Ν. Π. Οικονομίδη - Χ. Γ. Καρυοφύλλη

Διαφορικός Λογισμός Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό περιέχει την ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Διαφορικός Λογισμός I» που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης.

Σκοπός του είναι η εισαγωγή σε ορισμένα κεφάλαια της Μαθηματικής Ανάλυσης, τα οποία αναφέρονται κυρίως στη διαφόριση πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.

Στο Κεφάλαιο 0 με τίτλο «Γνωστές έννοιες και συμβολισμοί» περιέχονται έννοιες και προτάσεις από τη Θεωρία των Συνόλων, απαραίτητες για την ανάπτυξη σε βάθος της υπόλοιπης ύλης.

Στο Κεφάλαιο 1 με τίτλο «Ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών» εξετάζεται η σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών και αριθμητικών σειρών και δίνεται έμφαση σε προτάσεις, οι οποίες δεν είναι γνωστές από τα Μαθηματικά της Μέσης Παιδείας, όπως π.χ. στα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών (Κριτήριο σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, Θεώρημα του Cauchy) και σειρών (Κριτήριο σύγκρισης, κριτήριο του D' Alembert και κριτήριο του Cauchy).

Στο Κεφάλαιο 2 με τίτλο «Πραγματικές συναρτήσεις» ορίζονται οι στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή οι ρητές συναρτήσεις, η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τέλος οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Στη συνέχεια εισάγονται οι έννοιες της δυναμοσειράς και της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς και διατυπώνεται Θεώρημα, με τη βοήθεια του οποίου γίνεται δυνατή η εύρεση του τόπου σύγκλισης δυναμοσειρών.

Στο Κεφάλαιο 3 με τίτλο «Όρια πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής επί σημείου» ορίζονται αρχικά οι στοιχειώδεις τοπολογικές έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη της υπόλοιπης ύλης, και μελετάται σε βάθος η έννοια του ορίου συνάρτησης επί σημείου.

Στο Κεφάλαιο 4 με τίτλο «Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής» εξετάζεται η συνέχεια συναρτήσεων και γίνεται ταξινόμηση των σημείων ασυνέχειας συναρτήσεων. Παράλληλα διατυπώνονται θεμελιώδεις ιδιότητες συναρτήσεων συνεχών σε διάστημα, όπως π.χ. το «Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα» και εισάγεται η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας.

Στο Κεφάλαιο 5 με τίτλο «Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής» ορίζεται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης και αποδεικνύονται ενδιαφέρουσες προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην παραγώγιση αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων καθώς και στην παραγώγιση σύνθετης και αντίστροφης συνάρτησης, ενώ παράλληλα υπολογίζονται οι παράγωγοι των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια εξετάζονται οι έννοιες του διαφορικού συναρτήσεων και των παραγώγων και διαφορικών ανώτερης τάξης.

Τέλος, διατυπώνονται βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού, όπως το Θεώρημα του Rolle, το πρώτο Θεώρημα της μέσης τιμής του Lagrange, το δεύτερο Θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy, το Θεώρημα του Taylor, με τη βοήθεια του οποίου βρίσκονται τα αναπτύγματα συναρτήσεων σε δυναμοσειρές (σειρές του Taylor), και οι κανόνες του L' Hospital, οι οποίοι είναι χρήσιμοι για τον υπολογισμό ορίων συναρτήσεων που παίρνουν κάποια απροσδιόριστη μορφή.

Στο Κεφάλαιο 6 με τίτλο «Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια παραγώγων» γίνεται μελέτη της μονοτονίας και της κυρτότητας ή κοιλότητας συναρτήσεων και αναπτύσσονται μέθοδοι, με τη βοήθεια των οποίων βρίσκονται τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής συναρτήσεων.

Τέλος, με την εισαγωγή και της έννοιας της ασύμπτωτης (κατακόρυφης, ορίζοντιας, πλάγιας) καμπύλης, γίνεται δυνατή η κατασκευή προσεγγιστικών καμπύλων συναρτήσεων.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο 7 με τίτλο «Παράρτημα» περιέχονται συμπληρώματα της ύλης των προηγούμενων Κεφαλαίων. Εισάγονται νέες έννοιες, όπως η έννοια του οριακού σημείου ακολουθίας, του ανώτερου και κατώτερου ορίου ακολουθίας, του γινομένου σειρών του Cauchy, των πεπλεγμένων συναρτήσεων και των παραμετρικών εξισώσεων και αποδεικνύονται σημαντικές Προτάσεις, όπως π.χ. το Θεώρημα των Bolzano και Weierstrass και τα κριτήρια του Cauchy για την ύπαρξη ορίων συναρτήσεων.

