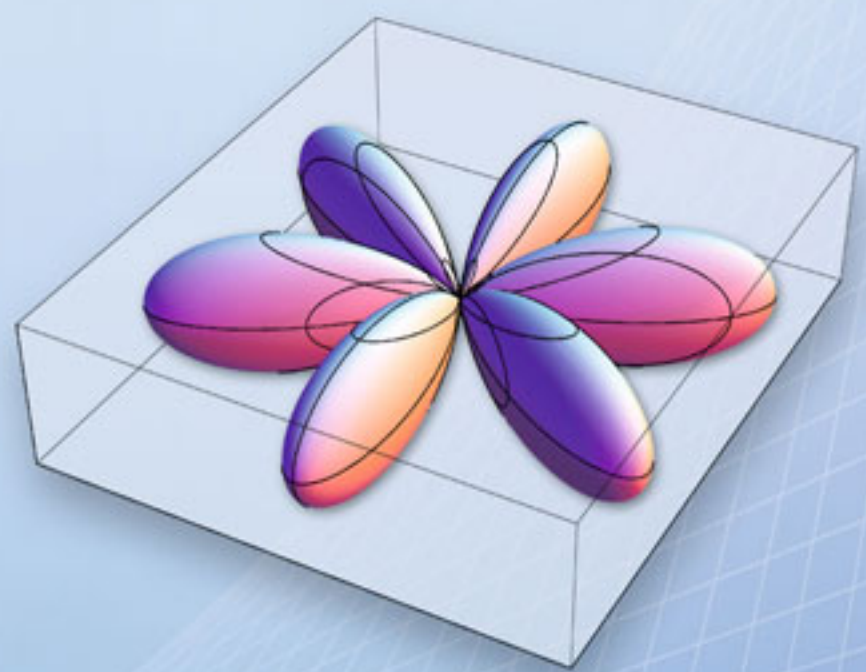
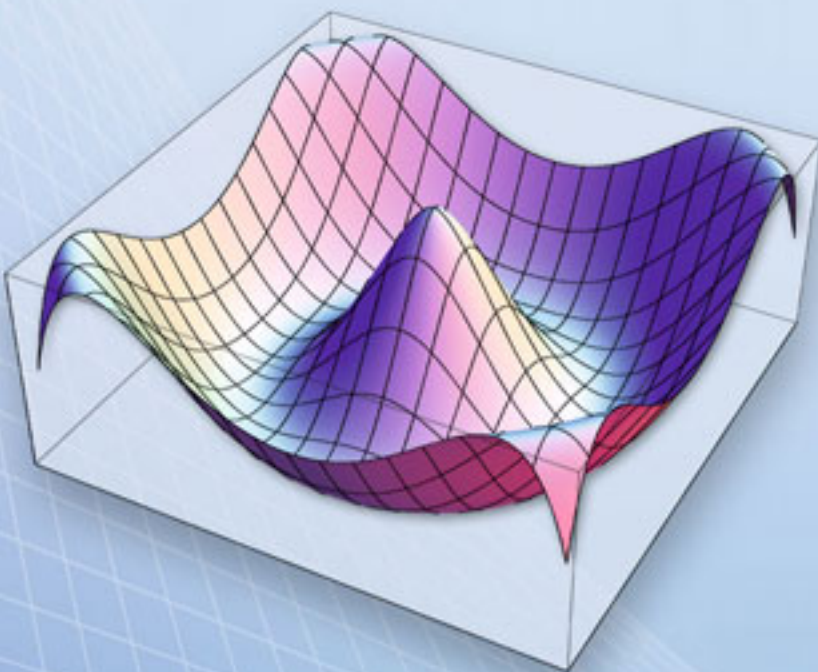


Νικόλαος Δ. Καρανικόλας

Εισαγωγή στο

# Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών



240 λυμένες  
450 άλυτες ασκήσεις

2<sup>η</sup> έκδοση



*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα.*

ISBN 978-960-456-263-3

© Copyright: Καρανικόλας Ν., Εκδόσεις Ζήτη, Α' έκδοση: Ιανουάριος 2004,  
Β' έκδοση βελτιωμένη: Ιανουάριος 2011

*Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη και συγγραφέα κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.*

**Φωτοστοιχειοθεσία**

**Εκτύπωση**

**Βιβλιοδεσία**

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**

18<sup>ο</sup> χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς

Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392 072.222 - Fax: 2392 072.229 • e-mail: info@ziti.gr



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
ΖΗΤΗ**

**www.ziti.gr**

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:**

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203.720 • Fax 2310 211.305

e-mail: sales@ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:**

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210 3211.097

**ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:**

Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:** www.ziti.gr

Στην Έφη  
και  
τη Μαρίζα

## Πρόλογος Δεύτερης Έκδοσης

Στη δεύτερη αυτή έκδοση του βιβλίου «Εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών» διορθώθηκαν όλα τα τυπογραφικά λάθη και οι αβλεψίες, που εντοπίστηκαν στην πρώτη έκδοση, προστέθηκε ένας αριθμός λυμένων ασκήσεων και προβλημάτων, καθώς και ορισμένα νέα συγγράμματα στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία. Σημαντική καινοτομία αποτελεί η προσθήκη εκατό νέων ασκήσεων και προβλημάτων προς λύση, με τις απαντήσεις τους. Με τον τρόπο αυτό, οι φοιτητές θα μπορούν να ελέγχουν την ορθότητα της λύσης των. Στο σύνολό τους σχεδόν, τα προστεθέντα προβλήματα και οι ασκήσεις, είναι πρωτότυπα, δηλαδή έχουν συντεθεί από τον συγγραφέα.

Ένα μεγάλο μέρος των ασκήσεων και προβλημάτων του συγγράμματος αποτελούν εφαρμογές της Φυσικής, της Αστρονομίας καθώς και άλλων φυσικών επιστημών. Με τον τρόπο αυτό τονίζεται στους φοιτητές, ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν γι' αυτούς μια ανιαρή αφηρημένη απασχόληση αλλά ένα απαραίτητο εργαλείο, που πρέπει να έχει σήμερα ο σύγχρονος Φυσικός.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φοιτητές, που με την ενεργό παρουσία τους στις διαλέξεις, τον προβληματισμό τους και τις παρατηρήσεις τους, συνέβαλαν θετικά στη διαμόρφωση και στην περαιτέρω άνοδο του επιπέδου του μαθήματος, καθώς και την βελτίωση του παρόντος συγγράμματος κατά τα τελευταία χρόνια. Ευχαριστώ επίσης, τον επί πτυχίω φοιτητή κ. Ε. Ζώτο, για την επισήμανση ορισμένων τυπογραφικών λαθών και την βοήθειά του στην επεξεργασία των σχημάτων.

