	q)	∨	~	r]	**↔**	(~	q	→	r)
T	T	T	T	T	T	T	F	T	**T**	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F	**T**	F	T	T	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	**F**	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T	F	**F**	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	**T**	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T	F	**T**	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	F	F	T	**F**	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F	**F**	T	F	F	F
			1	2	1	3	2	1	**4**	2	1	3	1

1.1.4. Ταυτολογία - Αντίφαση

Κατά τη δημιουργία των πινάκων αλήθειας για προτασιακές παραστάσεις προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Ας θεωρήσουμε προς τούτο τον πίνακα αλήθειας της προτασιακής παράστασης $P(p,q) = (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$.

Πίνακας 1.5.

p	*q*	*(p*	∧	*q)*	**∨**	(~	*P*	∨	~	*q)*
T	*T*	*T*	*T*	*T*	***T***	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	***T***	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*
F	*T*	*F*	*F*	*T*	***T***	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	***T***	*T*	*F*	*T*	*T*	*F*
		1	3	1	**4**	2	1	3	2	1

Από τη στήλη 4 παρατηρούμε ότι οι τιμές αλήθειας της P, για οποιονδήποτε συνδυασμό των τιμών αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών, είναι αληθείς. Προτασιακές παραστάσεις με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται ταυτολογίες. Άρα:

Ορισμός 1.3. *Μια προτασιακή παράσταση* $P(p, q,\ldots)$ *ονομάζεται* ***ταυτολογία*** *(tautology) αν η* $P(p_0, q_0,\ldots)$ *είναι αληθής για κάθε πρόταση* $p_0, q_0, \ldots$.

Οι ταυτολογίες είναι ενδιαφέρουσες προτασιακές παραστάσεις γιατί η αλήθειά τους δεν εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των προτάσεων που τις απαρτίζουν, αλλά από τον τρόπο που συνδέονται μεταξύ τους προκειμένου να σχηματίσουν τη συγκεκριμένη προτασιακή παράσταση. Άρα, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές p, $q\ldots$ με τις προτασιακές παραστάσεις $P_1, P_2, \ldots$ η προτασιακή παράσταση που προκύπτει συνεχίζει να είναι ταυτολογία.

Για τις προτασιακές παραστάσεις ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.1. *Αν η προτασιακή παράσταση* $P(p, q, \ldots)$ *είναι ταυτολογία τότε είναι ταυτολογία και η προτασιακή παράσταση* $P(P_1, P_2, \ldots)$, *όπου* $P_1, P_2, \ldots$ *είναι προτασιακές παραστάσεις.*

Παράδειγμα 1.6. Αν στην προτασιακή παράσταση $P(p, q)$ αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή *q* με την προτασιακή παράσταση $P_1(p, r) = q \to r$, από τον πίνακα αλήθειας 1.5 στήλη 6 παρατηρούμε ότι και η νέα προτασιακή παράσταση

$$P(p, r) = [p \wedge (q \to r) \vee [\sim p \vee \sim (q \to r)]$$

είναι ταυτολογία.

Πίνακας 1.6.

p	q	r	[p	∧	(q	→	r)]	∨	[~	p	∨	~	(q	→	r)]
T	T	T	T	T	T	T	T	**T**	F	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	**T**	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	**T**	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	**T**	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	**T**	T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F	**T**	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T	**T**	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F	**T**	T	F	T	F	F	T	F
			1	5	1	3	1	**6**	2	1	5	4	1	3	1

Κεφάλαιο 7

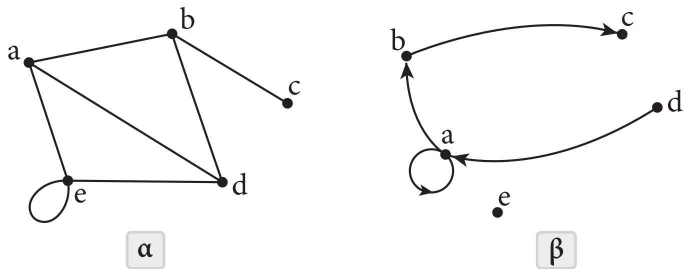
Θεωρία Γραφημάτων

Η χρησιμοποίηση διαγραμμάτων στη λύση προβλημάτων έχει συνδεθεί, κυρίως, με τη γραφική παράσταση συναρτήσεων σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα αποσυνδεμένα από συστήματα συντεταγμένων προκειμένου να απεικονίσουμε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων τα οποία ανήκουν είτε σε διάφορα επιστημονικά πεδία, είτε προκύπτουν από την καθημερινή πραγματικότητα.

Με ένα τέτοιο διάγραμμα μπορεί να απεικονισθεί π.χ. ένα τμήμα ενός γεωγραφικού χάρτη στον οποίο φαίνονται οι πόλεις και οι δρόμοι που τις συνδέουν και που μπορεί να είναι μονής (κατευθυνόμενης ή όχι) ή διπλής κατεύθυνσης. Αυτό το διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. για τη μελέτη του προβλήματος του *περιοδεύοντος πωλητή* (traveling salesman problem) ή για να οργανωθούν με το βέλτιστο τρόπο τα δρομολόγια αεροπλάνων, λεωφορείων κ.λπ. Στο διάγραμμα αυτό το σύνολο των πόλεων παριστάνεται με τελείες ή μικρούς κύκλους, ενώ το σύνολο των δρόμων με γραμμές (ευθείες ή καμπύλες). Με ένα αντίστοιχο διάγραμμα είναι δυνατόν να παρασταθεί το δίκτυο μιας τηλεφωνικής εταιρείας, όπου με τελείες παριστάνονται τα διάφορα κέντρα της και με γραμμές τα καλώδια που τα συνδέουν. Παραδείγματα τέτοιων διαγραμμάτων φαίνονται στο σχήμα 7.1.

Στα διαγράμματα αυτά είναι δυνατόν δύο σημεία να συνδέονται με μία ή περισσότερες γραμμές, όπως είναι δυνατόν μια «διαδρομή» (δηλαδή μια γραμμή από σημείο σε σημείο) να είναι με επιστροφή ή χωρίς επιστροφή. Στη δεύτερη περίπτωση η διαδρομή θα λέγεται **κατευθυνόμενη** (directed) και η αντίστοιχη γραμμή θα φέρει στο ένα άκρο της ένα βέλος. Η επιλογή μιας από τις δύο δυνατές κατευθύνσεις τής διαδρομής καθιστά τη διαδρομή **προσανατολισμένη** (oriented). Τέλος είναι δυνατόν να υπάρχει αφενός μεν σημείο (ή σημεία) το οποίο δε συνδέεται με τα άλλα σημεία, αφετέρου δε σημείο (ή σημεία) από το οποίο ξεκινάει μια διαδρομή και καταλήγει στο ίδιο.



Σχήμα 7.1.

Για τη λύση πολλών προβλημάτων, όπως αυτά που αναφέρθηκαν πιο πάνω, ορίζονται Μαθηματικές Δομές οι οποίες ονομάζονται **γραφήματα** ή **γράφοι**[147] (graphs). Συνήθως ένα γράφημα παριστάνεται με ένα διάγραμμα (γραφική παράσταση). Και τούτο γιατί η γραφική παράσταση των δομών αυτών μας διευκολύνει να καταλάβουμε και να ερμηνεύσουμε πολλές από τις ιδιότητές τους. Στα επόμενα με τον όρο γράφημα θα εννοούμε, αφενός μεν μια μαθηματική δομή, αφετέρου δε το αντίστοιχο διάγραμμά της.

Στη γραφική παράσταση ενός γραφήματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο **σημείων** (points) τα οποία ονομάζονται και **κορυφές** (vertices) ή **κόμβοι** (nodes), όπου μερικά ή όλα συνδέονται με **γραμμές** (lines) οι οποίες ονομάζονται **ακμές** (edges) ή **τόξα** (arcs)[148]. Οι κορυφές συνήθως συμβολίζονται με τα γράμματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, ή $u_1, u_2, \ldots, u_n$ κ.ο.κ., ενώ οι ακμές συμβολίζονται με τα γράμματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Στην επιστήμη της Πληροφορικής μεγάλη είναι η συμβολή των γραφημάτων στην αντιμετώπιση και επίλυση πολλών προβλημάτων. Επίσης τα γραφήματα χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση προβλημάτων άλλων επιστημών. Ενδεικτικά, χρήση γραφημάτων γίνεται π.χ. σε προβλήματα που αναφέρονται σε ***σιδηροδρομικά δίκτυα*** (rail networks), σε ***δίκτυα υπολογιστών*** (computer networks), σε ***ηλεκτρικά δίκτυα*** (electric networks), σε ***χημικά ισομερή*** (chemical

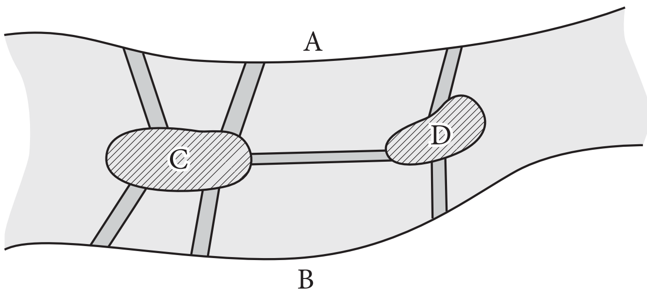
147. Ο όρος **γράφος**, που είναι προφανώς εξελληνισμένος ο αγγλικός όρος graph, αναφέρεται από μερικούς συγγραφείς χωρίς να υπάρχει στη ελληνική γλώσσα αντίστοιχος όρος. Αντίθετα, υπάρχει ο ελληνικός όρος **γράφημα** που θα χρησιμοποιείται στα επόμενα. Βλ. Λεξικό Μπαμπινιώτη.

148. Η συγκεκριμένη σειρά γραφής των χαρακτηριστικών ενός γραφήματος αποτελεί (συνήθως) και την ανά ζεύγη αναφορά τους (π.χ. κορυφή - ακμή) κατά τη μελέτη των γραφημάτων. Το ζεύγος κορυφή - ακμή θα χρησιμοποιείται και στα επόμενα.

isomers), στον ***προγραμματισμό εργασιών*** (job schedules), σε ***δομές δεδομένων*** (data structures) κ.α.