Παράλληλα γίνονται και οι αποδείξεις όλων των θεωρημάτων, τα οποία αναφέρθηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια χωρίς απόδειξη.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια για την απλή παρουσίαση του κειμένου. Για να μην αποβεί όμως η προσπάθεια αυτή σε βάρος της πληρότητας της ύλης, αυτή συμπληρώνεται με Ασκήσεις που βρίσκονται στο τέλος κάθε Παραγράφου και με το Παράρτημα [Κεφ. 7].

Στην καλύτερη κατανόηση του κειμένου συμβάλλουν επίσης και τα πολλά Παραδείγματα και οι Παρατηρήσεις.

Κατά τη διάρκεια της εκτύπωσης του βιβλίου πέθανε ο καθηγητής κ. Ν. Οικονομίδης.

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τη θλίψη μου για το θάνατό του και να αφιερώσω τη δουλειά μου στη μνήμη του.

Τέλος επιθυμώ να ευχαριστήσω τη λέκτορα κ. Χ. Κωνσταντιλλάκη-Σαββοπούλου, για τη συμβολή της στη διόρθωση του κειμένου, το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την ικανοποιητική εμφάνιση του βιβλίου και την κ. Μ. Χανιώτη για τα επιμελημένα σχέδια.

Θεσσαλονίκη, 1984

Χ. Γ. Καρυοφύλλης

Περιεχόμενα

Πρόλογος vii

σελ.

Κεφάλαιο 0. *Γνωστές έννοιες και συμβολισμοί* 1

0.1. Σύνολα 1
0.2. Συμβολισμοί της Μαθηματικής Λογικής 4
0.3. Συναρτήσεις 6
0.4. Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα. Ακολουθίες 12
0.5. Γενίκευση της ένωσης τομής και καρτεσιανού γινομένου συνόλων 16
0.6. Πραγματικοί αριθμοί 17
0.7. Φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών 21
0.8. Χρήσιμοι τύποι 26
Ασκήσεις 27

Κεφάλαιο 1. *Ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών* 29

1.1. Πραγματικές ακολουθίες 29
1.2. Σύγκλιση ακολουθίας 33
Ασκήσεις 38
1.3. Βασικές ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών 39
Ασκήσεις 44
1.4. Τα $+\infty$ και $-\infty$ ως όρια πραγματικών ακολουθιών 45
Ασκήσεις 51
1.5. Ακολουθίες Cauchy 53
1.6. Αριθμητικές σειρές 54
Ασκήσεις 56

1.7. Σειρές με όρους μη αρνητικούς 57
Ασκήσεις 61
1.8. Σειρές με ετερόσημους διαδοχικούς όρους. Απόλυτη σύγκλιση 62
Ασκήσεις 66

Κεφάλαιο 2. Πραγματικές συναρτήσεις 67

2.1. Πράξεις με πραγματικές συναρτήσεις 67
2.2. Φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις 70
Ασκήσεις 72
2.3. Πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής .. 72
2.4. Ρητές συναρτήσεις 73
2.5. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις 74
2.6. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις 77
2.7. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις 81
2.8. Υπερβολικές και αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις .. 86
Ασκήσεις 90
2.9. Στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής 90
2.10. Μονότονες, περιοδικές, άρτιες και περιττές πραγματικές συναρτήσεις 92
Ασκήσεις 94
2.11. Δυναμοσειρές 94

Κεφάλαιο 3. Όρια πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής επί σημείου . 103

3.1. Εσωτερικά σημεία και σημεία συσσώρευσης 103
Ασκήσεις 106
3.2. Όριο συνάρτησης επί σημείου 107
Ασκήσεις 111
3.3. Ιδιότητες των ορίων 113
Ασκήσεις 114
3.4. Τα $+\infty$, $-\infty$ ως όρια συνάρτησης επί σημείου 116
Ασκήσεις 118
3.5. Όριο συνάρτησης από δεξιά ή αριστερά επί σημείου 119