*Δεκέμβριος 2010*

*N. A. Καρανικόλας*

## Πρόλογος Πρώτης Έκδοσης

Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στο «Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών». Στην ουσία περιέχει την ύλη του μαθήματος ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, το οποίο διδάσκεται στους φοιτητές του δευτέρου εξαμήνου του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. Το παρόν πόνημα αποτελεί προϊόν της εμπειρίας του συγγραφέα, όπως αυτή διαμορφώθηκε στα είκοσι περίπου έτη που έχει την ευθύνη της διδασκαλίας του μαθήματος. Στην απόκτηση της εμπειρίας αυτής σημαντική ήταν η συνεισφορά των φοιτητών οι οποίοι με το ενδιαφέρον, τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους συνετέλεσαν στο να αποκτήσει και να διατηρεί το μάθημα μια διαρκή ανοδική πορεία στο μακρό αυτό χρονικό διάστημα. Τα ευεργετικά αποτελέσματα της αναβάθμισης αυτής είναι ορατά τα τελευταία χρόνια και πιστεύεται ότι θα συνεχιστούν με πιο έντονους ρυθμούς, με τη συνεισφορά του παρόντος συγγράμματος.

Το σύγγραμμα αποτελείται από οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει ορισμένες βασικές τοπολογικές έννοιες και τα βασικά συστήματα συντεταγμένων. Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη γεωμετρική παράσταση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού. Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ενώ το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στις μερικές παραγώγους. Οι σύνθετες και πλεγμένες συναρτήσεις εξετάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις Ιακωβιανές ορίζουσες και τη συναρτησιακή εξάρτηση. Στο έκτο κεφάλαιο δίνονται ορισμένα βασικά στοιχεία διανυσματικής ανάλυσης. Τα δύο τελευταία κεφάλαια αναφέρονται στις εφαρμογές των μερικών παραγώγων. Πιο συγκεκριμένα το έβδομο κεφάλαιο περιέχει τις γεωμετρικές εφαρμογές των μερικών παραγώγων, ενώ το όγδοο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις άκρες τιμές των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Η παρουσίαση της ύλης στο σύγγραμμα είναι τέτοια ώστε κάθε παράγραφος να αποτελεί μια ξεχωριστή οντότητα. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα κάθε παραγράφου, εφόσον υπάρχουν, έχουν τη δική τους αρίθμηση και ακολουθούνται από παραδείγματα τα οποία επίσης αριθμούνται. Με τον τρόπο αυτό γίνεται πιο εύκολη η εμπέδωση της θεωρίας και διευκολύνεται η κατανόησή της. Οι αποδείξεις ορισμένων θεωρημάτων που είναι μακροσκελείς έχουν παραληφθεί. Έτσι ενθαρρύνεται η ενασχόληση των φοιτητών με τη θεωρία, η κατανόηση της οποίας αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την καλύτερη εμπέδωση και αφομοίωση της ύλης του μαθήματος.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει έναν αριθμό λυμένων ασκήσεων οι οποίες αναφέρονται σε όλα τα θέματα του κεφαλαίου. Διαβάζοντας και κατανόώντας τις ασκήσεις αυτές ο φοιτητής αποκτά εμπειρία στη λύση ασκήσεων, συγχρόνως όμως κάνει και μια επανάληψη των βασικών εννοιών του κάθε κεφαλαίου. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ένας ικανός αριθμός ασκήσεων προς λύση. Συνιστάται στους φοιτητές να μελετούν τη θεωρία και τις λυμένες ασκήσεις πριν την ενασχόλησή τους με τις ασκήσεις αυτές.

Επειδή το μάθημα και, κατά συνέπεια, το σύγγραμμα απευθύνεται στους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής, καταβλήθηκε προσπάθεια να τονίζονται οι φυσικές εφαρμογές της θεωρίας που περιέχει. Ακόμα συμπεριελήφθησαν στο βιβλίο ένας μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων και ασκήσεων από τις φυσικές επιστήμες. Με τον τρόπο αυτό όχι μόνο τονίζονται τα φυσικά δεδομένα του μαθήματος αλλά συγχρόνως δείχνεται στο φοιτητή του Τμήματος Φυσικής, ότι τα μαθηματικά γι' αυτόν δεν αποτελούν αυτοσκοπό αλλά ένα απαραίτητο εργαλείο για τη θεραπεία της επιστήμης του.

Το σύγγραμμα κυκλοφόρησε για δύο ακαδημαϊκά έτη με τη μορφή σημειώσεων. Τώρα κυκλοφορεί ως βιβλίο, αφού προστέθηκαν επιπλέον λυμένες ασκήσεις, καθώς και ασκήσεις προς λύση. Ευχαριστώ τον τελειόφοιτο φοιτητή κ. Β. Πασχαλίδη για την ανάγνωση των σημειώσεων και την επισήμανση ορισμένων αβλεψιών. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να τονίσω ότι κάθε υπόδειξη σχετική με παραλείψεις, με διαφορετική αντιμετώπιση θεμάτων αλλά και με αβλεψίες, με ευχαρίστηση, θα γινόταν δεκτή.



Επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Αστρονομίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για την άμεση ή έμμεση βοήθειά τους στη συγγραφή του βιβλίου. Ευχαριστώ επίσης τους φοιτητές για την ενθαρρυντική παρουσία και την ενεργό συμμετοχή τους στο μάθημα.

Ευχαριστώ θερμά τον συνάδελφο αναπληρωτή καθηγητή κ. Δ. Κυριάκο, για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί του σε θέματα Φυσικής και για την πολύτιμη βοήθειά του στη σχεδίαση και επεξεργασία των σχημάτων του συγγράμματος.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να απευθύνω τις ιδιαίτερες και θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή του Εργαστηρίου Αστρονομίας κ. Ν. Σπύρου, για την κριτική ανάγνωση του δακτυλογραφημένου κειμένου και τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις και υποδείξεις του.

*Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2004*

*Νικόλαος Δ. Καρανικόλας*

# Περιεχόμενα

## 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ $R^n$

---

1.1	Ο Ευκλείδειος μετρικός χώρος .....	13
1.2	Βασικές τοπολογικές έννοιες .....	15
1.3	Συστήματα συντεταγμένων στο χώρο $R^3$ .....	19
1.4	Λυμένες ασκήσεις .....	23
1.5	Ασκήσεις προς λύση .....	27

## 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

---

2.1	Ισοσταθμικές καμπύλες και επιφάνειες .....	31
2.2	Επιφάνειες δευτέρου βαθμού .....	37
2.3	Λυμένες ασκήσεις .....	43
2.4	Ασκήσεις προς λύση .....	46

## 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

---

3.1	Ακολουθίες σημείων του χώρου $R^m$ .....	49
3.2	Ορισμός και ιδιότητες του ορίου συναρτήσεων .....	54
3.3	Διπλά ή διαδοχικά όρια .....	60
3.4	Συνέχεια συναρτήσεων .....	64
3.5	Μεταβολή και μερική μεταβολή συναρτήσεων .....	66
3.6	Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων .....	68
3.7	Η έννοια της σύνθετης συνάρτησης .....	70
3.8	Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων .....	72



3.9	Λυμένες ασκήσεις .....	75
3.10	Ασκήσεις προς λύση .....	91

## 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

4.1	Ορισμός της μερικής παραγώγου.....	99
4.2	Γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου.....	102
4.3	Θεωρήματα επί των μερικών παραγώγων .....	103
4.4	Διαφορίσιμες συναρτήσεις.....	106
4.5	Ολικό διαφορικό συνάρτησης.....	109
4.6	Διαφορικά ανώτερης τάξης.....	114
4.7	Λυμένες ασκήσεις .....	116
4.8	Ασκήσεις προς λύση.....	134

## 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1	Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων.....	149
5.2	Ομογενείς συναρτήσεις παραγώγου .....	152
5.3	Διαφορικά σύνθετων συναρτήσεων .....	155
5.4	Τύπος και σειρά Taylor.....	158
5.5	Πλεγμένες συναρτήσεις .....	166
5.6	Συναρτησιακές ορίζουσες.....	173
5.7	Μετασχηματισμοί και συναρτησιακή εξάρτηση.....	178
5.8	Λυμένες ασκήσεις .....	182
5.9	Ασκήσεις προς λύση .....	203

## 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

6.1	Αριθμητικές και διανυσματικές συναρτήσεις.....	215
6.2	Κλίση και παράγωγος κατά κατεύθυνση .....	217

6.3	Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης .....	223
6.4	Στροφή διανυσματικής συνάρτησης .....	227
6.5	Λυμένες ασκήσεις .....	231
6.6	Ασκήσεις προς λύση .....	245

## 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

7.1	Επίπεδο εφαπτόμενο επιφάνειας.....	251
7.2	Ευθεία κάθετη επιφάνειας.....	253
7.3	Ευθεία εφαπτόμενη καμπύλης στο χώρο $R^3$ .....	255
7.4	Κάθετο επίπεδο καμπύλης στο χώρο $R^3$ .....	258
7.5	Παράγωγος κατά την κατεύθυνση της εφαπτόμενης μιας καμπύλης στο χώρο $R^3$ .....	261
7.6	Λυμένες ασκήσεις .....	264
7.7	Ασκήσεις προς λύση .....	269

## 8<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### ΑΚΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

8.1	Σχετικά μέγιστα και σχετικά ελάχιστα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.....	273
8.2	Συνθήκες για την ύπαρξη άκρων τιμών συνάρτησης.....	276
8.3	Τετραγωνικές μορφές. Άκρες τιμές συναρτήσεων $n$ -μεταβλητών $n > 2$ .....	284
8.4	Άκρες τιμές πλεγμένων συναρτήσεων .....	289
8.5	Άκρες τιμές συνάρτησης υπό συνθήκη. Πολλαπλασιαστές Lagrange .....	292
8.6	Λυμένες ασκήσεις .....	298
8.7	Ασκήσεις προς λύση .....	331

*Ασκήσεις, προς επανάληψη, με απαντήσεις.....* 337

*Βιβλιογραφία.....* 359



Κεφάλαιο

## Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ $R^n$

### 1.1 Ο Ευκλείδειος μετρικός χώρος

Στο σύγγραμμα αυτό θα ασχοληθούμε με το διαφορικό λογισμό πραγματικών συναρτήσεων περισσότερων της μιας πραγματικών μεταβλητών. Τις συναρτήσεις αυτές θα ονομάζουμε εις το εξής συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Η μελέτη των διαφορών φυσικών φαινομένων ή φυσικών μεγεθών οδηγεί στη χρησιμοποίηση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Αν  $x, y, z$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες και  $t$  ο χρόνος, τότε ως τέτοιες συναρτήσεις, θα μπορούσε να αναφέρει κανείς τη θερμοκρασία στην ατμόσφαιρα της Γης  $T = T(x, y, z, t)$ , την πυκνότητα στο εσωτερικό ενός πλανήτη  $\rho = \rho(x, y, z)$  ή το δυναμικό βαρύτητας  $V = V(x, y, z)$  που περιγράφει την κίνηση ενός αστέρα σε ένα ελλειψοειδή γαλαξία.

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της συνάρτησης πολλών μεταβλητών θα πρέπει να αρχίσουμε από την έννοια της συνάρτησης μιας μεταβλητής. Για τον ορισμό της συνάρτησης μιας μεταβλητής  $f: A \rightarrow B$  απαιτούνται δύο σύνολα  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$  και ένας νόμος  $f$  με τον οποίο σε κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο  $y \in B$ . Γράφουμε λοιπόν

$$y = f(x), \quad (1.1)$$

όπου με το σύμβολο  $f(x)$  παριστάνουμε την εικόνα του  $x \in A$  στο σύνολο  $B$ . Το σύνολο  $A$  είναι το πεδίο ορισμού ενώ το σύνολο  $f(A) \subseteq B$  είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f$ . Το τυχόν σημείο

του  $A$  ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η εικόνα αυτού στο  $B$  ονομάζεται τιμή της συνάρτησης ή εξαρτημένη μεταβλητή. Στη συνάρτηση (1.1) τόσο το σύνολο  $A$  όσο και το σύνολο  $B$  είναι υποσύνολα του συνόλου  $R$  των πραγματικών αριθμών.

Στη συνάρτηση πολλών μεταβλητών το πεδίο τιμών εξακολουθεί να είναι υποσύνολο του συνόλου  $R$  των πραγματικών αριθμών. Όμως το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο του συνόλου  $R^n$  ( $n \geq 2$ ). Το σύνολο  $R^n$  ( $n \geq 2$ ) το θεωρούμε ως ένα χώρο  $n$ -διαστάσεων. Γράφουμε λοιπόν

$$R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$$

$$R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$$

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του χώρου  $R^2$  είναι διατεταγμένα ζεύγη, τα στοιχεία του χώρου  $R^3$  είναι διατεταγμένες τριάδες, ενώ τα στοιχεία του χώρου  $R^n$  είναι διατεταγμένες  $n$ -άδες αριθμών. Τα στοιχεία του χώρου  $R^n$  θα ονομάζουμε εις το εξής σημεία, επεκτείνοντας την έννοια του σημείου από το χώρο μέχρι και τριών διαστάσεων στο χώρο των  $n$ -διαστάσεων.

