Χ. Γ. ΚΑΡΥΟΦΥΛΛΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1995

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η προσπάθεια γενίκευσης αποτελεσμάτων της κλασσικής Ανάλυσης και της Άλγεβρας οδήγησε στην ανάπτυξη της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Η θεώρηση διαφορετικών μαθηματικών προβλημάτων σε πιο γενική μορφή έγινε αιτία να εντοπισθούν κοινά χαρακτηριστικά στα προβλήματα αυτά με αποτέλεσμα να αποδειχθούν θεωρήματα που έχουν πολλαπλές εφαρμογές στα καθαρά και εφαρμοσμένα Μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες, όπως π.χ. στην Φυσική, στην Μηχανική, στην Οικονομία και στην Ιατρική.

Σκοπός μας με την συγγραφή του βιβλίου αυτού είναι να βοηθήσουμε τους φοιτητές στην κατανόηση μέρους των βασικών αποτελεσμάτων της Συναρτησιακής Ανάλυσης να τους εξοικιώσουμε με την αποδεικτική μεθοδολογία και να δώσουμε μερικές ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Φιλοδοξία μας είναι να πείσουμε τον αναγνώστη για την δύναμη και την χρησιμότητα της Συναρτησιακής Ανάλυσης και να του δώσουμε τις βάσεις και τα κατάλληλα ερεθίσματα να συνεχίσει σε πιο προχωρημένο επίπεδο την μελέτη θεμάτων που τον ενδιαφέρουν ειδικότερα και επιλύονται με τεχνικές που περιγράφονται στο βιβλίο αυτό.

Για την κατανόηση ενός εισαγωγικού μαθήματος Συναρτησιακής Ανάλυσης είναι απαραίτητες γνώσεις από την Θεωρία Συνόλων, τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό, την Πραγματική και Μιγαδική Ανάλυση, την Γραμμική Άλγεβρα, την Γεωμετρία και κυρίως την Τοπολογία μετρικών χώρων. Οι προαπαιτούμενες αυτές γνώσεις είναι συγκεντρωμένες στο μεγαλύτερο μέρος τους στα δύο πρώτα Κεφάλαια και στην πρώτη παράγραφο του τρίτου Κεφαλαίου. Για περισσότερες λεπτομέρειες οι φοιτητές μπορούν να συμβουλεύονται τα βιβλία που τους παρέχονται κατά την διάρκεια της φοίτησής τους καθώς και τα υπόλοιπα βιβλία που αναφέρονται στην Βιβλιογραφία.

Τέλος σημειώνουμε ότι στο βιβλίο περιέχονται πολλά Παραδείγματα, Παρατηρήσεις και περίπου 100 λυμένες Ασκήσεις με σκοπό τη διευκόλυνση του αναγνώστη στην καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου. Συνιστούμε πάντως στους φοιτητές να προσπαθούν να λύσουν τις Ασκήσεις χωρίς να συμβουλεύονται τις λύσεις, παρά μόνο όταν αυτό είναι εντελώς απαραίτητο.

Επιθυμώ τελειώνοντας να ευχαριστήσω θερμά τις Εκδόσεις Ζήτη για την άρτια εμφάνιση του παρόντος συγγράμματος.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 1991 *Χ. Καρυοφύλλης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **1**

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Σύνολα και συναρτήσεις, Λήμμα του Zorn

Οι έννοιες "**σύνολο**" και "**συνάρτηση**" καθώς επίσης και κάθε έννοια που έχει σχέση με αυτές, όπως π.χ. οι έννοιες "**υποσύνολο**", "**δυναμοσύνολο**", "**ένωση και τομή συνόλων**", "**καρτεσιανό γινόμενο**", "**πεπερασμένο, άπειρο και αριθμήσιμο σύνολο**", "**αμφιμονότιμη, επί και αντίστροφη συνάρτηση**", "**σύνθεση συναρτήσεων**", "**περιορισμός και επέκταση συνάρτησης**", "**διμελείς σχέσεις**", θεωρούνται γνωστές.