3.6. Όριο συνάρτησης στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Γενικεύσεις 123
Ασκήσεις 130

Κεφάλαιο 4. Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής 134

4.1. Συνέχεια σε σημείο 134
Ασκήσεις 138
4.2. Συνεχείς συναρτήσεις 139
Ασκήσεις 140
4.3. Συνέχεια από αριστερά ή δεξιά. Σημεία ασυνέχειας 140
Ασκήσεις 146
4.4. Συναρτήσεις συνεχείς σε διάστημα 146
Ασκήσεις 152
4.5. Ομοιόμορφη συνέχεια 152
Ασκήσεις 154
4.6. Συνέχεια αντίστροφων συναρτήσεων 154
Ασκήσεις 155

Κεφάλαιο 5. Παραγώγιση πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής 157

5.1. Παράγωγοι αριθμοί και παράγωγοι συναρτήσεων 157
Ασκήσεις 164
5.2. Παράγωγος συνάρτησης από δεξιά ή αριστερά σε σημείο . 164
5.3. Άπειροι παράγωγοι 166
5.4. Συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε διάστημα 168
5.5. Ιδιότητες των παραγώγων 169
5.6. Παραγώγιση σύνθετης και παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης 173
Ασκήσεις 179
5.7. Τύποι παραγώγων 181
5.8. Η έννοια του διαφορικού 182
Ασκήσεις 185
5.9. Παράγωγοι και διαφορικά ανώτερης τάξης 185
Ασκήσεις 189

5.10. Θεωρήματα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού ... 190
Ασκήσεις ... 198
5.11. Ο τύπος του Taylor. Σειρές Taylor ... 200
Ασκήσεις ... 211
5.12. Θεωρήματα του L' Hospital. Απροσδιόριστες μορφές ... 214

Κεφάλαιο 6. ***Μελέτη συναρτήσεων με τη βοήθεια παραγώγων*** ... 224

6.1. Μονοτονία συναρτήσεων. Τοπικά μέγιστα και ελάχιστα .. 224
Ασκήσεις ... 234
6.2. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Σημεία καμπής ... 235
Ασκήσεις ... 245
6.3. Κατασκευή καμπύλων ... 247

Κεφάλαιο 7. ***Παράρτημα*** ... 261

7.1. Οριακό σημείο ακολουθίας. Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας ... 261
7.2. Αριθμητικές σειρές. Δυναμοσειρές ... 266
7.3. Κριτήρια του Cauchy. Όρια μονότονων συναρτήσεων. Συνέχεια και ασυνέχεια μονότονων συναρτήσεων ... 271
7.4. Αποδείξεις των Θεωρημάτων IV και VI της 4.4 και του Θεωρήματος II της 4.5 ... 278
7.5. Απόδειξη του Θεωρήματος III της 5.12 ... 281
7.6. Πεπλεγμένες συναρτήσεις. Παραμετρικές εξισώσεις ... 285
Βιβλιογραφία ... 293
Οι κυριώτεροι συμβολισμοί ... 295
Ευρετήριο όρων ... 299

Κεφάλαιο 0

Γνωστές έννοιες και συμβολισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη αναδρομή σε έννοιες και συμβολισμούς, που διδάσκονται σήμερα στη Μέση Παιδεία και προαπαιτούνται για την ανάπτυξη ενός μαθήματος Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού.

0.1 Σύνολα

0.1.1. Τα *σύνολα* παριστάνονται συνήθως με κεφαλαία και τα *στοιχεία* με μικρά γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου.

Ο συμβολισμός $a \in A$ (αντίστ.[1] $a \notin A$) σημαίνει ότι το a *ανήκει* στο A (αντίστ. το a *δεν ανήκει* στο A) και διαβάζεται «*a του A*» (αντίστ. «*a όχι του A*»). Αντί του συμβολισμού $a \in A$ (αντίστ. $a \notin A$) χρησιμοποιούμε ορισμένες φορές τον ισοδύναμο συμβολισμό $A \ni a$ (αντίστ. $A \not\ni a$), ο οποίος διαβάζεται «*A περιέχει* το *a*» (αντίστ. «*A δεν περιέχει* το *a*»).