Έστω ότι  $P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $P_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$  είναι δύο σημεία του χώρου  $R^n$  και  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των σημείων του χώρου  $R^n$  και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του  $R^n$  επί τον πραγματικό αριθμό  $\lambda$  με τον ακόλουθο τρόπο

$$(i) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$(ii) \quad \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Ο χώρος  $R^n$  εφοδιασμένος με τις ανωτέρω πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι ένας διανυσματικός χώρος. Στο διανυσματικό αυτό χώρο ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $P_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$  με τη σχέση

$$|P_1P_2| = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}. \quad (1.2)$$

Κάθε διανυσματικός χώρος  $R^n$  στον οποίο η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του  $P_1, P_2$  δίνεται από τη σχέση (1.2) λέγεται **Ευκλείδειος**. Με τη σχέση (1.2) σε κάθε ζεύγος σημείων του  $R^n$  αντιστοιχούμε μονότιμα έναν πραγματικό αριθμό, την απόστασή τους  $|P_1P_2|$ . Με τον τρόπο αυτό στο καρτεσιανό γινόμενο  $R^n \times R^n$  ορίζεται μια πραγματι-

κή συνάρτηση  $\Phi(P_1, P_2) = |P_1 P_2|$  που ονομάζεται **μετρική** και ο Ευκλείδειος χώρος ονομάζεται **Ευκλείδειος μετρικός χώρος**. Σε ό,τι ακολουθεί, όταν αναφερόμαστε στον χώρο  $R^n$ , θα εννοούμε τον Ευκλείδειο μετρικό χώρο.

## 1.2 Βασικές τοπολογικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες βασικές τοπολογικές έννοιες που χρειάζονται για την κατανόηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Μία από τις βασικότερες έννοιες είναι η έννοια της **περιοχής** ενός σημείου στον χώρο  $R^n$ . Αν θεωρήσουμε το σύνολο  $R$  των πραγματικών αριθμών, τότε η  $\delta$ -περιοχή ενός σημείου  $P_0(x_0)$  είναι το σύνολο

$$\pi(P_0, \delta) = \{x \mid x \in R, |x - x_0| < \delta\}.$$

Η έννοια της περιοχής επεκτείνεται και στον χώρο  $R^n$ ,  $n \geq 2$  ως εξής:

### Ορισμός

Αν  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  είναι ένα σημείο του χώρου  $R^n$ , ορίζουμε ως «κυβική»  $\delta$ -περιοχή του  $P_0$  το σύνολο

$$\pi(P_0, \delta) = \{P(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid P \in R^n, |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta, \dots, |x_n - x_n^0| < \delta\}. \quad (1.3)$$

Ορισμένες φορές χρησιμοποιείται η περιορισμένη «κυβική»  $\delta$ -περιοχή του σημείου  $P_0$  που είναι το σύνολο

$$\pi^*(P_0, \delta) = \pi(P_0, \delta) - \{P_0\}.$$

Μπορούμε αντί της «κυβικής»  $\delta$ -περιοχής να ορίσουμε τη «σφαιρική»  $\delta$ -περιοχή του σημείου  $P_0$  στο χώρο  $R^n$  που είναι το σύνολο

$$\pi(P_0, \delta) = \{P(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid P \in R^n, |PP_0| < \delta\}. \quad (1.4)$$

Με τον τρόπο που έχουν ορισθεί οι περιοχές (1.3) και (1.4) τα σημεία των περιμέτρων τους δεν ανήκουν σ' αυτές. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται **ανοικτές**. Αν όμως μια περιοχή περιλαμβάνει και τα ση-

μεία της περιμέτρου της, τότε ονομάζεται **κλειστή**. Για παράδειγμα, η «σφαιρική» περιοχή

$$\pi(P_0, \delta) = \{P(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid P \in R^n, |PP_0| \leq \delta\} \quad (1.5)$$

είναι μια κλειστή περιοχή του χώρου  $R^n$ . Σε μια «σφαιρική» περιοχή μπορούμε να εγγράψουμε ή να περιγράψουμε μια «κυβική» περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε ισοδύναμα το είδος της περιοχής που θέλουμε για τη λύση ενός προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο  $S \subset R^n$ . Ένα σημείο  $A \in S$  ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** του  $S$  εάν υπάρχει μία τουλάχιστον περιοχή  $\pi(A, \delta)$  του σημείου  $A$ , τέτοια ώστε

$$\pi(A, \delta) \subset S.$$

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου  $S$  ονομάζεται **εσωτερικό σύνολο** του  $S$  και συμβολίζεται με  $\underline{S}$ .

Ένα σημείο  $B$ , το οποίο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο  $S$ , ονομάζεται **οριακό σημείο** ή **σημείο συσσώρευσης** του  $S$ , αν για κάθε περιορισμένη περιοχή του  $\pi^*(B, \delta)$  ισχύει

$$\pi^*(B, \delta) \cap S \neq \emptyset,$$

δηλαδή, αν κάθε περιορισμένη περιοχή του περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του  $S$ . Το σύνολο των οριακών σημείων του  $S$  ονομάζεται **παράγωγο σύνολο** του  $S$  και συμβολίζεται με  $S'$ .

Ένα σημείο  $\Gamma$ , το οποίο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο  $S$ , ονομάζεται **συνοριακό σημείο** του  $S$ , αν κάθε περιορισμένη περιοχή του  $\pi_0(\Gamma, \delta)$  περιέχει σημεία του συνόλου  $S$  και σημεία που ανήκουν στο  $CS = R^n - S$ , που λέγεται συμπλήρωμα του  $S$ , δηλαδή

$$\pi^*(\Gamma, \delta) \cap S \neq \emptyset, \quad \pi^*(\Gamma, \delta) \cap CS \neq \emptyset.$$

Είναι προφανές πως κάθε συνοριακό σημείο είναι συγχρόνως και οριακό χωρίς να ισχύει γενικά το αντίστροφο. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του  $S$  ονομάζεται **σύνορο** του  $S$  και συμβολίζεται με  $\partial S$ .