Επισημαίνεται ότι για να είναι αποτελεσματική η χρήση των γραφημάτων θα πρέπει, αφενός μεν πολλά προβλήματα που απεικονίζονται με διαγράμματα να μπορούν να περιγραφούν από μαθηματικές δομές, και αφετέρου, αν είναι δυνατόν, τα προβλήματα αυτά να μπορούν να επεξεργασθούν από Η/Υ. Επίσης, είναι γεγονός ότι μερικές φορές οι δομές είναι τόσο πολύπλοκες, ώστε είναι πολύ δύσκολο να δοθεί γραφική αναπαράσταση των προβλημάτων τα οποία περιγράφουν.

Ιστορικά η μελέτη των γραφημάτων ξεκίνησε το 1736 από το Leonard Euler με αφορμή το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg. Στην πόλη του Königsberg (σήμερα Kaliningrad) της Πρωσίας υπήρχαν εφτά γέφυρες που ένωναν τέσσερις περιοχές A, B, C, D που χωρίζονταν από τον ποταμό Pregel (Σχ. 7.2).

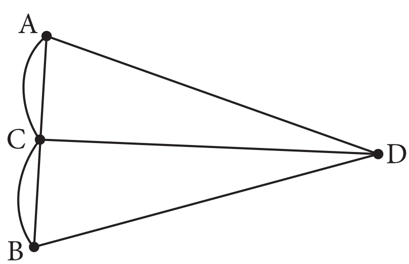


Σχήμα 7.2.

Το πρόβλημα που ετέθη ήταν το εξής:

«Είναι δυνατόν κάποιος να επισκεφθεί και τις τέσσερις περιοχές με την προϋπόθεση ότι θα διέλθει από όλες τις γέφυρες μόνο μία φορά;».

Ο Euler για να βοηθηθεί στη λύση του προβλήματος αυτού δημιούργησε το γράφημα που φαίνεται στο σχήμα 7.3.



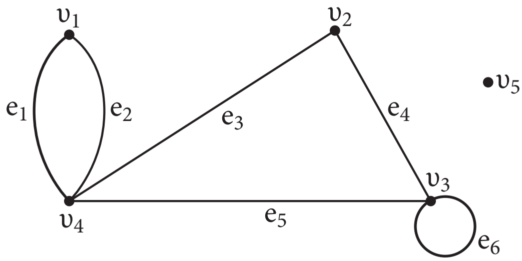
Σχήμα 7.3.

Με τη λύση του προβλήματος αυτού θα ασχοληθούμε στα επόμενα.

7.1 Γενικοί ορισμοί

Πριν από τον ορισμό του γραφήματος, χρήσιμο είναι να αναφέρουμε και να υπενθυμίσουμε τα εξής: Στην §2.1.1(ii) αναφέρεται ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι διακεκριμένα. Δηλαδή κάθε στοιχείο ενός συνόλου θα πρέπει να αναφέρεται μόνο μία φορά. Αν όμως για κάποιο λόγο ένα στοιχείο θα πρέπει να επαναληφθεί, τότε η συλλογή αυτή ονομάζεται **πολυσύνολο** (multiset). Π.χ. το πολυσύνολο των πρώτων παραγόντων του αριθμού 12 είναι {2, 2, 3}, ενώ το αντίστοιχο σύνολο είναι {2, 3}. Επίσης, θα πρέπει να γίνει αναφορά και στο διατεταγμένο ζεύγος. Είναι γνωστό (§2.1.3) ότι αν ένα ζεύγος (u, υ) είναι διατεταγμένο ισχύει $(u_1, \upsilon_1) = (u_2, \upsilon_2)$ ανν[149] $u_1 = u_2$ και $\upsilon_1 = \upsilon_2$. Στην αντίθετη περίπτωση το διμελές σύνολο {u, υ} αποτελεί ένα μη διατεταγμένο ζεύγος και ισχύει {u, υ} = {υ, u}.

Ας θεωρήσουμε τώρα το γράφημα του σχήματος 7.4.



Σχήμα 7.4.

Το παραπάνω γράφημα αποτελείται από τις πέντε κορυφές υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 ,υ_5 και τις έξι ακμές e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6. Όπως φαίνεται από το σχήμα δύο κορυφές προσδιορίζουν μία ή περισσότερες ακμές. Κάθε ακμή συμβολίζεται $e_k = \{\upsilon_i, \upsilon_j\}$ ανεξάρτητα αν $i \neq j$ ή $i = j$. Δηλαδή ένα ζεύγος κορυφών ορίζει τουλάχιστον μία ακμή. Είναι δυνατόν όμως και μία κορυφή, όπως π.χ. η υ_3, να ορίζει τουλάχιστον μία ακμή. Επίσης υπάρχει και κορυφή, η υ_5, από την οποία δεν ξεκινά ή δεν καταλήγει σε αυτήν ακμή.

Δύο κορυφές ονομάζονται **γειτονικές** (adjacent vertices)[150] αν ενώνονται με μία ακμή. Π.χ. οι κορυφές υ_2 και υ_4 που ενώνονται με την ακμή e_3. Οι κορυφές υ_2 και υ_4 λέμε ότι είναι **προσπίπτουσες** (incident vertices) στην ακμή e_3 και η ακμή e_3 είναι προσπίπτουσα και στις δύο κορυφές υ_2 και υ_4. Οι κορυφές υ_2 και υ_4 ονομά-

149. Ανν = αν και μόνο αν.

150. Επισημαίνεται ότι στη μελέτη των γραφημάτων η ορολογία δεν είναι σταθερή και ο αναγνώστης **είναι δυνατόν** να βρει διαφορές από βιβλίο σε βιβλίο. Επισημαίνεται επίσης στον αναγνώστη να δώσει την απαραίτητη προσοχή στους αγγλικούς όρους της ορολογίας.

ζονται **άκρα** (endpoints) της ακμής e_3. Αν δύο διακεκριμένες ακμές είναι προσπίπτουσες στην ίδια κορυφή ονομάζονται προσπίπτουσες ακμές, όπως π.χ. οι ακμές e_3 και e_4 είναι προσπίπτουσες στην κορυφή $υ_2$. Δύο ή περισσότερες ακμές που ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών ονομάζονται **πολλαπλές ακμές** (multiple edges), όπως π.χ. οι ακμές e_1 και e_2. Αν μία ακμή έχει ως άκρα την ίδια κορυφή, όπως π.χ. η ακμή e_6, ονομάζεται **βρόχος** (loop). Η κορυφή $υ_5$ που δεν είναι άκρο καμίας ακμής ονομάζεται **μεμονωμένη** (isolated vertex). Τέλος ένα γράφημα ονομάζεται **πεπερασμένο** (finite graph) αν και το πλήθος των κορυφών του (σύνολο V) και το πλήθος των ακμών του (σύνολο E) είναι πεπερασμένα. (Στα επόμενα θα ασχοληθούμε κυρίως με πεπερασμένα γραφήματα).

7.2 Ορισμός του γραφήματος

7.2.1. Μη Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός 7.1. *Θεωρούμε*:

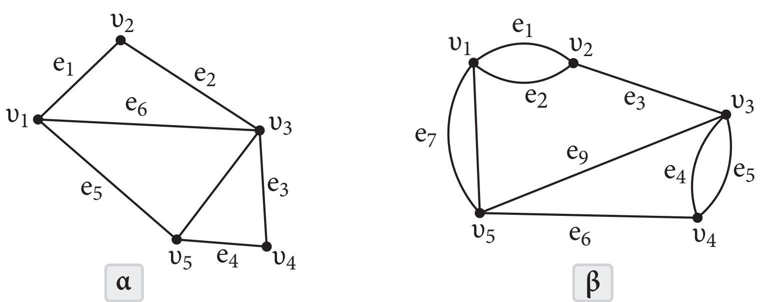
i) *Ένα μη κενό σύνολο* V *τα στοιχεία του οποίου είναι σημεία και ονομάζονται* ***κορυφές***.

ii) *Ένα μη κενό σύνολο ή πολυσύνολο Ε με στοιχεία τα μη διατεταγμένα ζεύγη* $\{υ_i, υ_j\}$, $υ_i, υ_j \in V$ *του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται* ***ακμές***.

Το ζεύγος $G=(V,E)$ *ή* $G(V,E)$ *ονομάζεται* ***μη κατευθυνόμενο γράφημα*** *(undirected graph) στο σύνολο* V.

Τα γραφήματα ταξινομούνται στις παρακάτω κατηγορίες:

α) Το Ε είναι ένα σύνολο με στοιχεία τα μη διατεταγμένα ζεύγη $\{υ_i, υ_j\}$, όπου $υ_i \neq υ_j$ $\forall i, j$. Τότε το γράφημα ονομάζεται **απλό** (simple graph). Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.5α ένα απλό γράφημα δεν έχει ούτε πολλαπλές ακμές ούτε βρόχους.



Σχήμα 7.5.

β) Το Ε είναι ένα πολυσύνολο με στοιχεία τα μη διατεταγμένα ζεύγη $\{\upsilon_i, \upsilon_j\}$, όπου $\upsilon_i \neq \upsilon_j$, $\forall i, j$. Τότε το γράφημα ονομάζεται **πολυγράφημα** (multigraph). Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.5β ένα πολυγράφημα έχει πολλαπλές ακμές όχι όμως βρόχους.

γ) Εάν ισχύει το (β) εκτός από την απαίτηση $\upsilon_\iota \neq \upsilon_j$, $\forall i,j$, τότε το γράφημα ονομάζεται **ψευδογράφημα** (pseudograph) ή **γενικό γράφημα** (general graph). Στην περίπτωση αυτή το γράφημα επιτρέπεται να έχει πολλαπλές ακμές ή/και βρόχους (σχήμα 7.4).

Παρατηρήσεις – Παραδείγματα

1. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ μπορεί να ταξινομηθεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$i: E \to \{\{\upsilon_i, \upsilon_j\} / \upsilon_i, \upsilon_j \in V\},$$

η οποία ονομάζεται **προσπίπτουσα συνάρτηση** (incidence function). Έτσι:

α) Αν η συνάρτηση i είναι ένα προς ένα (1-1) και $\upsilon_\iota \neq \upsilon_j$, $\upsilon_i, \upsilon_j \in V$ ενώ το σύνολο Ε είναι ένα σύνολο, τότε το γράφημα G το οποίο τώρα μπορεί να γραφεί $G = (V, E, i)$, ονομάζεται **απλό γράφημα**.

