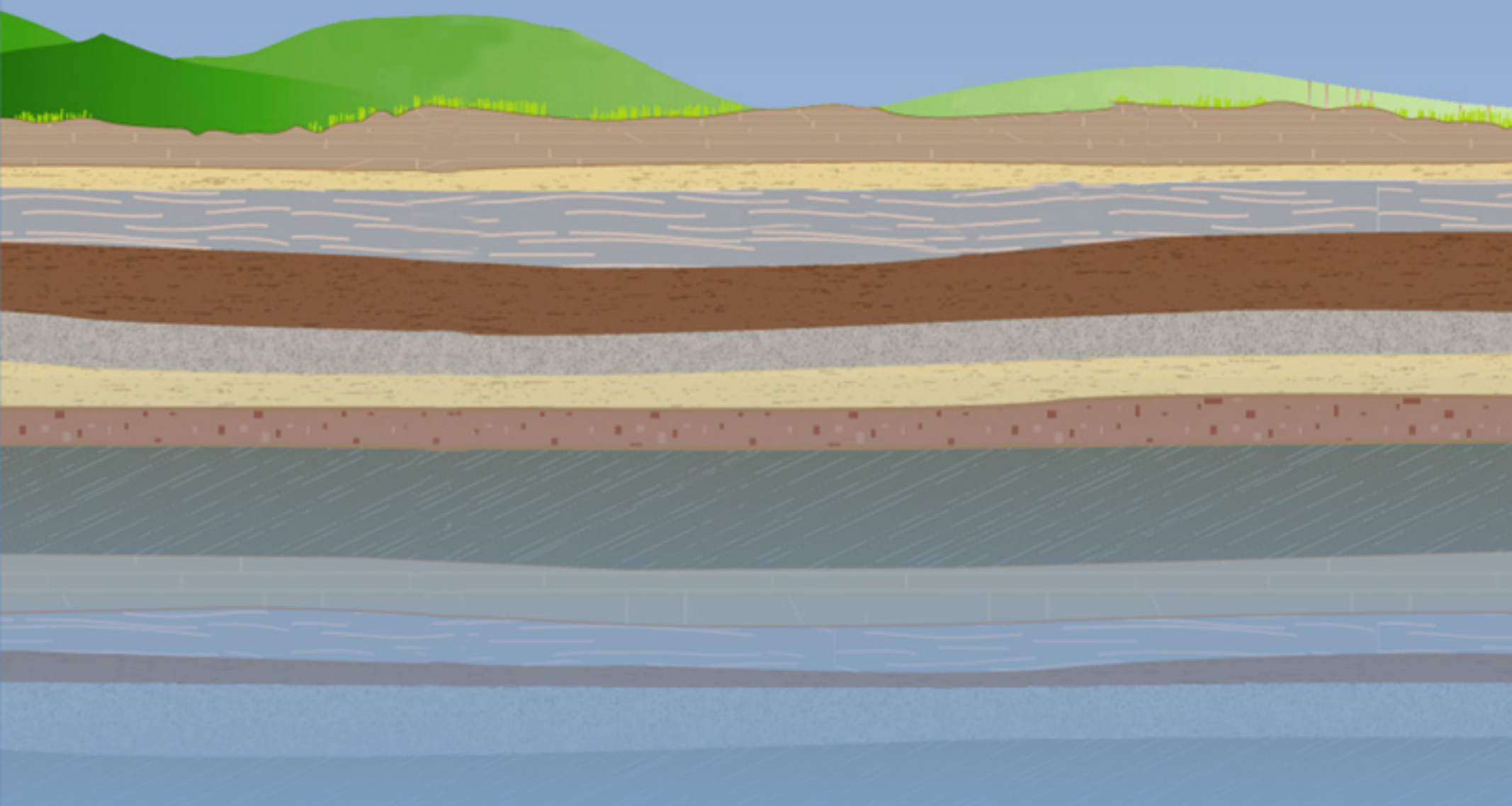


Διαμαντής Νικ. Καραμούζης

Καθηγητής Α.Π.Θ.