Ένα σημείο  $\Delta$  που ανήκει στο σύνολο  $S$  ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του  $S$ , εάν δεν είναι οριακό του σημείου, δηλαδή

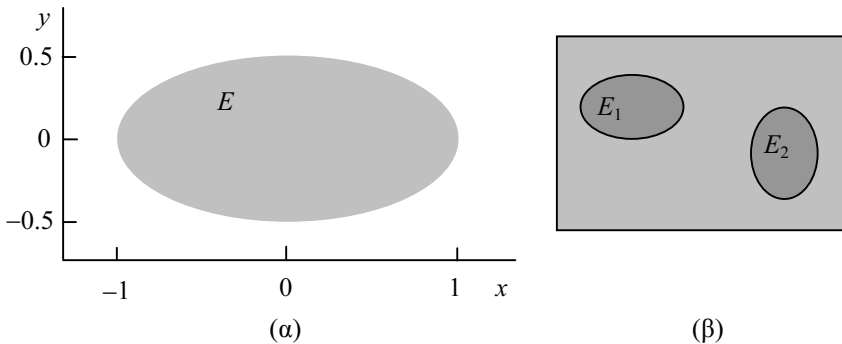
$$\pi^*(\Delta, \delta) \cap S = \emptyset.$$

Ένα σύνολο ονομάζεται **ανοικτό** όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά. **Κλειστό** ονομάζεται το σύνολο, του οποίου το συμπλή-

ρωμα είναι ανοικτό σύνολο. Ένα κλειστό σύνολο περιλαμβάνει όλα τα οριακά σημεία του.

**Συναφές ή συνεκτικό** ονομάζεται κάθε σύνολο του οποίου δύο οποιαδήποτε σημεία μπορεί να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή, της οποίας όλα τα σημεία ανήκουν στο σύνολο. Ένα συναφές σύνολο λέγεται **κυρτό**, αν το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε σημεία του ανήκει στο σύνολο.

Ονομάζουμε **τόπο** ένα ανοικτό συναφές σύνολο. Αν θεωρήσουμε το σύνολο  $E = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$ , που φαίνεται στο σχήμα 1.1α, αυτό είναι τόπος του  $R^2$ . Αντιθέτως το σύνολο  $S_1 = E_1 \cup E_2$ , που φαίνεται στο σχήμα 1.1β, δεν είναι τόπος του  $R^2$ , διότι δεν είναι συναφές. Οι τόποι αποτελούν πεδία ορισμού των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και, κατά συνέπεια, η έννοια του τόπου είναι βασική για τη μελέτη των συναρτήσεων αυτών.



**Σχήμα 1.1.** (α) Το σύνολο  $E$  είναι τόπος, ενώ (β) το σύνολο  $S_1 = E_1 \cup E_2$  δεν είναι συναφές.

Ένα σύνολο ονομάζεται **φραγμένο**, αν η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του είναι πεπερασμένος αριθμός. **Συμπαγές** ονομάζεται ένα σύνολο το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο.

**Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \alpha^2\} \subset R^2.$$

Ζητείται να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.



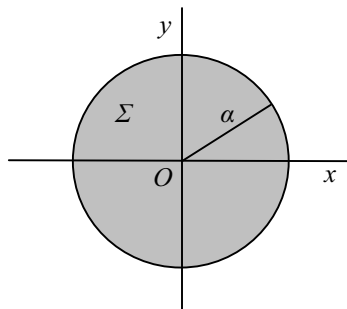
ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $\Sigma$  αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας  $a$  και από τα σημεία της περιφέρειας (Σχ. 1.2). Κάθε σημείο του συνόλου  $\Sigma$  είναι οριακό του σημείο. Επομένως  $\Sigma' = \Sigma$ . Τα συνοριακά σημεία του  $\Sigma$  είναι τα σημεία της περιφέρειας, επομένως

$$\partial\Sigma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\} \subset \Sigma$$

Το εσωτερικό του  $\Sigma$  είναι το σύνολο

$$\underline{\Sigma} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\} \subset \Sigma$$

Το σύνολο  $\Sigma$  είναι κλειστό και φραγμένο επομένως είναι ένα συμπαγές σύνολο. Το  $\underline{\Sigma}$  είναι τόπος του  $\mathbb{R}^2$ , ενώ το  $\Sigma$  δεν είναι τόπος, διότι δεν είναι ανοικτό σύνολο.



Σχήμα 1.2. Το συμπαγές σύνολο  $\Sigma$ .

### Παράδειγμα 2

Θεωρούμε το σύνολο

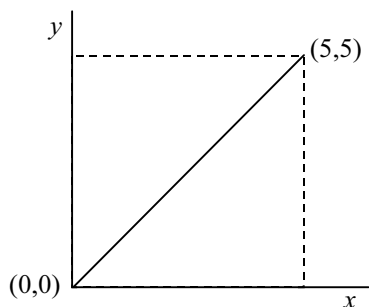
$$A = \{(x, y) \mid y = x, 0 \leq x \leq 5\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Ζητείται να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $A$  αποτελείται από τα σημεία της ευθείας  $y = x$  μεταξύ των σημείων  $(0, 0)$  και  $(5, 5)$  (Σχήμα 1.3). Το σύνολο  $A$  δεν έχει εσωτερικά σημεία επομένως  $\underline{A} = \emptyset$ . Το σύνολο  $A$  είναι περατωμένο και συναφές, όμως δεν είναι τόπος του  $\mathbb{R}^2$ . Κάθε σημείο του είναι οριακό και συνοριακό.

Συνεπώς έχουμε

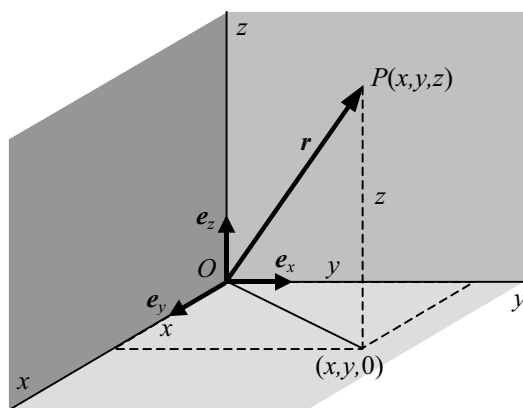
$$A' = \partial A = A.$$



**Σχήμα 1.3.** Το σύνολο  $A$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζει η αρχή των αξόνων  $(0, 0)$  και το σημείο  $(5, 5)$ .

### 1.3 Συστήματα συντεταγμένων στο χώρο $R^3$

Σε πολλά προβλήματα Φυσικής είναι απαραίτητη η χρήση ενός συστήματος συντεταγμένων. Το απλούστερο σύστημα συντεταγμένων είναι το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** που φαίνεται στο σχήμα 1.4. Αποτελείται από τρεις άξονες  $Ox, Oy, Oz$ , ανά δύο κάθετους μεταξύ τους, με κοινή αρχή το σημείο  $O$ . Έστω  $P$  ένα σημείο του χώρου  $R^3$  και  $r$  το διάνυσμα θέσης του σημείου  $P$ . Τότε γράφουμε  $P = P(x, y, z)$ , όπου  $x, y, z$  οι αλγεβρικές τιμές των προβολών του διανύσματος  $r$  ως προς τους τρεις άξονες  $Ox, Oy$  και  $Oz$ , αντίστοιχα, που ονομάζονται συντεταγμένες του  $P$  αλλά και του διανύσματος  $r$ .