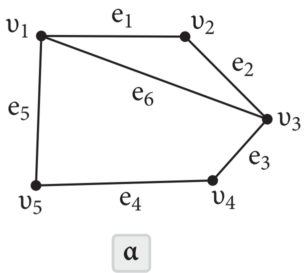
β) Αν η συνάρτηση i είναι πλειονότιμη και $\upsilon_i \neq \upsilon_j$, $\upsilon_i, \upsilon_j \in V$, ενώ το σύνολο Ε είναι ένα πολυσύνολο, τότε το γράφημα G ονομάζεται **πολυγράφημα**.

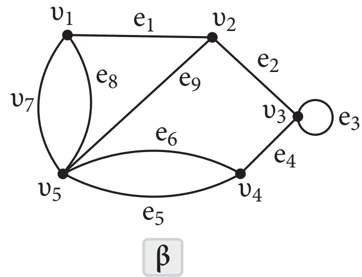
γ) Αν η συνάρτηση i είναι πλειονότιμη και τα στοιχεία $\upsilon_i, \upsilon_j \in V$ δεν είναι υποχρεωτικά όλα διακριτά μεταξύ τους, τότε το γράφημα G ονομάζεται **ψευδογράφημα** ή **γενικό γράφημα**.

2. Η ταξινόμηση των γραφημάτων στις τρεις κατηγορίες δε γίνεται πάντοτε. Ορισμένοι δηλαδή συγγραφείς ταξινομούν τα γραφήματα στις κατηγορίες (α) και (β). Σε αυτήν την περίπτωση και το απλό γράφημα και το πολυγράφημα είναι δυνατόν να περιέχουν βρόχους.

3. Στα επόμενα, αν δεν απαιτείται λεπτομερής αναφορά, με τον όρο γράφημα θα αναφερόμαστε είτε σε απλό γράφημα είτε σε πολυγράφημα είτε σε ψευδογράφημα.

4. Δίνονται τα γραφήματα του σχήματος 7.6. Να ταξινομηθούν (με επαρκή δικαιολόγηση) τα γραφήματα αυτά και να βρεθούν τα αντίστοιχα σύνολα V και Ε.





Σχήμα 7.6.

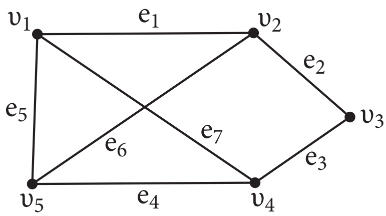
Λύση: **i)** Το γράφημα (α) είναι ένα απλό γράφημα, γιατί δεν περιέχει ούτε πολλαπλές ακμές ούτε βρόχους. Επίσης είναι

$$V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\} \text{ και } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

όπου $e_1 = \{\upsilon_1, \upsilon_2\}$, $e_2 = \{\upsilon_2, \upsilon_3\}$, $e_3 = \{\upsilon_3, \upsilon_4\}$, $e_4 = \{\upsilon_4, \upsilon_5\}$, $e_5 = \{\upsilon_5, \upsilon_1\}$, $e_6 = \{\upsilon_1, \upsilon_3\}$.

ii) Το γράφημα (β) είναι ένα ψευδογράφημα, γιατί περιέχει και πολλαπλές ακμές και το βρόχο e_3. (Αν δεν υπήρχε ο βρόχος e_3, το γράφημα αυτό θα ήταν ένα πολυγράφημα). Τα σύνολα V και E είναι εύκολο να βρεθούν.

5. Ας θεωρήσουμε το γράφημα του σχήματος 7.7. Στο γράφημα αυτό οι ακμές e_6 και e_7 **φαίνεται** να τέμνονται αλλά η τομή τους δεν αποτελεί κορυφή του γραφήματος. Τούτο σημαίνει ότι οι ακμές αυτές δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τέτοια γραφήματα ονομάζονται **μη επίπεδα**. (Για λεπτομέρειες βλ. §7.11).



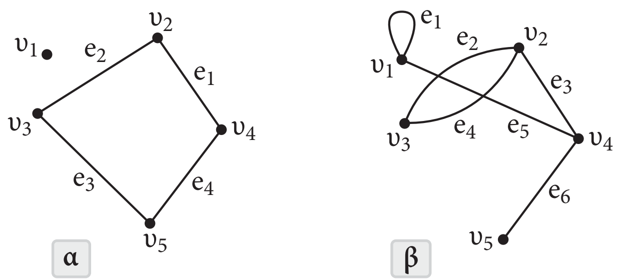
Σχήμα 7.7.

6. Να σχεδιασθούν τα γραφήματα $G = (V, E)$ όπου $V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\}$ και,

α) $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, όπου $e_1 = \{\upsilon_2, \upsilon_4\}$, $e_2 = \{\upsilon_2, \upsilon_3\}$, $e_3 = \{\upsilon_3, \upsilon_5\}$ και $e_4 = \{\upsilon_5, \upsilon_4\}$.

β) $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, όπου $e_1 = \{\upsilon_1, \upsilon_1\}$, $e_2 = \{\upsilon_2, \upsilon_3\}$, $e_3 = \{\upsilon_2, \upsilon_4\}$, $e_4 = \{\upsilon_3, \upsilon_2\}$, $e_5 = \{\upsilon_4, \upsilon_1\}$, και $e_6 = \{\upsilon_5, \upsilon_4\}$.

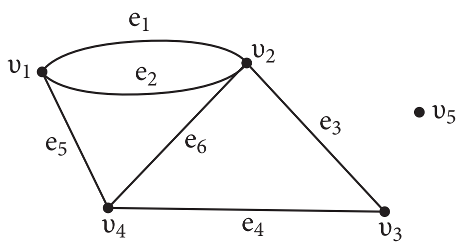
Λύση: Τα γραφήματα αυτά φαίνονται στο σχήμα 7.8.



Σχήμα 7.8.

7. Να βρεθούν τα σύνολα V και E του γραφήματος του σχήματος 7.9 .

Λύση: Το γράφημα αυτό έχει πέντε κορυφές, τις υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 και υ_5, εκ των οποίων η υ_5 είναι μεμονωμένη, και έξι ακμές τις $e_1 = \{\upsilon_1, \upsilon_2\}$, $e_2 = \{\upsilon_1, \upsilon_2\}$, $e_3 = \{\upsilon_2, \upsilon_3\}$, $e_4 = \{\upsilon_3, \upsilon_4\}$, $e_5 = \{\upsilon_4, \upsilon_1\}$, $e_6 = \{\upsilon_4, \upsilon_2\}$. Άρα τα σύνολα V και E είναι $V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\}$ και $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



Σχήμα 7.9.

7.2.2. Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Μια ιδιαίτερη κατηγορία γραφημάτων είναι εκείνα τα γραφήματα που ονομάζονται **κατευθυνόμενα γραφήματα** (directed graphs) ή **διγραφήματα** (digraphs). Η βασική διαφορά ενός κατευθυνόμενου γραφήματος από ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι, ότι στο πρώτο λαμβάνεται υπόψη και η φορά διαγραφής ή ο **προσανατολισμός** (orientation) των ακμών του.

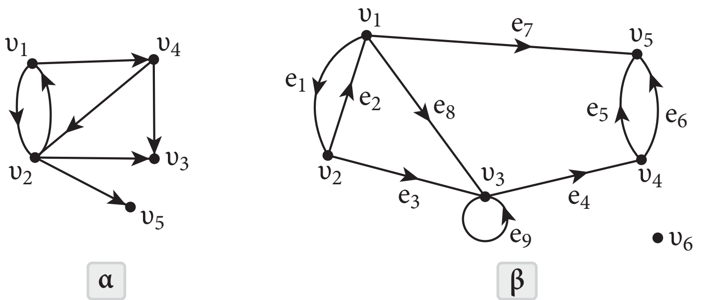
Ορισμός 7.2. *Θεωρούμε:*

i) *Ένα μη κενό σύνολο V τα στοιχεία του οποίου είναι σημεία και ονομάζονται* ***κορυφές****.*

ii) *Ένα μη κενό σύνολο ή πολυσύνολο E με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη* (υ_i, υ_j), $\upsilon_i, \upsilon_j \in V$ *του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται* ***κατευθυνόμενες ακμές*** *(directed edges) ή* ***τόξα****.*

Το ζεύγος $G_D = (V, E)$ *ή* $G_D(V, E)$ *ονομάζεται* ***κατευθυνόμενο γράφημα***[151] *στο σύνολο* V.

Ας θεωρήσουμε το διγράφημα του σχήματος 7.10. Στο διγράφημα αυτό οι κορυφές υ_1 και υ_5 που είναι προσπίπτουσες στο τόξο e_7 ονομάζονται **αρχή** (origin) ή **αρχικό σημείο** (initial point) και **τέρμα** ή **τέλος** (terminus) ή **τελικό σημείο** (terminal point) του τόξου αντίστοιχα. Γράφουμε $e_7 = (\upsilon_1, \upsilon_5)$ και λέμε ότι το τόξο e_7 είναι ένα τόξο από την κορυφή υ_1 προς την κορυφή υ_5, η κορυφή υ_1 είναι γειτονική προς την κορυφή υ_5, η κορυφή υ_5 είναι γειτονική από την κορυφή υ_1, το τόξο e_7 είναι προσπίπτον από την κορυφή υ_1 και το τόξο e_7 είναι προσπίπτον στην κορυφή υ_5. Τα πολλαπλά τόξα, όπως π.χ. τα e_5 και e_6 με ίδια αρχή και τέλος τις κορυφές υ_4 και υ_5 αντίστοιχα καθώς και ίδιο προσανατολισμό ονομάζονται **παράλληλα τόξα** (parallel arcs). Αντίθετα τα τόξα e_1 και e_2 αν και είναι προσπίπτοντα στις ίδιες κορυφές υ_1 και υ_2, εντούτοις δεν είναι παράλληλα γιατί δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Το τόξο e_9 που έχει ως αρχή και τέλος την ίδια κορυφή υ_3 ονομάζεται βρόχος, ενώ η κορυφή υ_6 είναι μεμονωμένη[152].



Σχήμα 7.10.

Τα κατευθυνόμενα γραφήματα ταξινομούνται ως εξής:

α) Το Ε είναι ένα σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (υ_i, υ_j), όπου $\upsilon_i \neq \upsilon_j$, $\forall i, j$. Τότε το γράφημα θα ονομάζεται απλά **κατευθυνόμενο γράφημα** ή **διγράφημα**. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.10(α) ένα διγράφημα δεν έχει ούτε παράλληλα τόξα ούτε βρόχους.