Στραγγίσεις Εδαφών



Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-315-9

© Copyright, 2012, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Διαμαντής Νικ. Καραμούζης

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

Εκτύπωση

Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:

Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα

Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το κύριο αντικείμενο της επιστήμης των Στραγγίσεων των εδαφών είναι η απομάκρυνση του πλεονάζοντος επιφανειακού και υπόγειου νερού και η διατήρηση της υπόγειας στάθμης σε ένα επιθυμητό βάθος κάτω από την επιφάνεια του εδάφους μιας περιοχής. Αυτή επιτυγχάνεται με τη μελέτη και κατασκευή των στραγγιστικών δικτύων, τα οποία αποτελούνται από στραγγιστικές τάφρους ή στραγγιστικούς σωλήνες ή συνδυασμό τους.

Στα γεωργικά εδάφη ο βασικός σκοπός κάθε στραγγιστικού δικτύου είναι να υποβιβάζει σε εύλογο χρονικό διάστημα και να διατηρεί τη στάθμη του υπόγειου νερού κάτω από τη ζώνη του ριζοστρώματος, έτσι που να εξασφαλίζεται ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την κανονική μη προβληματική ανάπτυξη και την υψηλή απόδοση των καλλιεργειών, με το μικρότερο δυνατόν κόστος, επιτυγχάνοντας έτσι υψηλή παραγωγικότητα και ως εκ τούτου και μεγαλύτερο κέρδος.

Η υπόγεια στάθμη των εδαφών μιας περιοχής μπορεί να ανέρχεται από τη βαθιά διήθηση νερών της βροχής ή της άρδευσης, από την εισροή υπόγειου νερού από διπλανή υψηλότερη περιοχή καθώς και από την εισροή με ανοδική κίνηση από ένα ημίκλειστο υδροφορέα, που βρίσκεται κάτω από αρτεσιανές συνθήκες. Όμως μια υψηλή υπόγεια στάθμη έχει πολλές δυσμενείς επιπτώσεις στο καλλιεργούμενο έδαφος, γιατί εμποδίζει τη χρήση των καλλιεργητικών μηχανημάτων, αυξάνει τη συμπίεση του εδάφους από τα γεωργικά μηχανήματα και τα ζώα, εμποδίζει τη θέρμανση του εδάφους την άνοιξη και καθυστερεί το φύτρωμα των σπόρων, δημιουργεί αναερόβιες και τοξικές συνθήκες στα φυτά και διευκολύνει τη μετακίνηση και συγκέντρωση αλάτων στην περιοχή του ριζοστρώματος.

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται οι νόμοι και οι εξισώσεις που διέπουν τις στραγγίσεις των εδαφών με αρκετά απλοποιημένες διαδικασίες, σε σχέση με την πολύπλοκη πραγματικότητα αυτού του φαινομένου. Έτσι οι εξισώσεις που προκύπτουν έχουν απλούστερη μορφή και επιδέχονται αναλυτικές ή και αριθμητικές λύσεις, οι οποίες μπορούν να εφαρμόζονται εύκολα στην πράξη.

Επειδή το βιβλίο αυτό γράφτηκε κυρίως για Γεωπόνους και Μηχανικούς, που ασχολούνται με προβλήματα στράγγισης των εδαφών, έγινε προσπάθεια να

χρησιμοποιηθούν μαθηματικά όχι ιδιαίτερα υψηλής στάθμης. Για τον όποιο επιστήμονα που θα μελετήσει αυτό το βιβλίο για μάθηση, θεωρείται ότι έχει το μαθηματικό υπόβαθρο ενός φοιτητή με στοιχειώδεις βασικές γνώσεις του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, τη μερική παραγωγή και στοιχεία διαφορικών εξισώσεων και αριθμητικής ανάλυσης. Υπόβαθρο επίσης από υδραυλική άποψη θεωρούνται τα στοιχεία της γενικής υδραυλικής και υδρολογίας και από εδαφολογική άποψη στοιχεία της γενικής εδαφολογίας και της φυσικής του εδάφους. Οπωσδήποτε, όμως έχει ληφθεί μέριμνα ώστε οι όποιες μαθηματικές και υδραυλικές έννοιες, οι οποίες χρησιμοποιούνται στο βιβλίο αυτό, να περιγράφονται συνοπτικά στο κείμενο ή στα παραρτήματα του βιβλίου.