0.1.2. Όταν ένα σύνολο A *αποτελείται* από τα στοιχεία $a, \beta, \gamma, \ldots$ δηλαδή *περιέχει μόνο* τα στοιχεία $a, \beta, \gamma, \ldots$, τότε το A γράφεται $\{a, \beta, \gamma, \ldots\}$. Ο τρόπος αυτός γραφής του A λέγεται *αναγραφή*.

Όταν όλα τα στοιχεία του A και μόνο τα στοιχεία αυτά έχουν μια

1. Το «αντίστ.» σημαίνει «αντίστοιχα».

κοινή ιδιότητα, τότε αυτή λέγεται *χαρακτηριστική ιδιότητα* του A και το A γράφεται $\{x|\, p(x)\}$, όπου το x παριστάνει ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A και το $p(x)$ τη χαρακτηριστική ιδιότητα του A. Ο τρόπος αυτός γραφής του A λέγεται *περιγραφή*.

Παράδειγμα 1. Αν το A είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών, οι οποίοι είναι μικρότεροι του 10 και μεγαλύτεροι του 3, τότε το A γράφεται

$$\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{(αναγραφή)}$$

ή $$\{x|\, x \text{ ακέραιος και } 3 < x < 10\} \quad \text{(περιγραφή)}. \blacksquare$$

0.1.3. Ο συμβολισμός $A \subset B$ (αντίστ. $A \supset B$) σημαίνει ότι το A είναι *υποσύνολο* του B (αντίστ. το A είναι *υπερσύνολο* του B), δηλαδή ότι κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B (αντίστ. το A περιέχει κάθε στοιχείο του B).

Αντίθετα, ο συμβολισμός $A \not\subset B$ (αντίστ. $A \not\supset B$) σημαίνει ότι το A *δεν είναι υποσύνολο* του B (αντίστ. το A *δεν είναι υπερσύνολο* του B).

Ο συμβολισμός $A = B$ σημαίνει ότι το A *είναι ίσο* (ή *ίσιο* ή *ισούται)* με το B ή, ισοδύναμα, ότι τα A, B *είναι ίσα*, δηλαδή περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Είναι φανερό ότι $A = B$ ανν[1] $A \subset B$ και $B \subset A$.

Αντίθετα, ο συμβολισμός $A \neq B$ σημαίνει ότι τα A, B *δεν είναι* ίσα και διαβάζεται *«A διάφορο* (ή *διαφορετικό)* του *B»*.

Τέλος, αν $A \subset B$ και $A \neq B$ (αντίστ. $A \supset B$ και $A \neq B$), τότε το A λέγεται *γνήσιο υποσύνολο* (αντίστ. *γνήσιο υπερσύνολο*) του B.

0.1.4. Είναι γνωστό ότι δεχόμαστε την ύπαρξη *συνόλου χωρίς στοιχεία*. Το σύνολο αυτό (που είναι μοναδικό) ονομάζεται *κενό σύνολο* και παριστάνεται με το σύμβολο $\varnothing$.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει η πρόταση $\varnothing \subset A$.

Επίσης, αν $A \neq \varnothing$ και για κάθε x του A η $p(x)$ είναι ψευδής πρόταση [0.2.1], τότε $\{x|\, x \in A \text{ και } p(x)\} = \varnothing$.

Παράδειγμα 2. Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $\{x|\, x \in A \text{ και } x > 4\} = \varnothing$. $\blacksquare$

Συνήθως τα σύνολα που θεωρούμε είναι υποσύνολα κάποιου συγκε-

---

1. Το «ανν» σημαίνει «αν και μόνο αν».

κριμένου συνόλου X. Στις περιπτώσεις αυτές το X λέγεται *σύνολο αναφοράς*.