β) Το *E* είναι ένα πολυσύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (υ_i, υ_j), όπου $\upsilon_i \neq \upsilon_j, \forall i, j$. Στην περίπτωση αυτή το διγράφημα θα περιέχει παράλληλα τόξα.

151. Για να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ του μη κατευθυνόμενου και του κατευθυνόμενου γραφήματος, όταν πρόκειται για μη κατευθυνόμενο γράφημα θα αναφέρεται (απλά) ο όρος γράφημα.

152. Είναι φανερό ότι οι προηγούμενοι ορισμοί που αφορούν τις κορυφές και τις ακμές ισχύουν και στα κατευθυνόμενα γραφήματα, με τις κατάλληλες αναγωγές φυσικά.

Αν επί πλέον περιέχει και βρόχους, τότε το γράφημα θα αναφέρεται ως **διγράφημα με παράλληλες ακμές και βρόχους** (βλ. σχήμα 7.10 (β)).

Σημείωση 7.1. Πολλοί συγγραφείς εξ ορισμού δεν δέχονται διγραφήματα με παράλληλα τόξα και βρόχους.

Σε ένα διγράφημα για κάθε κορυφή υ ορίζονται:

i) Το σύνολο των **προηγούμενων κορυφών** (previous vertices)

$$V^{-}(\upsilon) = \{u \,/\, (u, \upsilon) \in E\},$$

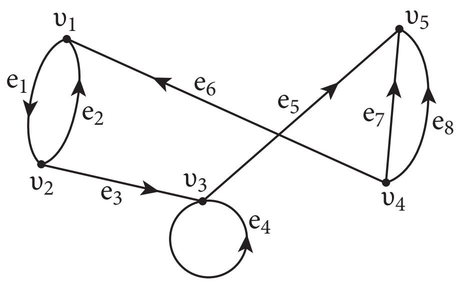
ii) Το σύνολο των **επόμενων κορυφών** (next vertices)

$$V^{+}(\upsilon) = \{u \,/\, (\upsilon, u) \in E\}.$$

Ειδικότερα, αν σε μια κορυφή υπάρχει βρόχος αυτή η κορυφή θεωρείται συγχρόνως και ως προηγούμενη και ως επόμενη.

Σημείωση 7.2. Σε αρκετές περιπτώσεις θα είναι απαραίτητο να αναφερθούμε σ' ένα γράφημα το οποίο θα προκύπτει από ένα διγράφημα στο οποίο θα πρέπει να αγνοήσουμε τον προσανατολισμό των τόξων του. Ένα τέτοιο γράφημα θα ονομάζεται **υποκείμενο γράφημα** (underlying graph) του διγραφήματος.

Παράδειγμα 7.1. Δίνεται το διγράφημα του σχήματος 7.11. Να βρεθούν τα σύνολα V και E.



Σχήμα 7.11.

Λύση: Έχουμε: $V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\}$ και $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$,

όπου $e_1 = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, $e_2 = (\upsilon_2, \upsilon_1)$, $e_3 = (\upsilon_2, \upsilon_3)$, $e_4 = (\upsilon_3, \upsilon_3)$, $e_5 = (\upsilon_3, \upsilon_5)$, $e_6 = (\upsilon_4, \upsilon_1)$, $e_7 = (\upsilon_4, \upsilon_5)$, $e_8 = (\upsilon_4, \upsilon_5)$.

7.3 Βαθμός κορυφής

Δίνεται το μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$.

Ορισμός 7.3. ***Βαθμός της κορυφής*** $\boldsymbol{\upsilon \in V}$ (*degree of the vertex* υ), *που συμβολίζεται* $\mathbf{deg(\upsilon)}$[153], *είναι ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή* υ.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, μια κορυφή ονομάζεται **άρτια** (even vertex) ή **περιττή** (odd vertex) αν ο βαθμός της είναι άρτιος ή περιττός αριθμός αντίστοιχα. Η ιδιότητα αυτή της κορυφής αποδίδεται από τον όρο **ισοτιμία(;)** (parity). Επίσης, μια κορυφή υ ονομάζεται **μεμονωμένη** (isolated vertex) αν $\deg(\upsilon)=0$, ενώ αν $\deg(\upsilon)=1$ ονομάζεται **τελική ή τερματική κορυφή ή άκρο** (pendant vertex).

Παράδειγμα 7.2. Στο γράφημα του σχήματος 7.9 έχουμε

$$\deg(\upsilon_1)=3,\ \deg(\upsilon_2)=4,\ \deg(\upsilon_4)=3,\ \deg(\upsilon_5)=0.$$

Σημείωση 7.3. Στην περίπτωση που το γράφημα περιέχει βρόχους, τότε ο βρόχος μετράται διπλά. Έτσι αν θεωρήσουμε το σχήμα 7.8(β) είναι $\deg(\upsilon_1)=3$.

Για το βαθμό κορυφής ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.1. *Αν* $G=(V,E)$ *είναι ένα πολυγράφημα, τότε το άθροισμα* m *των βαθμών των κορυφών του είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών*[154] *του, δηλαδή*

$$m=\sum_{\upsilon\in V}\deg(\upsilon)=2|E|. \tag{7.1}$$

Απόδειξη: Προφανώς, γιατί κάθε ακμή μετράται διπλά επειδή είναι προσκείμενη συγχρόνως σε δύο κορυφές του γραφήματος.

Από το θεώρημα 7.1 προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 7.1. *Ο αριθμός των περιττών κορυφών ενός πολυγραφήματος είναι άρτιος.*

Απόδειξη: Από τον τύπο (7.1) έχουμε

$$m=\sum_{\upsilon\in V}d(\upsilon)=\sum_{\upsilon=\text{άρτια}}d(\upsilon)+\sum_{\upsilon=\text{περιττή}}d(\upsilon)=2|E|$$

---

153. Ή $d(\upsilon)$

154. Αν το γράφημα έχει βρόχους αυτοί μετρώνται διπλά.

ή

$$\sum_{\upsilon=\text{περιττή}} d(\upsilon) = 2|E| - \sum_{\upsilon=\text{άρτια}} d(\upsilon).$$

Επειδή οι αριθμοί $2|E|$ και $\sum_{\upsilon=\text{άρτια}} d(\upsilon)$ είναι άρτιοι, προκύπτει ότι το άθροισμα $\sum_{\upsilon=\text{περιττή}} d(\upsilon)$ είναι άρτιος αριθμός. Αλλά, επειδή κάθε κορυφή υ είναι περιττή, για να είναι το άθροισμα $\sum_{\upsilon=\text{περιττή}} d(\upsilon)$ άρτιος αριθμός, θα πρέπει ο αριθμός των περιττών κορυφών να είναι άρτιος.

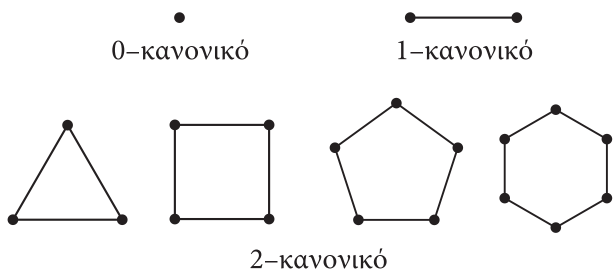
Ορισμός 7.4. *Το απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα* $G=(V,E)$ *που όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό ονομάζεται* ***κανονικό*** *(regular graph). Ειδικότερα κάθε γράφημα* $G=(V, E)$ *για το οποίο συμβαίνει* $\deg(\upsilon)=k$, $\forall \upsilon \in V$ *ονομάζεται* ***k–κανονικό*** *(k–regular graph).*

Αν επομένως ένα γράφημα $G=(V, E)$ είναι $k-$κανονικό, τότε από τον τύπο (7.1) προκύπτει ότι

$$2|E| = k|V| . \tag{7.2}$$

Παράδειγμα 7.3. Να σχεδιασθούν και να περιγραφούν τα $0,1,2-$κανονικά γραφήματα.

Λύση: Τα γραφήματα αυτά φαίνονται στο σχήμα 7.12.

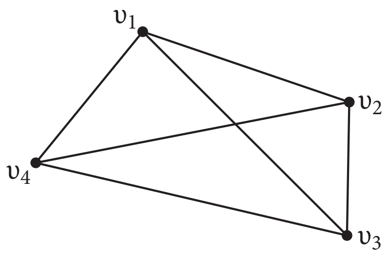


Σχήμα 7.12.

Παράδειγμα 7.4. Ένα γράφημα $G=(V,E)$ που είναι $3-$κανονικό με 4 κορυφές θα έχει 6 ακμές. Πραγματικά από τον τύπο (7.2) προκύπτει ότι

$$2|E| = 3|V| \text{ ή } 2|E| = 3 \cdot 4 = 12 \text{ ή } |E| = 6$$

και είναι το γράφημα του σχήματος 7.13.



Σχήμα 7.13.

Παράδειγμα 7.5. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, ένα 4–κανονικό γράφημα με 10 ακμές και ένα 3–κανονικό γράφημα με 8 ακμές.

Λύση: Έχουμε:

α) $2|E| = 2{\cdot}10 = 20 = 4|V|$ ή $|V| = 5$.

Άρα υπάρχει τέτοιο γράφημα και έχει 5 κορυφές.

β) $2|E| = 2{\cdot}8 = 16 = 3|V|$ ή $|V| = \frac{16}{3}$.

Επειδή ο αριθμός $|V| = \frac{16}{3}$ δεν είναι ακέραιος, δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

Παράδειγμα 7.6. Θεωρούμε το γράφημα $G=(V,E)$, όπου $V=\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4\}$ και $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, με $e_1=\{\upsilon_1, \upsilon_3\}$, $e_2=\{\upsilon_1, \upsilon_4\}$, $e_3=\{\upsilon_2, \upsilon_2\}$, $e_4=\{\upsilon_2, \upsilon_3\}$, $e_5=\{\upsilon_3, \upsilon_1\}$, $e_6=\{\upsilon_3, \upsilon_2\}$, $e_7=\{\upsilon_4, \upsilon_2\}$, $e_8=\{\upsilon_4, \upsilon_4\}$.