**Σχήμα 1.4.** Το δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

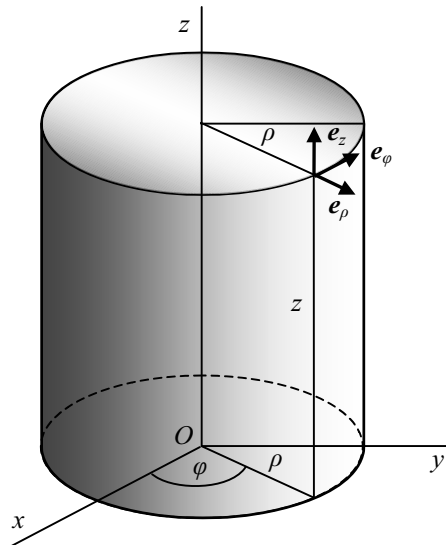
Το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  γράφεται  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , όπου  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  είναι οι διανυσματικές μονάδες κατά μήκος των αξόνων  $Ox$ ,  $Oy$  και  $Oz$  αντίστοιχα. Τα διανύσματα  $x\mathbf{e}_x$ ,  $y\mathbf{e}_y$  και  $z\mathbf{e}_z$  αποτελούν τις τρεις **συνιστώσες** του  $\mathbf{r}$ .

Τα τρία επίπεδα συντεταγμένων  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  διαιρούν το χώρο  $R^3$  σε οκτώ τμήματα τα οποία λέγονται ογδοημόρια. Το σύστημα λέγεται δεξιόστροφο, επειδή ένας δεξιόστροφος κοχλίας θα προχωρήσει κατά τη θετική φορά του άξονα  $z$ , όταν ο άξονας  $Ox$  περιστρέφεται κατά γωνία  $90^\circ$  για να συμπέσει με τον άξονα  $Oy$ .

Η μελέτη συστημάτων που παρουσιάζουν άξονα συμμετρίας γίνεται ευκολότερη με τη χρησιμοποίηση των κυλινδρικών συντεταγμένων  $(\rho, \varphi, z)$  που φαίνονται στο σχήμα 1.5. Η συντεταγμένη  $\rho > 0$  είναι η απόσταση του θεωρούμενου σημείου  $P$  από τον άξονα  $Oz$ , η γωνία  $\varphi$  μετρείται δεξιόστροφα από  $0$  έως  $2\pi$  με αρχή τον άξονα  $Ox$ , ενώ η τρίτη συντεταγμένη είναι η απόσταση του σημείου από το επίπεδο  $(x, y)$ . Οι εξισώσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad (1.6)$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$



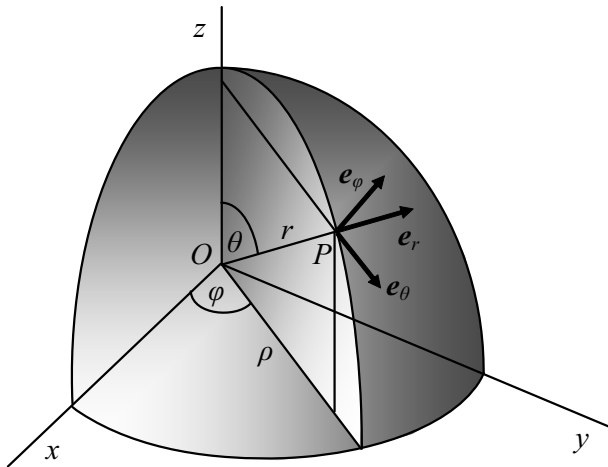
Σχήμα 1.5. Κυλινδρικές συντεταγμένες.

Οι διανυσματικές μονάδες  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  στο σύστημα των κυλινδρικών συντεταγμένων, αποτελούν και αυτές με τη σειρά τους ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις που τις συνδέουν με τις αντίστοιχες καρτεσιανές είναι

$$e_\rho = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y, \quad e_\varphi = -\sin\varphi e_x + \cos\varphi e_y, \quad e_z = e_z. \quad (1.7)$$

Είναι φανερό ότι στο χώρο  $R^2$ , όπου  $z = 0$ , οι κυλινδρικές συντεταγμένες ανάγονται στις γνωστές πολικές συντεταγμένες.

Τέλος, η μελέτη φυσικών συστημάτων που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία απλουστεύεται με τη χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων  $(r, \varphi, \theta)$  που φαίνονται στο σχήμα 1.6. Εδώ για τον προσδιορι-



Σχήμα 1.6. Σφαιρικές συντεταγμένες.

σμό της θέσης ενός σημείου του χώρου  $R^3$  χρησιμοποιούμε την απόσταση  $|OP| = r$ , τη γωνία  $\varphi$  όπως και στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων και τη γωνία  $\theta$  που μετρείται από το θετικό άξονα  $Oz$  και μεταβάλλεται από  $0$  έως  $\pi$ . Οι εξισώσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις και σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (1.8)$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \theta = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Οι διανυσματικές μονάδες  $e_r$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_\theta$  στο σύστημα των σφαιρικών

συντεταγμένων, αποτελούν και αυτές ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις που τις συνδέουν με τις καρτεσιανές διανυσματικές μονάδες είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

### Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση που δίνει το δυναμικό βαρύτητας ενός δισκοειδούς γαλαξία, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, με αρχή το κέντρο του και το επίπεδο  $(x, y)$  να συμπίπτει με το επίπεδο του δίσκου, είναι

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{\left\{x^2 + y^2 + \left[a + (z^2 + h^2)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2}}, \quad (1.10)$$

όπου  $M$  είναι η μάζα του γαλαξία,  $G$  η παγκόσμια σταθερή της βαρύτητας, ενώ  $h, a$  ( $h \ll a$ ) είναι παράμετροι.

ΛΥΣΗ. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες η σχέση (1.10) γράφεται

$$V(\rho, z) = -\frac{GM}{\left\{\rho^2 + \left[a + (z^2 + h^2)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2}}, \quad (1.11)$$

Παρατηρούμε ότι η συμμετρία του δυναμικού ως προς τον άξονα  $z$  ελάττωσε κατά μία τις μεταβλητές της συνάρτησης (1.10) στην έκφραση (1.11).

### Παράδειγμα 2

Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης, με την οποία σφαιρικός πλανήτης έλκει ένα δορυφόρο του, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του πλανήτη είναι

$$F(x, y, z) = -\frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.12)$$

όπου  $M$  και  $m$  είναι η μάζα του πλανήτη και του δορυφόρου αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ. Σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων η έκφραση (1.12) απλουστεύεται και γράφεται

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2}. \quad (1.13)$$

Βλέπουμε ότι η σφαιρική συμμετρία απλοποίησε σημαντικά την έκφραση (1.12) και τη μετέτρεψε σε συνάρτηση μίας μεταβλητής.