Παράδειγμα 3. Κατά τη μελέτη των πραγματικών αριθμών, τα σύνολα που θεωρούμε είναι πάντοτε υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών [0.6]. Στην περίπτωση αυτή σύνολο αναφοράς είναι το $\mathbb{R}$. ■

0.1.5. Αν A, B είναι δυο οποιαδήποτε σύνολα, οι συμβολισμοί $A \cup B$, $A \cap B$ και $A-B$ παριστάνουν αντίστοιχα την *ένωση*, την *τομή* και τη *διαφορά* των A, B, δηλαδή

$$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ ή } x \in B \}$$

$$A \cap B = \{ x | x \in A \text{ και } x \in B \}$$

και
$$A - B = \{ x | x \in A \text{ και } x \notin B \}.$$

Αν X είναι σύνολο αναφοράς, τότε η διαφορά $X-A$ λέγεται *συμπλήρωμα* (ή *συμπληρωματικό*) του συνόλου A και παριστάνεται με το συμβολισμό $C A$, δηλαδή $C A = X-A$.

Τέλος, δυο σύνολα A, B λέγονται *ξένα* (μεταξύ τους), αν $A \cap B=\emptyset$.

0.1.6. Θεωρούμε δυο οποιαδήποτε στοιχεία x, y (τα οποία ανήκουν στο ίδιο σύνολο ή σε δυο διαφορετικά σύνολα) και σχηματίζουμε ένα *νέο* στοιχείο, το οποίο παριστάνουμε με το συμβολισμό (x, y). Το στοιχείο αυτό ονομάζεται *διατεταγμένο ζεύγος*, εφόσον δεχθούμε ότι

$$(x, y) = (x', y') \quad \text{ανν} \quad x = x' \text{ και } y = y'.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο οποιαδήποτε σύνολα A, B. Αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ το σύνολο $\{(x, y) | x \in A \text{ και } y \in B\}$ λέγεται *καρτεσιανό γινόμενο* των A, B και παριστάνεται με το συμβολισμό $A \times B$. Όταν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$, τότε ως καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ των A, B ορίζεται το κενό σύνολο.

Ώστε :

$$A \times B = \begin{cases} \{(x, y) | x \in A \text{ και } y \in B\}, & \text{όταν } A \neq \emptyset \text{ και } B \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{όταν } A = \emptyset \text{ ή } B = \emptyset. \end{cases}$$

Αν $A = B$, τότε, για συντομία, το $A \times A$ γράφεται A^2.

ση) *«υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο x του συνόλου A, τέτοιο ώστε»*, ή, σύντομα, *«υπάρχει x του A, ώστε»*.

Παράδειγμα 2. Αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ο συμβολισμός $\exists x \in A,\ 2x < 7$ σημαίνει ότι, «υπάρχει x του A, ώστε $2x < 7$». ■

0.2.4. Το σύμβολο $\forall$ διαβάζεται *«για κάθε»* και λέγεται *καθολικός ποσοδείκτης*. Ο συμβολισμός $\forall\ x \in A$ σημαίνει ότι *«για κάθε στοιχείο x του συνόλου A»* ή, σύντομα, *«για κάθε x του A»*.

Παράδειγμα 3. Αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ο συμβολισμός $\forall x \in A$, $3x \leqq 15$ σημαίνει «για κάθε x του A, $3x \leqq 15$». ■

0.2.5. Μπορούμε να σχηματίσουμε ανάλογους συμβολισμούς, χρησιμοποιώντας δυο ή και περισσότερες φορές τους *ποσοδείκτες* $\exists$ και $\forall$.

Παράδειγμα 4. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8\}$, τότε:

(i) Ο συμβολισμός $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ y=2x$, σημαίνει ότι «για κάθε x του A, υπάρχει y του B, ώστε $y = 2x$».

(ii) Ο συμβολισμός $\exists x \in A,\ \forall y \in B,\ x \leqq y$ σημαίνει ότι «υπάρχει x του A, ώστε για κάθε y του B, $x \leqq y$».

(iii) Ο συμβολισμός $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ x \leqq y + 1$ σημαίνει ότι «για κάθε x του A, (και) για κάθε y του B, $x \leqq y+1$».