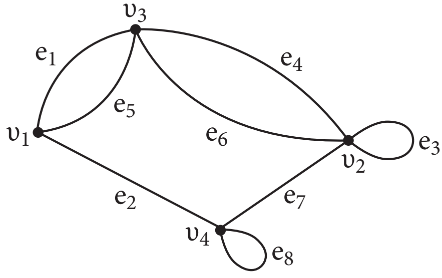
α) Να γίνει το διάγραμμα του γραφήματος και να ταξινομηθεί το γράφημα.

β) Να βρεθούν ο βαθμός και η ισοτιμία των κορυφών του.

γ) Να επαληθευθεί η ισχύς του θεωρήματος 7.1.

Λύση: Έχουμε:

α) Το γράφημα αυτό, του οποίου το διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 7.14, είναι ψευδογράφημα, δηλαδή ένα πολυγράφημα με βρόχους.



Σχήμα 7.14.

β) Είναι $\deg(\upsilon_1)=3$, $\deg(\upsilon_2)=5$, $\deg(\upsilon_3)=\deg(\upsilon_4)=4$. Επομένως οι κορυφές υ_3, υ_4 είναι άρτιες, ενώ οι κορυφές υ_1, υ_2 είναι περιττές.

γ) Από τον τύπο (8.1) παίρνουμε

$$m=\sum_{\upsilon\in V} d(\upsilon)=\sum_{i=1}^{4}\deg(\upsilon_i)=\deg(\upsilon 1)+\deg(\upsilon 2)+\deg(\upsilon 3)+\deg(\upsilon 4)=$$

$$=3+5+4+4=16$$

ή

$$m=\sum_{\upsilon\in V} d(\upsilon)=2|E|=2-8=16.$$

Παράδειγμα 7.7. Θεωρούμε το γράφημα $G=(V,E)$, όπου $V=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\upsilon_4\}$ και $\deg(\upsilon_1)=2$, $\deg(\upsilon_2)=3$, $\deg(\upsilon_3)=2$, $\deg(\upsilon_4)=2$. Υπάρχει ένα τέτοιο γράφημα; Αν όχι γιατί; Αν ναι να σχεδιασθεί.

Λύση: Σύμφωνα με το θεώρημα 7.1 τέτοιο γράφημα δεν υπάρχει, γιατί θα έπρεπε το άθροισμα m των βαθμών των κορυφών του να είναι άρτιο, ως διπλάσιο του αριθμού των ακμών του, το οποίο δε συμβαίνει γιατί το άθροισμα αυτό είναι 9, δηλαδή περιττός αριθμός.

Ας θεωρήσουμε τώρα το διγράφημα $G_D=(V,E)$. Στο διγράφημα αυτό για κάθε κορυφή υ ορίζονται:

i) Ο **εξωτερικός βαθμός** (outgoing degree) ή **έξω βαθμός** (outdegree) της κορυφής υ προσδιορίζει το πλήθος των τόξων στα οποία η κορυφή αυτή είναι προσπίπτουσα, δηλαδή η κορυφή είναι η αρχή αυτών των τόξων και συμβολίζεται **outdeg(υ)** ή (συνήθως) **od(υ)**. (Στην περίπτωση που το γράφημα δεν έχει παράλληλα τόξα είναι $od(\upsilon)=|V^+(\upsilon)|$).

ii) Ο **εσωτερικός βαθμός** (incoming degree) ή **έσω βαθμός** (in degree) της κορυφής υ προσδιορίζει το πλήθος των τόξων τα οποία είναι προσπίπτοντα στην κορυφή αυτή, δηλαδή η κορυφή είναι το τέρμα αυτών των τόξων και συμβολίζεται **indeg(υ)** ή (συνήθως) **id(υ)**. (Στην περίπτωση που το γράφημα δεν έχει παράλληλα τόξα είναι $id(\upsilon)=|V^-(\upsilon)|$).

Στην περίπτωση που το διγράφημα περιέχει έναν ή περισσότερους βρόχους σε μια κορυφή υ, τότε κάθε βρόχος συνεισφέρει στον έξω και έσω βαθμό της μια μονάδα.

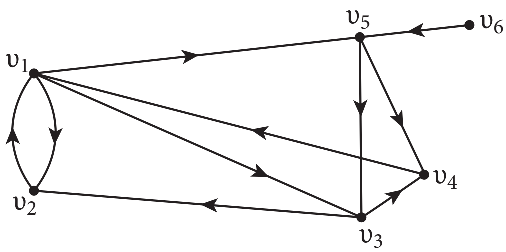
Εξάλλου:

α) Μια κορυφή υ ονομάζεται **πηγή** (source) αν είναι $od(\upsilon)\neq 0$, ενώ $id(\upsilon)=0$.

β) Μια κορυφή υ ονομάζεται **ρουφήχτρα** (sink) αν είναι $id(\upsilon)\neq 0$, ενώ $od(\upsilon)=0$.

Παρατήρηση 7.1. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το άθροισμα των έξω βαθμών και το άθροισμα των έσω βαθμών είναι ίσα, αντίστοιχα με το πλήθος των τόξων του γραφήματος.

Έτσι π.χ. στο γράφημα του σχήματος 7.15 έχουμε:



Σχήμα 7.15.

$V^+(\upsilon_1) = \{\upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_5\}$, $V^-(\upsilon_1) = \{\upsilon_2, \upsilon_4\}$ και $od(\upsilon_1) = 3$, $id(\upsilon_1) = 2$,

$V^+(\upsilon_2) = \{\upsilon_1\}$, $V^-(\upsilon_2) = \{\upsilon_1, \upsilon_3\}$ και $od(\upsilon_2) = 1$, $id(\upsilon_2) = 2$,

$V^+(\upsilon_3) = \{\upsilon_2, \upsilon_4\}$, $V^-(\upsilon_3) = \{\upsilon_1, \upsilon_5\}$ και $od(\upsilon_3) = 2$, $id(\upsilon_3) = 2$,

$V^+(\upsilon_4) = \{\upsilon_1\}$, $V^-(\upsilon_4) = \{\upsilon_3, \upsilon_5\}$ και $od(\upsilon_4) = 1$, $id(\upsilon_4) = 2$,

$V^+(\upsilon_5) = \{\upsilon_3, \upsilon_4\}$, $V^-(\upsilon_5) = \{\upsilon_1, \upsilon_6\}$ και $od(\upsilon_5) = 2$, $id(\upsilon_5) = 2$,

$V^+(\upsilon_6) = \{\upsilon_5\}$, $V^-(\upsilon_6) = \varnothing$ και $od(\upsilon_6) = 1$, $id(\upsilon_6) = 0$.

Επομένως διαπιστώνουμε ότι:

i) Η κορυφή υ_6 είναι πηγή.

ii) Ισχύει η παραπάνω παρατήρηση 7.1, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{6} od(\upsilon_k) = 10 \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{6} id(\upsilon_k) = 10$$

όσες και τα τόξα του γραφήματος.

7.4 Δρόμοι

Θεωρούμε το μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και έστω υ_0 και υ_n (όχι κατ' ανάγκη διακριτές) δύο κορυφές του.

Ορισμός 7.5. ***Δρόμος*** *(walk) μεταξύ των κορυφών* υ_1 *και* υ_n *στο γράφημα* G *είναι μια πεπερασμένη εναλλασσόμενη ακολουθία κορυφών και ακμών του γραφήματος*

G, *που συμβολίζεται*

$$W(\upsilon_1, \upsilon_n) = (\upsilon_1, e_1, \upsilon_1, e_2, \upsilon_2, \ldots, e_{n-1}, \upsilon_n), \tag{7.3}$$

όπου $e_i = \{\upsilon_i, \upsilon_{i+1}\}$.

Το **μήκος** (length) του δρόμου είναι n, όσο και το πλήθος των ακμών του.

Αν $n=0$ ο δρόμος αποτελείται μόνο από την κορυφή υ_1, χωρίς ακμές, και ονομάζεται **τετριμμένος** (trivial walk) το δε μήκος του είναι μηδέν.

Αν $\upsilon_1 \neq \upsilon_n$ ο δρόμος ονομάζεται **ανοιχτός** (open walk), ενώ αν $\upsilon_1 = \upsilon_n$ ο δρόμος ονομάζεται **κλειστός** (closed walk).

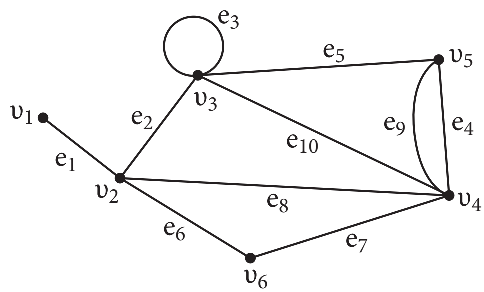
Παρατήρηση 7.2. Σε ένα απλό γράφημα ένας δρόμος μπορεί να περιγραφεί και μόνο με αναφορά των κορυφών του, όπως π.χ.

$$W(\upsilon_1, \upsilon_n) = (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n). \tag{7.4}$$

Σε αυτήν την περίπτωση είναι προφανές ότι ο δρόμος δεν περιλαμβάνει τις ακμές που ενώνουν τις διαδοχικές κορυφές.

Παρατήρηση 7.3. Είναι προφανές ότι σε ένα δρόμο *είναι δυνατόν* να επαναλαμβάνονται οι κορυφές ή/και οι ακμές του.

Παράδειγμα 7.8. Δίνεται το γράφημα του σχήματος 7.16. Στο απλό αυτό γράφημα διακρίνουμε τους εξής δρόμους:



Σχήμα 7.16.

α) $W_1 = W(\upsilon_1, \upsilon_2) = (\upsilon_1, e_1, \upsilon_2, e_2, \upsilon_3, e_3, \upsilon_3, e_{10}, \upsilon_4, e_4, \upsilon_5, e_9, \upsilon_4, e_8, \upsilon_2)$.

Στον δρόμο W_1, ο οποίος έχει μήκος 7, παρατηρούμε ότι π.χ. οι κορυφές υ_2 και υ_3 όπως και η ακμή e_2 επαναλαμβάνονται.

β) $W_2 = W(\upsilon_1, \upsilon_6) = (\upsilon_1, e_1, \upsilon_2, e_8, \upsilon_4, e_4, \upsilon_5, e_5, \upsilon_3, e_{10}, \upsilon_4, e_7, \upsilon_6)$.

Στον δρόμο W_2, που έχει μήκος 6, παρατηρούμε ότι επαναλαμβάνεται μόνο η κορυφή υ_4.