Ανεξάρτητα από τις μαθηματικές και υδραυλικές γνώσεις, που χρειάζονται για την εξαγωγή και επίλυση των εξισώσεων στα γενικά και κατά περίπτωση ειδικιά προβλήματα των στραγγίσεων, οι τελικές αναλυτικές λύσεις και οι μαθηματικοί τύποι που προκύπτουν από αυτές, περιγράφονται και εξηγούνται αναλυτικά και τονίζονται ιδιαίτερα οι παραδοχές και οι συνθήκες για τις οποίες ισχύουν. Οι ειδικές συναρτήσεις, που εμπεριέχονται στους διάφορους μαθηματικούς τύπους, περιγράφονται και παρουσιάζονται με διαγράμματα μέσα στο κείμενο ή με αριθμητικούς πίνακες στα παραρτήματα του βιβλίου. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην λεπτομερή και κατά βήματα εφαρμογή των διαφόρων μαθηματικών τύπων σε πρακτικά προβλήματα. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι παρμένα από προβλήματα της διεθνούς και ελληνικής βιβλιογραφίας και βοηθούν στην καλύτερη εμπέδωση και κατανόηση της θεωρίας. Οι περιγραφές των εφαρμογών και οι λύσεις των παραδειγμάτων μπορούν να κατανοηθούν εύκολα από το Γεωπόνο και Μηχανικό της πράξης, καθώς δεν απαιτούν ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις.

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε ως διδακτικό ενός εξαμηνιαίου μαθήματος Στραγγίσεων των Εδαφών στην κατεύθυνση των Εγγείων Βελτιώσεων της Γεωπονικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η ύλη του επιλέχθηκε από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία, η οποία χρησιμοποιήθηκε από το συγγραφέα κατά τη διδασκαλία του μαθήματος για μια τριακονταπενταετία. Χωρίζεται σε δέκα κεφάλαια και η διάρθρωσή της ακολούθησε μια μέση οδό αυτής που καθιερώθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία και κυρίως στα διδακτικά βιβλία που χρησιμοποιούνται στις Η.Π.Α., τη Ρωσία, την Αγγλία, την Ολλανδία, το Ισραήλ καθώς και πολλές άλλες χώρες.

Στο **πρώτο κεφάλαιο** δίνονται οι βασικές αρχές των στραγγίσεων των εδαφών. Σ' αυτές περιέχονται οι εισαγωγικές έννοιες, η μέτρηση και η σύνταξη των διαγραμμάτων της υπόγειας στάθμης, ο νόμος του Darcy και ο υπολογισμός της υδραυλικής αγωγιμότητας και του πορώδους των εδαφών καθώς και της ειδικής απόδοσής τους σε νερό.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** γίνεται η εξαγωγή των μερικών διαφορικών εξισώσεων του Boussinesq της ασταθούς στράγγισης των εδαφών με ή χωρίς επιφανειακή και υπόγεια εισροή νερού και οι τρόποι γραμμικοποίησης αυτών των εξισώσεων.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** περιγράφεται η σταθερή στράγγιση των εδαφών και οι διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού της ισαποχής των στραγγιστικών αγωγών σε ομογενή και ισότροπα, σε διαστρωμένα και ισότροπα, σε ομογενή και ανισότροπα και σε διαστρωμένα ανισότροπα εδάφη, καθώς και η επίδραση μιας εδαφικής ζώνης κατάλυσης με νερό στη στράγγισή τους.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων της ασταθούς στράγγισης, με διαχωριζόμενες μεταβλητές, με μετασχηματισμούς Laplace και με μεταβλητές ομοιότητας.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι λύσεις της ασταθούς κίνησης του νερού προς μια τάφρο, με ή χωρίς επιφανειακή επαναπλήρωση.