Μία σχέση "$\leq$" στο σύνολο $X \neq \emptyset$ λέγεται **σχέση διάταξης,** αν

(i) $\forall\, x \in X,\ x \leq x$ (**ανακλαστική ιδιότητα**)

(ii) ($x \leq y$ και $y \leq x$) $\Rightarrow x = y$ (**αντισυμμετρική ιδιότητα**)

(iii) ($x \leq y$ και $y \leq z$) $\Rightarrow x \leq z$ (**μεταβατική ιδιότητα**)

Το ζεύγος $(X, \leq)$ λέγεται **διατεταγμένο σύνολο.** Συνήθως αντί να λέμε "**το διατεταγμένο σύνολο** $(X, \leq)$" λέμε απλά "**το διατεταγμένο σύνολο X**". Μία σχέση διάταξης $\leq$ στο σύνολο $X \neq \emptyset$ λέγεται **ολική** και το σύνολο X **ολικά διατεταγμένο,** όταν

$$\forall\, x, y \in X,\ x \leq y \text{ ή } y \leq x.$$

Ένα στοιχείο α του διατεταγμένου συνόλου X λέγεται **μέγιστο (maximal),** όταν

$$(x \in X \text{ και } \alpha \leq x) \Rightarrow x = \alpha.$$

Τέλος, αν A είναι υποσύνολο του διατεταγμένου συνόλου X, ένα στοιχείο α του X λέγεται **πάνω (κάτω) φράγμα** του A, όταν

$$\forall\, x \in A,\ x \leq \alpha \ (\alpha \leq x)\ .$$

Λήμμα του Zorn. *Αν X είναι ένα μη κενό διατεταγμένο σύνολο, τέτοιο ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολό του έχει πάνω φράγμα, τότε το X έχει ένα τουλάχιστο μέγιστο (maximal) στοιχείο.*

2. Πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί, Σύγκλιση και συνέχεια

Με $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, θα συμβολίζουμε στο εξής τα σύνολα των **πραγματικών**, των **φυσικών**, το **απόκομμα** $\{1, 2, \ldots, n\}$, το σύνολο των **ακεραίων**, των **ρητών** και των **μιγαδικών** αριθμών αντίστοιχα. Οι έννοιες του **φραγμένου συνόλου** πραγματικών (μιγαδικών) αριθμών, της **φραγμένης** πραγματικής (μιγαδικής) **συνάρτησης** πραγματικής (μιγαδικής) μεταβλητής, καθώς επίσης και οι έννοιες της **συγκλίνουσας, φραγμένης, Cauchy ακολουθίας** πραγματικών (μιγαδικών) αριθμών και της **(απόλυτα) συγκλίνουσας σειράς** πραγματικών (μιγαδικών) αριθμών θεωρούνται γνωστές. Οι παρακάτω συμβολισμοί θα αναφέρονται σε ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών:

l_∞: το σύνολο των φραγμένων ακολουθιών

c: το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών

c_0: το σύνολο των μηδενικών ακολουθιών

C: το σύνολο των Cauchy ακολουθιών

l_p: το σύνολο των ακολουθιών (x_n), για τις οποίες $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p<\infty$ $(p>0)$

Είναι γνωστό ότι

(i) $l_1 \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$,

(ii) c=C (**Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy**).

Στην περίπτωση ακολουθιών μιγαδικών αριθμών η απόδειξη της (ii) βασίζεται στις ανισότητες

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad |\mathrm{Re}z|\le|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\le|z|,\quad |z|\le|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|.$$

Τέλος, οι έννοιες της **συνέχειας** (**παραγωγισιμότητας**) μιας πραγματικής (μιγαδικής) συνάρτησης πραγματικής (μιγαδικής) μεταβλητής σε σημείο θεωρούνται γνωστές.