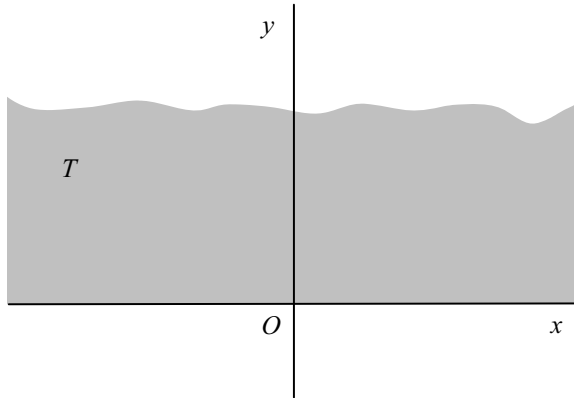
Παρατηρούμε ότι η αλλαγή συστήματος συντεταγμένων διευκολύνει τη μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος, ενώ ο φυσικός νόμος παραμένει αναλλοίωτος.

### 1.4 Λυμένες ασκήσεις

#### Άσκηση 1.1

Δίνεται το σύνολο  $T = \{(x, y) | y > 0\} \subset R^2$ . Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $T$ , το οποίο φαίνεται στο σχήμα 1.7, αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται επάνω από τον άξονα  $x$ .



Σχήμα 1.7. Το σύνολο  $T$  είναι ένας άπειρος τόπος του  $R^2$ .

Το σύνορό του είναι το σύνολο

$$\partial T = \{(x, y) | y = 0\} \subset R^2,$$

δηλαδή όλα τα σημεία που ανήκουν στον άξονα  $x$ . Το παράγωγο σύ-

νολό του  $T'$  είναι το σύνολο

$$T' = \{(x,y) | y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Κάθε σημείο του συνόλου  $T$  είναι εσωτερικό του σημείου, επομένως  $\underline{T} = T$ . Το σύνολο  $T$  είναι ένα άπειρο ανοικτό σύνολο είναι δηλαδή ένας **άπειρος τόπος** του  $\mathbb{R}^2$ . Το συμπλήρωμά του είναι το σύνολο

$$CT = \{(x,y) | y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

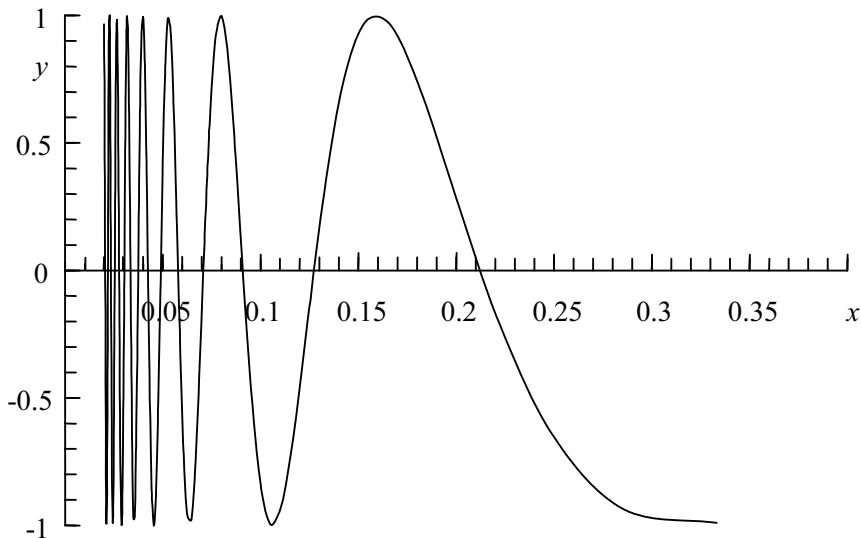
το οποίο είναι ένα κλειστό άπειρο σύνολο.

### Άσκηση 1.2

Δίνεται το σύνολο  $A = \{(x, y) | y = \cos(1/x), x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $A$  αποτελείται από τα σημεία της καμπύλης που φαίνεται στο σχήμα 1.8. Το σύνολο αυτό δεν έχει εσωτερικά σημεία, επομένως

$$\underline{A} = \emptyset.$$



Σχήμα 1.8. Το σύνολο  $A$ .

Πρόκειται για ένα σύνολο που δεν είναι συναφές ούτε φραγμένο. Όλα τα σημεία του είναι συνοριακά σημεία. Εκτός από τα σημεία του, συ-



νοριακά σημεία του είναι και τα σημεία του συνόλου  $\{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}$ . Αυτό συμβαίνει, διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \cos(1/x)$  μπορεί να φθάσει οσονδήποτε κοντά στον άξονα  $y$ . Συνεπώς έχουμε

$$\partial A = A' = A \cup \{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\} \subset R^2$$

### Άσκηση 1.3

Σχεδιάστε το σύνολο

$$B = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 3\} \subset R^2$$

και χαρακτηρίστε τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $B$  αποτελείται από τα σημεία του παραλληλογράμμου που φαίνεται στο σχήμα 1.9. Όλα τα σημεία του συνόλου  $B$  είναι οριακά σημεία του. Επομένως  $B' = B$ . Το εσωτερικό του συνόλου  $B$  είναι το σύνολο

$$\underline{B} = \{(x,y) | 1 < x < 5, 1 < y < 3\} \subset B.$$

Τα συνοριακά σημεία του  $B$  είναι τα σημεία της περιμέτρου του παραλληλογράμμου. Το σύνολο  $B$  είναι συναφές σύνολο. Επίσης είναι κλειστό και φραγμένο. Επομένως είναι ένα συμπαγές σύνολο.