Στο **έκτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι λύσεις της ασταθούς στράγγισης των εδαφών με παράλληλους αγωγούς, μελετώντας προβλήματα πτώσης της υπόγειας στάθμης, με οριζόντια ή με καμπύλη αρχική υπόγεια στάθμη, χωρίς επαναπλήρωση και διαρροή (προβλήματα των Glover-Dumm), καθώς και της ανύψωσης της υπόγειας στάθμης εξαιτίας επιφανειακής επαναπλήρωσης (πρόβλημα των van de Leur και Maaland).

Στο **έβδομο κεφάλαιο** παρουσιάζονται διάφορες νεώτερες λύσεις προβλημάτων ασταθούς στράγγισης με ή χωρίς επαναπλήρωση, της ανόδου ή της καθόδου της υπόγειας στάθμης, με σταθερές ή με μεταβαλλόμενες τιμές επιφανειακής ή υπόγειας επαναπλήρωσης.

Στο **όγδοο κεφάλαιο** παρουσιάζονται προσεγγιστικές λύσεις με τη μέθοδο της βαθμιαίας διαδοχής σταθερών καταστάσεων, σε προβλήματα ασταθούς στράγγισης ομογενών και διαστρωμένων εδαφών. Στο ίδιο κεφάλαιο εντάχτηκαν και οι κλασικές αναλυτικές μη γραμμικές λύσεις του Boussinesq για την ασταθή στράγγιση ομογενών εδαφών.

Στο **ένατο κεφάλαιο** παρουσιάζονται στοιχεία για τα κριτήρια της σταθερής και της ασταθούς στράγγισης των εδαφών, το επιθυμητό βάθος της υπόγειας στάθμης από την επάνεια του εδάφους, τόσο κατά την καλλιεργητική περίοδο, όσο και εκτός αυτής.

Στο **δέκατο κεφάλαιο** παρουσιάζονται στοιχεία για τα είδη των στραγγιστικών αγωγών, η κίνηση του νερού σ' αυτούς, στοιχεία σχεδίασης, κατασκευής και συντήρησης, τόσο των τάφρων όσο και των στραγγιστικών σωλήνων. Το βιβλίο ολοκληρώνεται με την παράθεση δύο παραρτημάτων.

Στο **Παράρτημα I** παρουσιάζονται χρήσιμες σχέσεις που συναντώνται σε λύσεις πολλών προβλημάτων των στραγγίσεων των εδαφών, ενώ στο **Παράρτημα II** παρουσιάζονται οι αριθμητικές τιμές πολλών χρήσιμων συναρτήσεων, που αποτελούν τμήματα των διαφόρων λύσεων των επιμέρους προβλημάτων των στραγγίσεων των εδαφών. Τέλος εκτενέστατη είναι η ελληνική και η διεθνής **βιβλιογραφία**, η οποία καλύπτει το σύνολο, σχεδόν, του γνωστικού αντικειμένου των στραγγίσεων.

Παρόλα τα αναφερθέντα παραπάνω, η ύλη του παρόντος δεν καλύπτει το σύνολο των προβλημάτων των στραγγίσεων των εδαφών, καθώς τα πιο πολύπλοκα προβλήματα λύνονται σήμερα με αριθμητικές μεθόδους και μαθηματικά ομοιώματα της μονοδιάστατης και της δισδιάστατης ασταθούς κίνησης του υπόγειου νερού στο έδαφος, αντικείμενο το οποίο τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιάσει αλματώδη ανάπτυξη. Η ύλη αυτή καλύπτεται σε ιδιαίτερα μαθήματα, τα οποία δίνονται σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

Θεσσαλονίκη, 2012

Δ.Ν. Καραμούζης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές αρχές των στραγγίσεων των εδαφών