3. Ακολουθίες συναρτήσεων

Οι έννοιες της **σημειακής** και της **ομοιόμορφης σύγκλισης** μιας ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής (f_n) θεωρούνται γνωστές. Υπενθυμίζουμε δύο βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1. *Αν η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων* $(f_n\colon E\to\mathbb{R})$, *όπου* $E\subset\mathbb{R}$, *συγκλίνει ομοιόμορφα προς την συνάρτηση*

$f: E \to \mathbb{R}$, *τότε και η* f *είναι συνεχής.*

Θεώρημα 2. *Αν η ακολουθία των παραγωγίσιμων συναρτήσεων* $(f_n: E \to \mathbb{R})$ *συγκλίνει σημειακά σε ένα σημείο* x_0 *του* E *και η ακολουθία των παραγώγων* (f'_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα προς την συνάρτηση* $g: E \to \mathbb{R}$, *τότε και η* (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f: E \to \mathbb{R}$ *και μάλιστα* $f'=g$.

4. Ανισότητες Hölder και Minkowski

Βοηθητική ανισότητα. *Αν* $p, q>0$ *και* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *τότε*

$$\forall\ \alpha, b \in \mathbb{R}, \quad |\alpha b| \leq \frac{|\alpha|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ t \geq 0, \quad f(t) = 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\ t - t^{1/p}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f παίρνει απόλυτα ελάχιστη τιμή $f(1)=0$ στο σημείο $t_0=1$, επομένως είναι φανερό ότι

(1) $$\forall\ t \geq 0, \quad t^{1/p} \leq 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}t\ .$$

Αν $b=0$, η ζητούμενη ανισότητα ισχύει προφανώς.

Αν $b\neq 0$, οπότε $|b|>0$, και θέσουμε στην (1) $t=|\alpha|^p|b|^{-q}$, εύκολα καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα (αφού λάβουμε υπόψη μας και την υπόθεση $pq=p+q$). ❑

Ανισότητα Hölder. *Αν* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *και* $p, q>0$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Έστω $A^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p$, $B^q = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$. Αν $A=0$ ή $B=0$, η ανισότητα ισχύει. Αν $A>0$ και $B>0$ και θέσουμε $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{A}$ και $b'_k = \frac{b_k}{B}$ $(k=1,2, \ldots, n)$, από την βοηθητική ανισότητα προκύπτει ότι

$$\forall\, k\in\mathbb{N}_n, \quad |\alpha'_k b'_k| \le \frac{|\alpha'_k|^p}{p} + \frac{|b'_k|^q}{q},$$

οπότε

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha'_k\, b'_k| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|\alpha'_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|b'_k|^q}{q} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p}{pA^p} + \frac{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q}{qA^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k b_k| \le AB. \qquad \square$$

Ανισότητα Hölder για σειρές. *Αν* $p, q>0$ *με* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *και* (α_n), $(b_n)\in l_p$, *τότε* $(\alpha_n b_n)\in l_1$ *και μάλιστα*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n b_n| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\Big)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα του Hölder είναι φανερό ότι

(1) $$\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k b_k| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\Big)^{1/q}.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (S_n) είναι συγκλίνουσα. Αν πάρουμε τα όρια στην (1) (όταν $n\to\infty$) βρίσκουμε την ζητούμενη ανισότητα. $\square$

Ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα. *Αν οι συναρτήσεις* x, y *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο κλειστό και φραγμένο διάστημα* $[\alpha, b]$ $(\mathbb{R}\ni\alpha<b\in\mathbb{R})$ *και* $p,q>0$ *με* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, *τότε*

$$\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt \le \Big(\int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_\alpha^b |y(t)|^q\, dt\Big)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A^p = \int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt$, $B^q = \int_\alpha^b |y(t)|^q\, dt$. Αν A=0 ή B=0 η ανισότητα ισχύει. Αν A>0 και B>0, θέτουμε $\bar{x} = \frac{x}{A}$ και $\bar{y} = \frac{y}{B}$. Από την βοηθητική ανισότητα προκύπτει ότι

(1) $$\forall\, t\in [\alpha, b], \quad |\bar{x}(t)\, \bar{y}(t)| \le \frac{|\bar{x}(t)|^p}{p} + \frac{|\bar{y}(t)|^q}{q}.$$