(iv) Ο συμβολισμός $\exists x \in A,\ \exists y \in B,\ x + y = 5$ σημαίνει ότι «υπάρχει x του A, τέτοιο ώστε να υπάρχει y του B, ώστε $x + y = 5$» ή, ισοδύναμα, «υπάρχουν x του A και y του B, ώστε $x + y = 5$». ■

Παράδειγμα 5. Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ και $\Gamma = \{2, 6\}$, τότε ο συμβολισμός $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ \forall z \in \Gamma,\ x + y \geqq z$ σημαίνει ότι «για κάθε x του A, υπάρχει y του B, ώστε για κάθε z του Γ, $x + y \geqq z$. ■

Για συντομία, αντί για τους συμβολισμούς

$$\exists x \in A,\ \exists y \in A \quad (\text{αντίστ. } \forall x \in A,\ \forall y \in A)$$
$$\exists x \in A,\ \exists y \in A,\ \exists z \in A \quad (\text{αντίστ. } \forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \forall z \in A)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

χρησιμοποιούμε συνήθως τους απλούστερους συμβολισμούς

$$\exists x, y \in A \quad (\text{αντίστ. } \forall x, y \in A)$$
$$\exists x, y, z \in A \quad (\text{αντίστ. } \forall x, y, z \in A)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

■

0.2.6. Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα *(ποσοδείκτες)* $\nexists$, $\exists|$. Το $\nexists$ διαβάζεται *«δεν υπάρχει»*, ενώ το $\exists|$ *«υπάρχει μόνο ένα»*, ή, ισοδύναμα, *«υπάρχει ακριβώς ένα»*.

Παράδειγμα 6. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$, οι συμβολισμοί

$$\nexists\, x \in A\,,\quad 2x > 10,$$

$$\forall\ x \in A\,,\ \exists|\, y \in B\,,\ y = x + 1$$

σημαίνουν αντίστοιχα ότι

«δεν υπάρχει x του A, ώστε $2x > 10$»,
«για κάθε x του A, υπάρχει ακριβώς ένα y του B, ώστε $y = x + 1$». ■

0.2.7. Η χρήση των παραπάνω συμβολισμών συμβάλλει σημαντικά στη *σύντομη* και *σαφή* διατύπωση προτάσεων (ορισμών, θεωρημάτων κλπ.).

Στα επόμενα γίνεται ευρεία χρήση των συμβολισμών αυτών και συνεπώς πρέπει να καταβληθεί ιδιαίτερη προσπάθεια για την πλήρη αφομοίωσή τους.

0.3. Συναρτήσεις

0.3.1. Όταν δοθούν δύο μη κενά σύνολα A, B και ένας *κανόνας* f, με τον οποίο σε κάθε στοιχείο του A *αντιστοιχεί* ένα μόνο στοιχείο του B, τότε λέμε ότι δίνεται μια *συνάρτηση* (ή απεικόνιση) *του A στο B*, την οποία παριστάνουμε με το συμβολισμό

$$f:\ A \to B \qquad (\text{ή} \quad A \xrightarrow{f} B\,).$$

Το A λέγεται *σύνολο ορισμού* και το B *σύνολο άφιξης* της συνάρτησης $f: A \to B$.

Στις περιπτώσεις που δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται το B, αντί του $f: A \to B$, χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό f/A και λέμε ότι «έχουμε μια *συνάρτηση* f *ορισμένη στο* A». Αν δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται ούτε το A, τότε η συνάρτηση $f: A \to B$ παριστάνεται μόνο με το γράμμα f.

Ο συμβολισμός

$$\beta = f(a) \qquad (\text{ή} \quad a \to f(a) \quad \text{ή} \quad a \xrightarrow{f} \beta\,),$$

όπου $a \in A$ και $\beta \in B$, σημαίνει ότι στο στοιχείο a του συνόλου ορισμού A αντιστοιχεί το στοιχείο β του συνόλου άφιξης B και διαβάζεται «*β ίσον f του α*» (ή «*α στο f (α)*» ή «*α με την f στο β*»).

Σε ορισμένες περιπτώσεις, αντί για τον συμβολισμό $f: A \to B$ χρησιμοποιούμε τους (ισοδύναμους) συμβολισμούς

$$A \ni x \to f(x) \in B \quad \text{και} \quad A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

ή, εφόσον δεν είναι απαραίτητο να αναφέρονται τα A, B,

$$x \to f(x) \quad \text{και} \quad x \xrightarrow{f} y,$$

όπου x οποιοδήποτε στοιχείο του A και y στοιχείο του B.

0.3.2. Αν $f: A \to B$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ και $\beta = f(\alpha)$, το α λέγεται *πρότυπο* και το β *τιμή* ή *εικόνα του α στο B* (με την f).