1.1. Εισαγωγικές έννοιες - Υπόγεια στάθμη	1
1.1.1. Γενικότητες	1
1.1.2. Κατάταξη στραγγιζόμενων εδαφών και διαπερατότητα	2
1.2. Μέτρηση και σύνταξη διαγραμμάτων της υπόγειας στάθμης	5
1.2.1. Εγκατάσταση πιεζομετρικών σωλήνων	5
1.2.2. Σύνταξη διαγραμμάτων της υπόγειας στάθμης	6
1.3. Νόμος του Darcy	7
1.3.1. Έκφραση και πεδίο ισχύος του νόμου του Darcy	7
1.3.2. Υδραυλική αγωγιμότητα	11
1.3.3. Εργαστηριακός υπολογισμός της υδραυλικής αγωγιμότητας	14
1.4. Μέτρηση της υδραυλικής αγωγιμότητας στον αγρό	16
1.4.1. Μέθοδος τον φρεατίου σε ομογενή εδάφη	16
1.4.2. Μέθοδος τον φρεατίου σε διαστρωμένα εδάφη	28
1.4.3. Μέθοδος του πιεζομέτρου	32
1.4.4. Μέθοδος των δυο φρεατίων του Childs	35
1.4.5. Υπολογισμός υδραυλικής αγωγιμότητας με δεδομένα φρεατίου ομογενούς εδάφους	37
1.4.6. Υπολογισμός υδραυλικής αγωγιμότητας με δεδομένα δύο φρεατίων διαστρωμένου εδάφους	39
1.5. Πορώδες και Ειδική Απόδοση	42
1.5.1. Το πορώδες του εδάφους	42
1.5.2. Ειδική απόδοση σε νερό του εδάφους	43
1.5.3. Μέτρηση της ειδικής σε νερό απόδοσης στον αγρό	49

Κεφάλαιο 2

Εξιώσεις ασταθούς στράγγισης των εδαφών

2.1. Εξίσωση του Boussinesq	53
2.1.1. Γενικότητες	53
2.1.2. Εξαγωγή της εξίσωσης του Boussinesq	54

2.2. Γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης Boussinesq	57
2.2.1. Γενικότητες	57
2.2.2. Πρώτος τρόπος γραμμικοποίησης	57
2.2.3. Δεύτερος τρόπος γραμμικοποίησης	59
2.2.3. Τρίτος τρόπος γραμμικοποίησης	62

Κεφάλαιο 3

Σταθερή στράγγιση εδαφών

3.1. Σταθερή κίνηση του νερού στο έδαφος	65
3.1.1. Γενικότητες	65
3.1.2. Κίνηση του νερού προς τάφρο	66
3.1.3. Κίνηση του νερού προς τάφρο με σταθερή επαναπλήρωση	68
3.2. Ισαποχή στραγγιστικών αγωγών	72
3.2.1. Γενικότητες των στραγγίσεων με παράλληλες τάφρους	72
3.2.2. Ισαποχή με τάφρους μέχρι το αδιαπέρατο υπόστρωμα	73
3.2.3. Ισαποχή με τάφρους πάνω από το αδιαπέρατο υπόστρωμα	75
3.3. Ισαποχή στραγγιστικών αγωγών σε διαστρωμένα εδάφη	77
3.3.1. Μέθοδος Hooghoudt	77
3.3.2. Διόρθωση σφάλματος της μεθόδου Hooghoudt	79
3.3.3. Εφαρμογή της μεθόδου Hooghoudt	81
i. Πρώτος κύκλος υπολογισμών	81
ii. Δεύτερος κύκλος υπολογισμών	82
iii. Τρίτος κύκλος υπολογισμών	83
3.3.4. Νομογραφήματα van Beers της μεθόδου Hooghoudt	83
3.3.5. Γενικευμένο νομογράφημα της μεθόδου Hooghoudt (Sakkas, 1975)	86
3.3.6. Γενικευμένες προσεγγιστικές λύσεις της μεθόδου Hooghoudt	89
α) Λύση με τις προσεγγιστικές εξισώσεις των Σακκά-Αντωνόπουλου	96
β) Λύση με τα νομογραφήματα του Σχήματος 3.10 των Σακκά-Αντωνόπουλου	97
3.3.7. Μέθοδος Kirkham	98
3.3.8. Μέθοδος Dagan	101
3.3.9. Μέθοδος Τερζίδη	104
3.3.10. Εφαρμογή της μεθόδου Τερζίδη σε ομογενή εδάφη	109
3.3.11. Εφαρμογή των μεθόδων Hooghoudt, Kirkham, Dagan και Τερζίδη για διαστρωμένα εδάφη	111
3.4. Διαστρωμένα εδάφη με αγωγούς σε οποιαδήποτε θέση	114
3.4.1. Γενικότητες	114