γ) $W_3 = W(\upsilon_2, \upsilon_5) = (\upsilon_2, e_6, \upsilon_6, e_7, \upsilon_4, e_{10}, \upsilon_3, e_5, \upsilon_5)$.
Στον δρόμο W_3, που έχει μήκος 4 δεν επαναλαμβάνεται ούτε κορυφή ούτε ακμή.

δ) $W_4 = W(\upsilon_2, \upsilon_2) = (\upsilon_2, e_6, \upsilon_6, e_7, \upsilon_4, e_{10}, \upsilon_3, e_2, \upsilon_2)$.
Ο δρόμος W_4 είναι κλειστός με μήκος 4, χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές και ακμές.

Θεωρούμε πάλι το γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές.

Ορισμός 7.6. *Ένας δρόμος* $W(\upsilon_1, \upsilon_n)$ *του γραφήματος* G *με διακριτές (μη επαναλαμβανόμενες) κορυφές ονομάζεται* **διαδρομή** *(path).*

Μια διαδρομή ονομάζεται **άρτια** (even) ή **περιττή** (odd) αν το μήκος της είναι άρτιος ή περιττός αριθμός αντίστοιχα.

Παρατήρηση 7.4. Είναι φανερό ότι μια διαδρομή έχει και διακριτές ακμές.

Ορισμός 7.7. *Μια κλειστή διαδρομή* $W(\upsilon_1, \upsilon_n)$ *με* $n \geq 3$ *ονομάζεται* **κύκλος** *(cycle).*

Ένας κύκλος με μήκος k ονομάζεται k–κύκλος. Αν ο k είναι άρτιος (περιττός) αριθμός τότε αντίστοιχα ο κύκλος ονομάζεται **άρτιος κύκλος** (**περιττός κύκλος**). Ένας 1–κύκλος είναι, προφανώς, ένας βρόχος, ένας 2–κύκλος συνίσταται από ένα ζεύγος πολλαπλών ακμών. Για $n \geq 3$ ένας n–κύκλος ονομάζεται **πολύγωνο** (polygon). Ιδιαίτερα ένας 3–κύκλος ονομάζεται **τρίγωνο** (triangle).

Ορισμός 7.8. *Ένας δρόμος* $W(\upsilon_1, \upsilon_n)$ *με διακριτές (μη επαναλαμβανόμενες) ακμές ονομάζεται* **μονοπάτι** *(trail).*

Παρατήρηση 7.5. Είναι επίσης φανερό ότι ένα μονοπάτι είναι δυνατόν να έχει επαναλαμβανόμενες κορυφές. Π.χ. στο μονοπάτι $(\upsilon_1, e_1, \upsilon_2, e_2, \upsilon_3, e_{10}, \upsilon_4, e_8, \upsilon_2, e_6, \upsilon_6)$ επαναλαμβάνεται η κορυφή υ_2.

Ορισμός 7.9. *Ένα κλειστό μονοπάτι ονομάζεται* **κύκλωμα** *(circuit).*

Ο δρόμος W_3 είναι και διαδρομή και μονοπάτι. Επίσης ο δρόμος W_4 είναι και κύκλος και κύκλωμα.

Στον πίνακα 7.1 φαίνονται συνοπτικά τα διάφορα είδη των δρόμων.

Πίνακας 7.1. *Είδη των δρόμων.*

Διακριτή(ές) Κορυφή(ές)	Διακριτή(ές) Ακμή(ές)	Ανοικτός(ή)	Κλειστός(ή)	Είδος
		✓		Δρόμος (ανοιχτός)
			✓	Δρόμος (κλειστός)
✓		✓		Διαδρομή
✓			✓	Κύκλος
	✓	✓		Μονοπάτι
	✓		✓	Κύκλωμα

Ορισμός 7.10. *Το μήκος της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δύο κορυφών* u *και* υ *ενός γραφήματος* G *ονομάζεται* **απόσταση** *(distance) των κορυφών αυτών και συμβολίζεται* $d(u, υ)$.

Μια τέτοια διαδρομή ονομάζεται, συχνά, και **γεωδαισιακή** (geodesic).

Αν $u = υ$, τότε $d(u, υ) = 0$. Αν επίσης δεν υπάρχει διαδρομή μεταξύ των δύο κορυφών, τότε δεν ορίζεται η απόσταση τους.

Ορισμός 7.11. **α)** ***Περιφέρεια*** *(circumference[155]) ενός γραφήματος* G *είναι το μήκος του μακρύτερου κύκλου και συμβολίζεται* $c(G)$.

β) ***Περίμετρος*** *(girth[156]) ενός γραφήματος* G *είναι το μήκος του συντομότερου κύκλου στο* G *και συμβολίζεται* $g(G)$.

Σημείωση 7.4. Οι δύο παραπάνω ορισμοί ορίζονται με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν κύκλοι στο γράφημα G.

Θεώρημα 7.2. *Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει ένας δρόμος μεταξύ δύο κορυφών* u *και* υ *ενός γραφήματος* G, *είναι να υπάρχει μια διαδρομή από την κορυφή* u *στην κορυφή* υ.

Απόδειξη: **α)** *Η συνθήκη είναι αναγκαία*: Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας δρόμος μεταξύ των κορυφών u και υ μήκους n. Αν $n = 1$ ο δρόμος είναι η ακολουθία $W(u, υ) = (u, υ)$ που προφανώς αποτελεί διαδρομή. Για $n > 1$ θεωρούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι ο δρόμος αυτός ορίζεται από την ακολουθία των

155. Circumference = Η συνοριακή γραμμή ενός κύκλου (περιφέρεια) ή γενικά η συνοριακή γραμμή ενός κλειστού σχήματος. Ίσως και το μήκος αυτής της συνοριακής γραμμής.

156. Girth = Το μήκος μιας κλειστή γραμμής. Π.χ. η περίμετρος ενός κύκλου (2πR).

κορυφών

$$W(u, \upsilon) = (u = \upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_i, \ldots, \upsilon_{n-1}, \upsilon = \upsilon_n)$$

και έχει μήκος n. Αν καμία κορυφή δεν επαναλαμβάνεται, τότε ο δρόμος, σύμφωνα με τον ορισμό 7.6, αποτελεί διαδρομή. Αν όμως επαναλαμβάνεται και μία τουλάχιστον κορυφή, έστω η υ_k, τότε ο δρόμος γράφεται

$$W(u, \upsilon) = (\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_i, \upsilon_k, \ldots, \upsilon_k, \ldots, \upsilon_{n-1}, \upsilon_n)$$

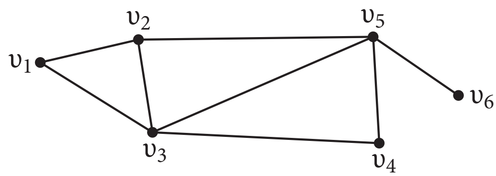
και έχει μήκος $s > n$ με s ακμές και $s + 1$ κορυφές. Αν στο δρόμο αυτό διαγράψουμε τις ακμές εκείνες που οδηγούν πίσω στην κορυφή υ_k, τότε ο δρόμος αυτός θα έχει μικρότερο μήκος αλλά διακριτές κορυφές και επομένως θα είναι διαδρομή.

β) *Η συνθήκη είναι ικανή*: Κάθε διαδρομή, ως γνωστόν, είναι δρόμος.

Ως εφαρμογή του θεωρήματος αυτού θεωρούμε το δρόμο

$$W(u, \upsilon) = (\upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5, \upsilon_3, \upsilon_2, \upsilon_5, \upsilon_6)$$

στο γράφημα του παρακάτω σχήματος 7.16α.



Σχήμα 7.16α.

Αν διαγράψουμε τις ακμές $\{\upsilon_5, \upsilon_3\}$, $\{\upsilon_3, \upsilon_2\}$ και $\{\upsilon_2, \upsilon_5\}$, τότε προκύπτει η ακολουθία $W(u, \upsilon) = (\upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5, \upsilon_6\}$ που αποτελεί διαδρομή.

Ας θεωρήσουμε τώρα το διγράφημα $G_D = (V, E)$. Παίρνοντας υπόψη τους παραπάνω ορισμούς, που αφορούν το μη κατευθυνόμενο γράφημα, μπορούμε, χρησιμοποιώντας το επίθετο **κατευθυνόμενος (η, ο)** (directed) όπου χρειάζεται, να ορίσουμε στο γράφημα G_D τις έννοιες όπως δρόμος, διαδρομή, κύκλος, μονοπάτι και κύκλωμα. Έτσι έχουμε π.χ. κατευθυνόμενο δρόμο, κατευθυνόμενη διαδρομή κ.λπ.

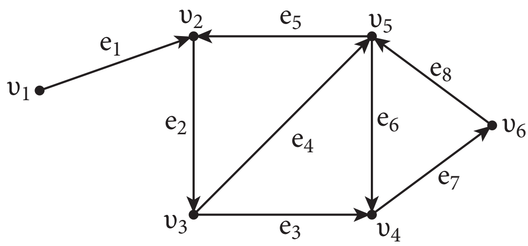
Παράδειγμα 7.9. Στο γράφημα του σχήματος 7.17 να βρεθούν:

α) Ένας δρόμος που να συνδέει τις κορυφές υ_1 και υ_4.

β) Δύο διαδρομές.

γ) Δύο κύκλοι.

δ) Ένα μονοπάτι.



Σχήμα 7.17.

Λύση: **α)** $W(\upsilon_1, \upsilon_4) = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_5, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4)$. Παρατηρούμε ότι στο δρόμο αυτό επαναλαμβάνονται αφενός μεν οι κορυφές υ_2 και υ_3, αφετέρου η ακμή e_2.

β) Δύο διαδρομές είναι οι παρακάτω:
$W_1(\upsilon_1, \upsilon_6) = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4)$ και $W_2(\upsilon_4, \upsilon_3) = (\upsilon_4, \upsilon_6, \upsilon_5, \upsilon_2, \upsilon_3)$.

γ) Δύο κύκλοι είναι οι παρακάτω:
$C_3 = (\upsilon_4, \upsilon_6, \upsilon_5, \upsilon_4)$ και $C_5 = (\upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_6, \upsilon_5, \upsilon_2, \upsilon_3)$.

δ) Ένα μονοπάτι, το οποίο είναι συγχρόνως και κύκλωμα, είναι το παρακάτω:
$W(\upsilon_4, \upsilon_4) = (\upsilon_4, \upsilon_6, \upsilon_5, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_5, \upsilon_4)$.