Αλλά είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\bar{x}$, $\bar{y}$ είναι συνεχείς στο $[\alpha, b]$, επομένως οι συναρτήσεις $|\bar{x}\bar{y}|$, $\frac{|\bar{x}|^p}{p}$, $\frac{|\bar{y}|^q}{q}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, b]$ και μάλιστα, χάρη στην (1),

$$\int_\alpha^b |\overline{x}(t)\,\overline{y}(t)|\,dt \le \int_\alpha^b \frac{|\overline{x}(t)|^p}{p}\,dt + \int_\alpha^b \frac{|\overline{y}(t)|^q}{q}\,dt =$$

$$= \frac{1}{pA^p}\int_\alpha^b |x(t)|^p\,dt + \frac{1}{qB^q}\int_\alpha^b |y(t)|^q\,dt = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

οπότε είναι φανερό ότι

$$\int_\alpha^b |x(t)\,y(t)|\,dt \le AB. \qquad \square$$

Ανισότητα Minkowski. *Αν* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *και* $p \ge 1$, *τότε*

$$\Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Αν $p=1$ η ανισότητα ισχύει. Αν $p>1$, τότε

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|\,|\alpha_k+b_k|^{p-1} \le \sum_{k=1}^n (|\alpha_k|+|b_k|)\,|\alpha_k+b_k|^{p-1} =$$

(1)

$$= \sum_{k=1}^n |\alpha_k|\,|\alpha_k+b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k|\,|\alpha_k+b_k|^{p-1}.$$

Ας θέσουμε τώρα $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, οπότε $p=(p-1)\,q$. Με την βοήθεια της ανισότητας του Hölder από την (1) προκύπτει

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p \le \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} +$$

(2)

$$+ \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p\Big)^{1/q} \cdot \Big[\Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\Big)^{1/p}\Big].$$

Τέλος από την (2) είναι φανερό ότι

$$\Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k+b_k|^p\Big)^{1-(1/q)} \le \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\Big)^{1/p}. \qquad \square$$

Ανισότητα Minkowski για σειρές. *Αν* $p \ge 1$ *και* $(\alpha_n), (b_n) \in l_p$, *τότε* $(\alpha_n+b_n) \in l_p$ *και μάλιστα*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n+b_n|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα Minkowski προκύπτει ότι

$$(1) \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k+b_k|^p \leq \Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{1/p}\Big]^p,$$

επομένως η ακολουθία (S_n) είναι συγκλίνουσα, οπότε αν πάρουμε τα όρια στην (1) (όταν $n\to\infty$) καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα. ❑

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα. *Αν οι συναρτήσεις* x, y *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο* $[\alpha, b]$ $(\mathbb{R}\ni\alpha<b\in\mathbb{R})$ *και* $p\geq 1$, *τότε*

$$\Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_\alpha^b |y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Αν $p=1$ η ανισότητα ισχύει. Αν $p>1$, τότε

$$(1) \qquad \begin{aligned} \int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt &\leq \int_\alpha^b (|x(t)|+|y(t)|)\cdot |x(t)+y(t)|^{p-1}\, dt = \\ &= \int_\alpha^b |x(t)|\, |x(t)+y(t)|^{p-1}\, dt + \int_\alpha^b |y(t)|\, |x(t)+y(t)|^{p-1})\, dt. \end{aligned}$$

Ας θέσουμε $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, οπότε $p=(p-1)q$. Από την (1), χάρη στην ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα, προκύπτει ότι

$$(2) \qquad \begin{aligned} \int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt &\leq \Big(\int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}\cdot\Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\, dt\Big)^{1/q} + \\ &+ \Big(\int_\alpha^b |y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}\cdot\Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\, dt\Big)^{1/q} = \\ &= \Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\Big)^{1/q}\cdot\Big[\Big(\int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_\alpha^b |y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}\Big]. \end{aligned}$$

Από την (2) τέλος είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} \Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} &= \Big(\int_\alpha^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\Big)^{1-(1/q)} \leq \\ &\leq \Big(\int_\alpha^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_\alpha^b |y(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}. \end{aligned}$$

❑