3.4.2. Μέθοδος Ernst	114
I. Ομογενή εδάφη	117
II. Εδάφη με διαστρώσεις	117
3.4.3. Πορεία επίλυσης με τη μέθοδο Ernst	119
3.4.4. Παραδείγματα της μεθόδου του Ernst	122
3.4.5. Μέθοδος των Toksöz και Kirkham	125
3.4.6. Εφαρμογή της μεθόδου Toksöz και Kirkham	133
3.4.7. Παραδείγματα της μεθόδου Toksöz και Kirkham	134
3.4.8. Μέθοδος Τερζίδη για διαστρωμένα εδάφη	138
3.4.9. Παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου Τερζίδη	141
3.4.10. Σύγκριση των μεθόδων Ernst, Toksöz-Kirkham και Τερζίδη	143
Α) Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα του USBR	143
Β) Σύγκριση με θεωρητικά παραδείγματα	146
3.5. Στράγγιση σε ανισότροπα εδάφη	147
3.5.1. Γενικές έννοιες	147
3.5.2. Μέθοδος Τερζίδη για ομογενή ανισότροπα εδάφη	149
3.5.3. Παράδειγμα υπολογισμού ισαποχής σε ομογενές ανισότροπο έδαφος	150
3.5.4. Στράγγιση διαστρωμένων ανισότροπων εδαφών	151
3.5.5. Παράδειγμα στράγγισης διαστρωμένων ανισότροπων εδαφών	155
3.6. Στράγγιση εδαφών με ζώνη κατάκλυσης	156
3.6.1. Περιγραφή του προβλήματος	156
3.6.2. Μαθηματική τοποθέτηση και λύση του προβλήματος	157
3.6.3. Παράδειγμα στράγγισης με ζώνη κατάκλυσης	160

Κεφάλαιο 4

Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ασταθούς στράγγισης

4.1. Γενική περιγραφή των μεθόδων	163
4.1.1. Μαθηματική τοποθέτηση του φυσικού προβλήματος	163
4.1.2. Λύση με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών	165
4.1.3. Λύση με τη μέθοδο μετασχηματισμών Laplace	166
4.1.4. Λύση με τη μέθοδο μεταβλητών ομοιότητας	170
4.2. Μέθοδος μεταβλητών ομοιότητας	172
4.2.1. Γενικότητες	172
4.2.2. Λύση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος	173
4.2.3. Λύση ενός όχι καλά τοποθετημένου προβλήματος	177
4.3. Λύσεις ομοιότητας σε γραμμικές και ημιγραμμικές διαφορικές εξισώσεις	180
4.3.1. Ασταθής ροή προς φρεάτιο άντλησης	180

4.3.2.	Λύση της ημιγραμμικής εξίσωσης στραγγίσεων	184
4.3.3.	Λύση της ημιγραμμικής εξίσωσης του φρεατίου	187
4.3.4.	Λύση διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές	189
4.4.	Λύσεις ομοιότητας μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων	191
4.4.1.	Γενικότητες	191
4.4.2.	Πρόβλημα με μη γραμμική ανύψωση της στάθμης σε τάφρο	192
4.4.3.	Πρόβλημα με γραμμική ανύψωση της στάθμης σε τάφρο	197