Σε ένα γράφημα G (ή διγράφημα G_D) ορίζεται η έννοια του **παράγοντος δρόμου** (spanning walk).

Ορισμός 7.12. *Ένας δρόμος σε ένα γράφημα ονομάζεται* ***παράγων***[157] *αν περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος.*

Για παράδειγμα στο διγράφημα του σχήματος 7.17 ένας τέτοιος δρόμος είναι ο εξής:

$$W(\upsilon_1, \upsilon_6) = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_5, \upsilon_4, \upsilon_6),$$

ο οποίος είναι συγχρόνως και διαδρομή. Είναι προφανές, όμως, ότι κάθε διγράφημα δεν έχει ένα τέτοιο δρόμο.

Ομοίως στο διγράφημα G_D ορίζεται η έννοια της **προσιτής ή προσβάσιμης κορυφής** (reachable vertex).

Ορισμός 7.13. *Μια κορυφή* u *ονομάζεται προσιτή από την κορυφή* υ *στο διγράφημα* G_D, *αν υπάρχει μια κατευθυνόμενη διαδρομή από την* υ *στη* u.

157. Ή **γεννητικός** (βλ. ΚΥΡΟΥΣΗΣ, Λ. κ.α.: «Εισαγωγή στους Γράφους», Αθήνα, 1999).
γεννητικός: αυτός που σχετίζεται με τη διαδικασία αναπαραγωγής και γέννησης ενός είδους. (Λεξικό Μπαμπινιώτη).

Στο διγράφημα του σχήματος 7.17 η κορυφή υ_4 είναι προσιτή από την κορυφή υ_1, όπως φαίνεται από το πρδ. 7.9(β), ενώ η κορυφή υ_1 δεν είναι προσιτή από την κορυφή υ_4, γιατί δεν υπάρχει διαδρομή που να ενώνει την κορυφή υ_4 με την κορυφή υ_1.

Παρατηρήσεις – Παραδείγματα

1. Μια διαδρομή ή ένας κύκλος μήκους *n* συχνά συμβολίζονται και ως P_n ή C_n αντίστοιχα.

2. Είναι φανερό ότι κάθε διαδρομή είναι ένα μονοπάτι. Δε συμβαίνει όμως και το αντίθετο πάντα (γιατί;).

3. Ένα κύκλωμα δεν είναι πάντα κύκλος (γιατί;).

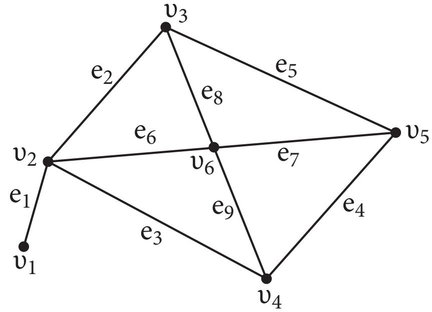
4. Ας θεωρήσουμε το γράφημα του σχήματος 7.16. Τότε:

α) $W(\upsilon_1, \upsilon_3) = (\upsilon_1, e_1, \upsilon_2, e_8, \upsilon_4, e_8, \upsilon_2, e_2, \upsilon_3)$ είναι ένας δρόμος, αλλά όχι ένα μονοπάτι γιατί επαναλαμβάνεται η ακμή e_8.

β) $W(\upsilon_1, \upsilon_3) = (\upsilon_1, e_1, \upsilon_2, e_8, \upsilon_4, e_7, \upsilon_6, e_6, \upsilon_2, e_2, \upsilon_3)$ είναι ένα μονοπάτι, αλλά όχι διαδρομή γιατί επαναλαμβάνεται η κορυφή υ_2.

γ) $W(\upsilon_2, \upsilon_5) = (\upsilon_2, e_6, \upsilon_6, e_7, \upsilon_4, e_3, \upsilon_3, e_5, \upsilon_5)$ είναι συγχρόνως και διαδρομή και μονοπάτι.

5. Ας θεωρήσουμε τώρα το γράφημα του σχήματος 7.18. Τότε:



Σχήμα 7.18.

α) $W(\upsilon_2, \upsilon_2) = (\upsilon_2, e_3, \upsilon_4, e_9, \upsilon_6, e_8, \upsilon_3, e_5, \upsilon_5, e_7, \upsilon_6, e_6, \upsilon_2)$ είναι ένα κύκλωμα, αλλά όχι κύκλος.

β) $W(\upsilon_2, \upsilon_2) = (\upsilon_2, e_3, \upsilon_4, e_4, \upsilon_5, e_7, \upsilon_6, e_8, \upsilon_3, e_2, \upsilon_2)$ είναι ένας 5–κύκλος.

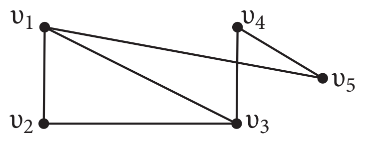
7.11. Στο γράφημα του σχήματος 7.11 να ελεγχθεί αν οι παρακάτω ακολουθίες ακμών είναι ή όχι δρόμοι και γιατί.

α) $W_1 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_2\}, \{\upsilon_2, \upsilon_3\}, \{\upsilon_5, \upsilon_4\}, \{\upsilon_4, \upsilon_3\}\}$.

β) $W_2 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_2\}, \{\upsilon_2, \upsilon_3\}, \{\upsilon_3, \upsilon_5\}, \{\upsilon_5, \upsilon_1\}\}$.

γ) $W_3 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_3\}, \{\upsilon_3, \upsilon_4\}, \{\upsilon_4, \upsilon_5\}\}$.

δ) $W_4 = \{\{\upsilon_4, \upsilon_3\}, \{\upsilon_2, \upsilon_3\}, \{\upsilon_2, \upsilon_1\}, \{\upsilon_1, \upsilon_5\}\}$.



Σχήμα 7.11.

7.12. Να βρεθούν όλοι οι κύκλοι και όλα τα κυκλώματα στο γράφημα του σχήματος 7.11.

7.13. Στο γράφημα του σχήματος 7.11 να χαρακτηρισθούν οι παρακάτω δρόμοι.

α) $W_1 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_2\}, \{\upsilon_2, \upsilon_3\}, \{\upsilon_3, \upsilon_4\}, \{\upsilon_4, \upsilon_5\}, \{\upsilon_5, \upsilon_1\}\}$.

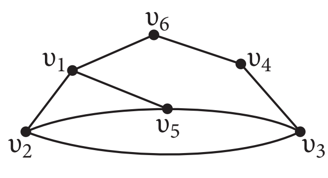
β) $W_2 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_3\}, \{\upsilon_3, \upsilon_4\}, \{\upsilon_4, \upsilon_5\}, \{\upsilon_5, \upsilon_1\}, \{\upsilon_1, \upsilon_2\}\}$.

γ) $W_3 = \{\{\upsilon_1, \upsilon_2\}, \{\upsilon_2, \upsilon_3\}, \{\upsilon_3, \upsilon_1\}, \{\upsilon_1, \upsilon_5\}, \{\upsilon_5, \upsilon_4\}, \{\upsilon_4, \upsilon_3\}\}$.

7.14. Στο γράφημα G του σχήματος 7.14 να βρεθούν:

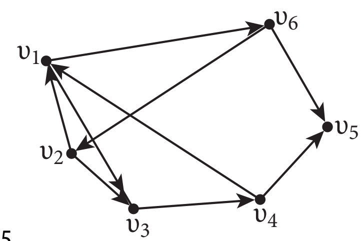
α) Όλες οι διαδρομές και τα μονοπάτια από την κορυφή υ_2 στην κορυφή υ_4.

β) Η απόσταση $d(\upsilon_2, \upsilon_4)$.



Σχήμα 7.14.

7.15. Στο διγράφημα του σχήματος 7.15 να βρεθούν:



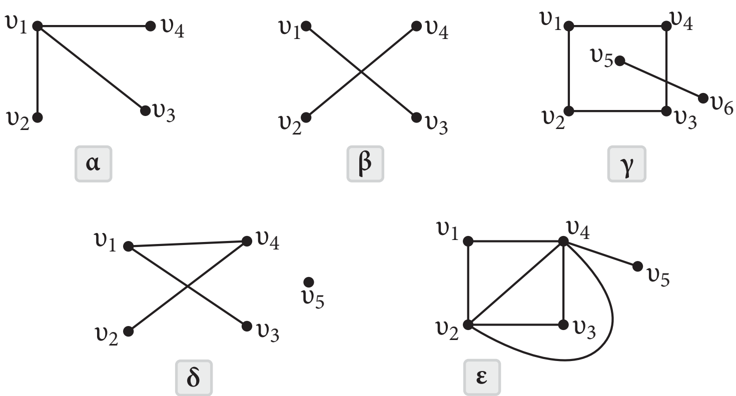
Σχήμα 7.15.

α) Δύο δρόμοι από την κορυφή υ_2 στην κορυφή υ_4.

β) Δύο διαδρομές από την κορυφή υ_1 στην κορυφή υ_4.

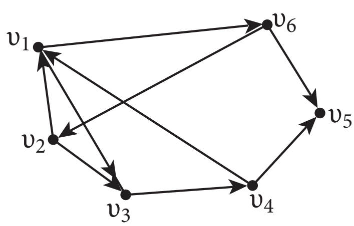
γ) Ένας κύκλος που να περιέχει την κορυφή υ_2.

7.16. Να εξετασθεί η συνεκτικότητα των γραφημάτων του σχήματος 7.16.



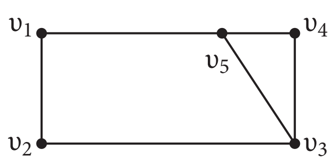
Σχήμα 7.16.

7.17. Να βρεθεί η διάμετρος του συνεκτικού γραφήματος G του σχήματος 7.17.



Σχήμα 7.17.

7.18. Ομοίως του γραφήματος G του σχήματος 7.18.



Σχήμα 7.18.

Λύσεις – Απαντήσεις των ασκήσεων

Κεφάλαιο 1 Στοιχεία από την Άλγεβρα της Λογικής

1.1. **α)** $P \vee \sim Q$, **β)** $[(P \wedge Q) \vee r] \wedge [\sim(P \wedge r)]$

1.4. **α)** $[(P \vee Q) \rightarrow \sim r] \vee (\sim Q \wedge r \wedge Q)$, **β)** $[Q \leftrightarrow (r \vee Q)] \leftrightarrow (P \wedge Q)$

Κεφάλαιο 2 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων και Άλγεβρας Boole

2.1. **α)** $x \in A$, **β)** $x \notin A$, **γ)** $A \subset B$

2.2. Όχι. αιτιολογήστε.