### Άσκηση 1.4

Θεωρούμε το σύνολο

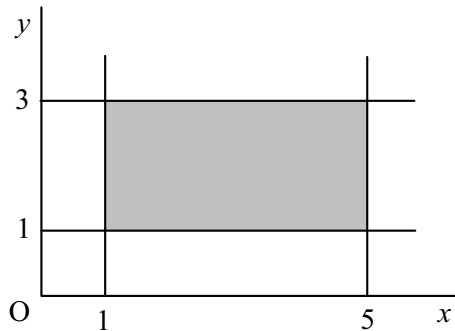
$$\Gamma = \{(x,y) | x,y \text{ ρητοί}, 1 < x < 5, 1 < y < 3\} \subset R.$$

Ζητείται να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $\Gamma$  αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο παραλληλόγραμμο του σχήματος 1.9 και οι συντεταγμένες τους είναι ρητοί αριθμοί. Είναι φανερό ότι το σύνολο  $\Gamma$  δεν έχει εσωτερικά σημεία διότι στην περιοχή ενός ρητού αριθμού, οσονδήποτε μικρή και αν είναι αυτή, υπάρχουν σημεία με συντεταγμένες άρρητους αριθμούς και επομένως

$$\underline{\Gamma} = \emptyset.$$

Το σύνολο  $\Gamma$  δεν είναι συναφές, διότι δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ευθύγραμμο τμήμα που να αποτελείται μόνο από ρητούς αριθμούς. Κάθε σημείο του  $\Gamma$  είναι συγχρόνως οριακό και συνοριακό του σημείου. Συνοριακά σημεία του συνόλου  $\Gamma$  είναι και όλα τα σημεία της περιμέ-



Σχήμα 1.9. Το σύνολο  $\Gamma$ .

τρου του παραλληλογράμμου. Οριακά σημεία του  $\Gamma$  είναι και όλα τα σημεία του εσωτερικού του παραλληλογράμμου, των οποίων η μία τουλάχιστον συντεταγμένη είναι άρρητος αριθμός.

Επομένως έχουμε

$$\Gamma' = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 3\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Το σύνολο  $\Gamma$  είναι φραγμένο, δεν είναι όμως κλειστό, διότι δεν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Συνεπώς δεν είναι συμπαγές.

### Άσκηση 1.5

Θεωρούμε το σύνολο  $K = K_1 - K_2$ , όπου

$$K_1 = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} < 2\} \subset \mathbb{R}^2$$

και 
$$K_2 = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο  $K$  και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο  $K$  αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο δακτύλιο που φαίνεται στο σχήμα 1.10. Όλα τα σημεία του συνόλου είναι εσωτερικά του σημεία, επομένως

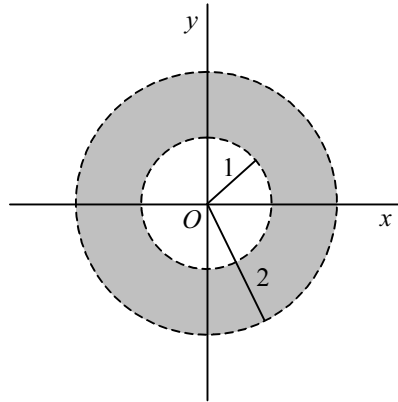
$$\underline{K} = K,$$

δηλαδή το  $K$  είναι ανοικτό σύνολο. Τα συνοριακά σημεία του συνόλου  $K$  είναι τα σημεία των δύο περιφερειών είναι δηλαδή

$$\partial K = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} = 2\} \cup \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Κάθε σημείο του είναι και οριακό του σημείο. Συνεπώς

$$K' = K \cup \partial K.$$



Σχήμα 1.10. Το σύνολο  $K$ .

Το σύνολο  $K$  είναι συναφές και ανοικτό σύνολο, άρα είναι τόπος του  $R^2$ . Παρατηρούμε ότι το σύνολο  $K$  είναι περατωμένο δεν είναι όμως κυρτό σύνολο.

### 1.5 Ασκήσεις προς λύση

- 1.1 Δίνεται το σύνολο  $A = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset R^2$ . Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.
- 1.2 Δίνεται το σύνολο  $A = \{(x, y) \mid xy \geq 0\} \subset R^2$ . Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.
- 1.3 Δίνεται το σύνολο  $B = \{(x, y) \mid y = x^2 \geq 0\} \subset R^2$ . Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.
- 1.4 Δίνεται το σύνολο  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , όπου
 
$$\Sigma_1 = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} \geq 3\} \subset R^2$$
 και  $\Sigma_2 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \subset R^2$ .  
 Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.
- 1.5 Δίνεται το σύνολο  $A = A_1 \cap A_2$  όπου
 
$$A_1 = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset R^2$$
 και  $A_2 = \{(x, y) \mid x^2 + 9y^2 \leq 1\} \subset R^2$ .  
 Να σχεδιαστεί το σύνολο  $A$  και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.6 Δίνεται το σύνολο  $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$  όπου

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{και } \Gamma_2 = \{(x, y) \mid 4x^2 + 16y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο  $\Gamma$  και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.7 Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα σημεία του συνόλου: Ακέραιοι αριθμοί του συνόλου  $\Gamma$  της άσκησης 1.6.

1.8 Περιγράψτε τις επιφάνειες  $\rho = \text{σταθερό}$ ,  $\varphi = \text{σταθερό}$  και  $z = \text{σταθερό}$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

1.9 Περιγράψτε τις επιφάνειες  $r = \text{σταθερό}$ ,  $\varphi = \text{σταθερό}$  και  $\theta = \text{σταθερό}$  σε σφαιρικές συντεταγμένες.

1.10 Εκφράστε την εξίσωση του επιπέδου  $z = y$  σε σφαιρικές συντεταγμένες.

1.11 Να γραφεί η εξίσωση  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.12 Να σχεδιαστεί η καμπύλη της οποίας η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες είναι η  $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ .

1.13 Να γραφεί η εξίσωση  $x^3 + y^3 = 3xy$  σε πολικές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.14 Να γραφεί η εξίσωση  $y^2 = x^3 / (2a - x)$  σε πολικές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.15 Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου

$$S = \left( \frac{1}{2n^2}, 1 + \frac{1}{n} \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

όπου  $n = 1, 2, \dots$

1.16 Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου

$$K = \left( \frac{(-1)^n}{2}, 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

όπου  $n = 1, 2, \dots$

1.17 Να χαρακτηριστούν τα σημεία των συνόλων  $S$  και  $K$  των ασκήσεων 1.15 και 1.16.

1.18 Δίνεται το σύνολο  $A$  των ακεραίων σημείων του  $R^3$  δηλαδή το σύνολο των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες. Να χαρακτηριστούν τα σημεία του συνόλου.

1.19 Δίνεται το σύνολο

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq 0, x^2 - y^2 > 0\} \subset R^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.20 Δίνεται το σύνολο

$$G = \{(x, y) \mid x^2 + 9y^2 \leq 25, y \geq 0, x^2 - y > 0\} \subset R^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.21 Περιγράψτε το σύνολο

$$A = \{P \in R^2 \mid |PP_1| + |PP_2| < 1\} \subset R^2,$$

όπου  $P_1$  και  $P_2$  είναι σταθερά σημεία.

1.22 Δίνεται το σύνολο  $\Gamma = A - B$ , όπου

$$A = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\} \subset R^2$$

και  $B = \{(x, y) \mid 0 < y < 2, x = 1/2n > 0, n = 1, 2, \dots\} \subset R^2.$

Να περιγραφεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.