Κεφάλαιο 5

199

Ασταθής κίνηση του νερού προς τάφρο

5.1.	Γραμμικές λύσεις χωρίς επαναπλήρωση	199
5.1.1.	Γενικότητες	199
5.1.2.	Απότομη πτώση της στάθμης στην τάφρο [$m=0$, $s(0, t)=\alpha$]	202
5.1.3.	Σταθερή παροχή νερού στην τάφρο [$(m=1/2$, $q(0,t)=A$)]	205
5.1.4.	Γραμμική πτώση της στάθμης στην τάφρο [$m=1$, $s(0,t)=\alpha t$]	209
5.1.5.	Γραμμική αύξηση της παροχής στην τάφρο [$m=3/2$, $q(0,t)=\beta t$]	214
5.1.6.	Αυθαίρετη μεταβολή της στάθμης ή της παροχής στην τάφρο	215
5.2.	Γραμμικές λύσεις με επαναπλήρωση	216
5.2.1.	Γενικότητες	216
5.2.2.	Λύση του προβλήματος με σταθερή επαναπλήρωση με τη μέθοδο των ειδώλων	218
5.2.3.	Πρόβλημα με μεταβαλλόμενη επαναπλήρωση από βροχόπτωση ή άρδευση	220
5.3.	Ημιγραμμικές λύσεις σε προβλήματα στραγγίσεων προς τάφρο	221
5.3.1.	Εισαγωγή	221
5.3.2.	Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος	222
5.3.3.	Ημιγραμμικές αναλυτικές λύσεις ομοιότητας	225
5.3.4.	Σύγκριση πειραματικών δεδομένων και αριθμητικών λύσεων	227
5.3.5.	Συμπεράσματα	235

Κεφάλαιο 6

237

Ασταθής στράγγιση με παράλληλους αγωγούς

6.1.	Πρόβλημα στραγγίσεων χωρίς επαναπλήρωση	237
6.1.1.	Τοποθέτηση προβλήματος στραγγίσεων	237
6.1.2.	Λύση του προβλήματος με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών	239

6.2. Προβλήματα με οριζόντια αρχική υπόγεια στάθμη χωρίς επαναπλήρωση και διαρροή	244
6.2.1. Λύση του πρώτου προβλήματος του Glover	244
6.2.2. Απλουστευμένη λύση του Glover	249
6.2.3. Λύση του προβλήματος του Glover με την τρίτη γραμμικοποίηση	250
6.2.4. Μέθοδος Τερζίδη (δεύτερης γραμμικοποίησης) για το πρόβλημα του Glover	256
6.2.5. Στραγγιζόμενη παροχή στο πρόβλημα του Glover (με οριζόντια αρχική υπόγεια στάθμη).....	258
6.3. Προβλήματα με καμπύλη αρχική υπόγεια στάθμη χωρίς επαναπλήρωση και διαρροή	259
6.3.1. Τοποθέτηση και λύση του προβλήματος των Glover-Dumm	259
6.3.2. Απλουστευμένη λύση των Glover-Dumm-Van Beers	264
6.3.3. Στραγγιζόμενη παροχή στο πρόβλημα των Glover-Dumm (με καμπύλη αρχική υπόγεια στάθμη)	266
6.3.4. Λύση του προβλήματος των Glover-Dumm με την τρίτη γραμμικοποίηση	267
6.3.5. Παράδειγμα υπολογισμού της ισαποχής στραγγιστικών αγωγών	269
6.4. Ανύψωση υπόγειας στάθμης εξαιτίας επαναπλήρωσης από βροχοπτώση ή άρδευση	273
6.4.1. Τοποθέτηση του προβλήματος van de Leur και Maasland	273
6.4.2. Λύση του προβλήματος των van de Leur και Maasland	276
6.4.3. Παροχή ανά μονάδα στραγγιζόμενης επιφάνειας	280
6.4.4. Παράδειγμα για σταθερή και συνεχή παροχή καθαρής διήθησης	282
6.4.5. Σταθερή παροχή διήθησης σε περιορισμένη περίοδο	283
6.4.6. Παράδειγμα για σταθερή παροχή διήθησης σε περιορισμένη περίοδο	286
6.4.7. Περιοδική παροχή διήθησης	287
6.4.8. Λύση του προβλήματος van de Leur και Maasland με την τρίτη γραμμικοποίηση	288

Κεφάλαιο 7

Ασταθής στράγγιση εδαφών με ή χωρίς επιφανειακή και υπόγεια επαναπλήρωση

7.1. Προβλήματα με μηδενική ή σταθερή εισροή νερού	291
7.1.1. Γενικότητες	291
7.1.2. Υπολογισμός των επιμέρους εισροών	293
7.1.3. Προβλήματα ασταθούς στράγγισης	296