2.3. Πεπερασμένα είναι μόνο τα σύνολα B και Γ. Αιτιολογήστε.

2.4. $A = B$. Το σύνολο Γ είναι πολυσύνολο. Αιτιολογήστε.

2.5. Επειδή $A = \{2, 4\}$ και $E = \{2, 4)$ είναι $A = E$.

2.6. $A \cup (B \times A) = \{1, 2, 3, (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}$.
$(A \times A) \cup (B \times A) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}$.

2.7. Όχι. Αιτιολογήστε.

2.8. $2^A = \{A, \varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{2,3\}\}, \{\{1\}, \{2,3\}\}$.

2.9. **i)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, **ii)** $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, **iii)** $B \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
iv) $B \cup B = B = \{2, 4, 6, 8\}$.

2.10. **i)** $(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, **ii)** $(A \cap (B \cup \Gamma) = \{2, 3, 4\}$.

2.11. **i)** Αν $x \in (\varnothing \cup A) \Rightarrow x \in \varnothing$ ή $x \in A$. Επειδή όμως $\varnothing = \{\}$ συνεπάγεται ότι $x \in \varnothing$ δεν έχει έννοια οπότε $x \in A$ ό.έ.δ..

ii) Σύμφωνα με τις ιδιότητες της τομής ισχύουν $\varnothing \subseteq A \cap \varnothing$ και $A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$ οπότε $\varnothing \subseteq A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$ και $A \cap \varnothing = \varnothing$.

2.12. **i)** $A - B = \{1, 3\}$, **ii)** $B - \Gamma = \{2, 8\}$, **iii)** $B - B = \varnothing$.

2.13. **i)** Αν $x \in (A - B) = x \in A$ ενώ $x \notin B \Rightarrow A - B \subset A$, ό.έ.δ.

ii) Αν $x \in [(A - B) \cap B] \Rightarrow x \in (A - B)$ και $x \in B \Rightarrow x \in A$ ενώ ($x \notin B$ και $x \in B$) $\Rightarrow x \in A$ ενώ $x \in \varnothing$ (δηλαδή δεν υπάρχουν στοιχεία τέτοια ώστε $x \notin B$ και $x \in B$ οπότε $A \cap \varnothing = \varnothing$ ό.έ.δ.

7.34. Όπως φαίνεται από το σχήμα 7.34 τα γραφήματα G_1 και G_2 έχουν:

α) Τον ίδιο αριθμό κορυφών και ακμών.

β) Είναι $\deg(\upsilon_i)=\deg(u_i)=4,\ \forall i=1,2,3,4.$

Αν μεταξύ των συνόλων των κορυφών τους αποκατασταθεί η απεικόνιση κατά την οποία οι κορυφές υ_1, υ_2, υ_3, υ_4, υ_5, υ_6, υ_7 αντιστοιχίζονται στις κορυφές u_1, u_5, u_2, u_6, u_3, u_7, u_4 αντίστοιχα, η απεικόνιση αυτή πληροί τις συνθήκες (α) και (β) του ορισμού 7.25. Δηλαδή αφενός μεν η απεικόνιση είναι 1-1, αφετέρου διατηρείται η αντιστοίχιση των ακμών (γειτνίαση). Παρατηρούμε π.χ. ότι ενώ οι κορυφές υ_1, υ_2 ενώνονται με την ακμή $\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ το ίδιο συμβαίνει και με τις αντίστοιχες κορυφές u_1, u_5 που συνδέονται με την ακμή $\{u_1, u_5\}$. Επίσης, ενώ οι κορυφές υ_1 και υ_4 δε συνδέονται μεταξύ τους, το ίδιο συμβαίνει και με τις κορυφές u_1 και u_6 κ.λπ. Άρα τα γραφήματα G_1 και G_2 είναι ισομορφικά.

7.37. Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς ότι ο αριθμός n είναι περιττός. Άρα κάθε κορυφή υ του γραφήματος είναι άρτια, ασκ. 7.32. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 7.10 της §7.9 το γράφημα είναι διασχίσιμο.

Αν όμως ο αριθμός n είναι άρτιος, τότε όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι περιττές και το γράφημα δεν είναι διασχίσιμο. Εξαιρείται η περίπτωση $n=2$ γιατί μία ακμή που υπάρχει μόνο συνδέει τις 2 κορυφές.

7.39. **α)** Επειδή το γράφημα του σχήματος είναι πεπερασμένο, συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο, χωρίς μεμονωμένες κορυφές και όλες οι κορυφές του είναι άρτιες, σύμφωνα με το θεώρημα 7.10 είναι γράφημα Euler.

β) Ένα μονοπάτι, και συγχρόνως, κύκλωμα Euler είναι π.χ. το εξής:

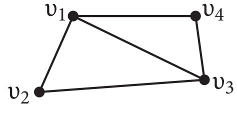
$$K(\upsilon_2, \upsilon_2) = (\upsilon_2, \upsilon_5, \upsilon_6, \upsilon_1, \upsilon_5, \upsilon_4, \upsilon_7, \upsilon_8, \upsilon_4, \upsilon_3, \upsilon_8, \upsilon_1, \upsilon_2).$$

γ) Δεν είναι γράφημα Hamilton γιατί δεν επαληθεύεται το θεώρημα Dirac. Δηλαδή υπάρχει κορυφή του γραφήματος που έχει βαθμό μικρότερο του $\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4$, όπου $n=8$ είναι ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος. Μια τέτοια κορυφή είναι π.χ. η υ_2.

7.41. Υπόδειξη: Να ελεγχθεί ο βαθμός των κορυφών του γραφήματος και να γίνει χρήση γνωστού θεωρήματος.

7.43. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το γράφημα $G=(V,E)$, όπου

$V=\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4\}$ και $E=\{\{\upsilon_1,\upsilon_2\}, \{\upsilon_2,\upsilon_3\}, \{\upsilon_3,\upsilon_4\}, \{\upsilon_4,\upsilon_1\}, \{\upsilon_1,\upsilon_3\}\}$ (βλ. σχήμα 7.43).



Σχήμα 7.43.

Το γράφημα αυτό:

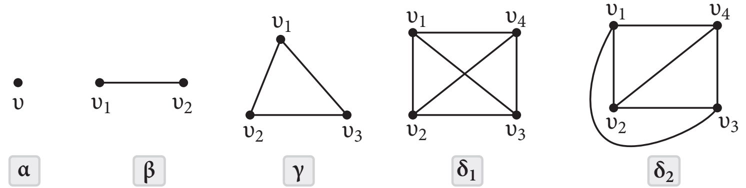
α) Είναι γράφημα Hamilton γιατί επαληθεύεται το θεώρημα του Ore (ή του Dirac). Ένας κύκλος Hamilton για το γράφημα είναι ο $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_1)$.

β) Δεν είναι γράφημα Euler (εξήγηση).

7.44. Εξ ορισμού ο αριθμός των ακμών σ' ένα κύκλο Hamilton ενός γραφήματος με n κορυφές είναι n. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, αν είχε κύκλο Hamilton ο κύκλος αυτός θα είχε περιττό αριθμό ακμών, επειδή το γράφημα έχει περιττό αριθμό κορυφών. Όμως, σύμφωνα με το θεώρημα 7.8, ένα διμερές γράφημα δεν έχει περιττό κύκλο οπότε δε θα έχει κύκλο Hamilton και επομένως δεν είναι γράφημα Hamilton.

7.45. Συνδύασε την απάντηση με το πρόβλημα 7.44.

7.47. **α)** Όπως προκύπτει από το σχήμα 7.47(i) τα γραφήματα (α), (β), και (γ), δηλαδή τα γραφήματα K_1, K_2, K_3 είναι επίπεδα γιατί κανένα ζεύγος ακμών τους δεν τέμνεται εκτός από τις κορυφές του.



Όσον αφορά το γράφημα K_4, δηλαδή το γράφημα (δ_1) παρατηρούμε ότι οι ακμές (υ_1,υ_3) και (υ_2,υ_4) φαίνεται ότι τέμνονται εκτός από τις κορυφές τους που σημαίνει ότι το γράφημα αυτό δεν είναι επίπεδο. Όμως, αν επανασχεδιάσουμε το γράφημα, όπως φαίνεται στο σχήμα (δ_2) προκύπτει ότι το γράφημα αυτό στην πραγματικότητα είναι επίπεδο.

β) Εργαζόμαστε ομοίως. Η απάντηση είναι ότι το γράφημα 7.47(ii)(α) δεν είναι επίπεδο. (αιτιολόγηση)

7.51. **α)** Ο δοσμένος χάρτης αποτελείται από τις εξής περιοχές:

$r_1 = (A, B, E, Z, E, A)$, $r_2 = (\Gamma, \Delta, E, \Gamma)$, $r_3 = (A, E, \Delta, A)$, $r_4 = (A, \Delta, \Theta, A)$,

$r_5 = (B, E, H, E, \Gamma, \Delta, \Theta, A, B)$.

β) $r_1 = 5$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 3$, $r_5 = 8$.

Επειδή είναι $\deg(r_1) + \deg(r_2) + \deg(r_3) + \deg(r_4) + \deg(r_5) = 5 + 3 + 3 + 3 + 8 = 22 = 2 \cdot 11$,

όπου 11 είναι το πλήθος των ακμών του γραφήματος, ισχύει το θεώρημα 7.11

7.53. **α)** Ο τύπος του Euler είναι $\upsilon - e + r = 2$. Επειδή είναι $\upsilon = 6$, $e = 8$, $r = 4$ έχουμε

$$\upsilon - e + r = 6 - 8 + 4 = 2 \text{ ό.έ.δ.}$$

β) Ομοίως εργαζόμαστε και για το γράφημα (β).

7.55. Κατ' αρχάς διαπιστώνεται ότι τα γραφήματα (χάρτες) είναι συνεκτικά χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό σε έναν επίπεδο χάρτη, του οποίου το αντίστοιχο γράφημα είναι απλό, με υ κορυφές, e ακμές και r περιοχές ισχύει

$$\frac{3}{2}r \le e \le 3\upsilon - 6 .$$