Αν $E \subset A$, το σύνολο

$$\{ f(x) \mid x \in E \}$$

λέγεται *εικόνα του E στο B* (με την f) και παριστάνεται με το συμβολισμό $f(E)$, ενώ αν $H \subset B$, το συνολο

$$\{ x \mid x \in A \text{ και } f(x) \in H \}$$

λέγεται *αντίστροφη εικόνα του H στο A* (με την f) και παριστάνεται με το $f^{-1}(H)$. Τέλος, η εικόνα του συνόλου ορισμού A της f στο B, δηλαδή το σύνολο

$$f(A) = \{f(x)/x \in \mathrm{A}\} \subset B,$$

λέγεται *σύνολο τιμών της f*.

Παράδειγμα 1. Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ και η συνάρτηση $f: A \to B$ ορίζεται, έτσι ώστε $\forall\, x \in A$, $f(x) = 2x$, παρατηρούμε ότι $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ και $f(4) = 8$. Επομένως, αν $E = \{2, 3, 4\} \subset A$ και $H = \{2, 6, 8\} \subset B$, είναι φανερό ότι

$$f(E) = \{4, 6, 8\} \subset B \quad \text{και} \quad f^{-1}(H) = \{1, 3, 4\} \subset A.$$

Τέλος, το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = \{2, 4, 6, 8\}. \quad \blacksquare$$

0.3.3. Είναι γνωστό [*0.3.2*] ότι για κάθε συνάρτηση $f: A \to B$ ισχύει η σχέση $f(A) \subset B$. Αν $f(A) \neq B$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f *απεικονίζει το A εντός του B* ή ότι η f είναι συνάρτηση *του A εντός του B*.

Αντίθετα, αν $f(A) = B$, λέμε ότι η f *απεικονίζει το A επί του B* ή ότι η f είναι συνάρτηση *του A επί του B*.

Παράδειγμα 2. Αν $f: A \to B$ είναι η συνάρτηση του Παραδ. 1/0.3, παρατηρούμε ότι $f(A) \neq B$. Επομένως, η f απεικονίζει το A εντός του B. ■

Παράδειγμα 3. Αν $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{15, 25, 35, 45\}$ και $\forall\, x \in A$, $f(x) = 5x$, παρατηρούμε ότι $f(A) = B$ και συνεπώς η f απεικονίζει το A επί του B. ■

Όταν δεν γνωρίζουμε ή δεν μας ενδιαφέρει αν η $f: A \to B$ απεικονίζει το A εντός ή επί του B, τότε λέμε ότι η f *απεικονίζει το A στο B* ή ότι η f είναι συνάρτηση *του A στο B* [βλ. και 0.3.1].

0.3.4. Η συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται *αμφιμονότιμη* ή *αμφιμονοσήμαντη*, όταν

$$\forall\, x, y \in A\,, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y).$$

Παράδειγμα 4. Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις των Παραδ. 1 και 3/0.3 είναι αμφιμονότιμες. ■

Παράδειγμα 5. Αν $A = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$ και $\forall\, x \in A$, $f(x) = x^2$, παρατηρούμε ότι $f(-1) = f(1)$, δηλαδή

$$\exists\, x, y \in A\,, \quad x \neq y \quad \text{και} \quad f(x) = f(y)$$

και συνεπώς η f δεν είναι αμφιμονότιμη. ■

Αν η συνάρτηση $f: A \to B$ είναι αμφιμονότιμη και απεικονίζει το A επί του B [0.3.3], τότε λέγεται *απλή* ή *ένα - προς - ένα*.

Παράδειγμα 6. Είναι φανερό ότι: *(i)* Η συνάρτηση του παραδ. 3/0.3. είναι απλή. *(ii)* Η συνάρτηση του Παραδ. 1/0.3 δεν είναι απλή γιατί, αν και είναι αμφιμονότιμη, δεν απεικονίζει το A επί του B. *(iii)* Τέλος, η συνάρτηση του Παραδ. 5/0.3 απεικονίζει το A επί του B αλλά δεν είναι αμφιμονότιμη και συνεπώς δεν είναι απλή. ■

0.3.5. Αν η συνάρτηση $f: A \to B$ είναι αμφιμονότιμη [0.3.4], τότε στο σύνολο τιμών [0.3.2] $f(A)$ της f ορίζεται μια νέα συνάρτηση $g: f(A) \to A$, τέτοια ώστε