7.1.4.	Διαφορική εξίσωση προβλημάτων με σταθερές εισροές ή εκροές	298
7.1.5.	Αρχικές και οριακές συνθήκες προβλημάτων με σταθερές εισροές και εκροές	300
7.1.6.	Αδιαστατοποίηση διαφορικής εξίσωσης και βοηθητικών συνθηκών	303
7.1.7.	Πρόβλημα μόνο με επιφανειακή εισροή κατά τη σταθερή στράγγιση ($I_0 \neq 0, q_0 = 0, I_r = 0$) – Πρόβλημα του Glover	305
7.1.8.	Πρόβλημα μόνο με επιφανειακή εισροή κατά την ασταθή στράγγιση ($I_0 = 0, q_0 = 0, I_r \neq 0$) – Πρόβλημα των van de Leur και Maasland	313
7.1.9.	Πρόβλημα χωρίς επιφανειακή εισροή κατά την ασταθή στράγγιση ($I_0 \neq 0, q_0 \neq 0, I_r = 0$)	316
7.1.10.	Πρόβλημα χωρίς επιφανειακή εισροή κατά τη σταθερή στράγγιση ($I_0 = 0, q_0 \neq 0, I_r \neq 0$)	320
7.1.11.	Πρόβλημα με επιφανειακή και υπόγεια εισροή κατά τη σταθερή και την ασταθή στράγγιση ($I_0 \neq 0, q_0 \neq 0, I_r \neq 0$ και $I_0 \neq I_r$)	325
7.1.12.	Διερεύνηση του προβλήματος της παραγράφου 7.1.11	329
7.1.13.	Αριθμητικές εφαρμογές	333
7.2.	Προβλήματα με μεταβαλλόμενη επαναπλήρωση από υποκείμενο ημίκλειστο υδροφορέα	345
7.2.1.	Γενική τοποθέτηση των προβλημάτων	345
7.2.2.	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	347
7.2.3.	Λύση του προβλήματος, με οριζόντια αρχική υπόγεια στάθμη	349
7.2.4.	Λύση του προβλήματος με αρχική υπόγεια στάθμη έλλειψη δευτέρου βαθμού	353
7.2.5.	Λύση του προβλήματος με αρχική υπόγεια στάθμη έλλειψη τετάρτου βαθμού	357
7.3.	Εδάφη πάνω από ημίκλειστο υδροφορέα σε περιοδικά πλημμυρισμένο στραγγιστικό δίκτυο	361
7.3.1.	Τοποθέτηση του προβλήματος	361
7.3.2.	Λύση του προβλήματος και αδιάστατα διαγράμματα	364
7.4.	Εδάφη πάνω σε ημίκλειστο υδροφορέα με χρονικά μεταβαλλόμενη επαναπλήρωση από βροχόπτωση	370
7.4.1.	Γενική τοποθέτηση των προβλημάτων	370
7.4.2.	Λύση του προβλήματος με οριζόντια αρχική υπόγεια στάθμη	374
7.4.3.	Λύση του προβλήματος με ελλειπτική αρχική υπόγεια στάθμη δευτέρου βαθμού	375
7.4.4.	Λύση του προβλήματος με ελλειπτική αρχική υπόγεια στάθμη τετάρτου βαθμού	377
7.4.5.	Αριθμητικές εφαρμογές	379

Κεφάλαιο 8**Προσεγγιστικές λύσεις ασταθούς στράγγισης ομογενών και διαστρωμένων εδαφών**

8.1. Μέθοδος βαθμιαίας διαδοχής σταθερών καταστάσεων	387
8.2. Στράγγιση ομογενών εδαφών	389
8.2.1. Στράγγιση με σωλήνες στο αδιαπέρατο υπόστρωμα	389
8.2.2. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Hooghoudt	390
8.2.3. Ασταθής στράγγιση με τη δυναμική θεωρία του Kirkham	393
8.2.4. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Dagan	394
8.2.5. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Τερζίδη	395
8.3. Στράγγιση διαστρωμένων εδαφών με τους στραγγιστικούς σωλήνες στη διαχωριστική επιφάνεια	396
8.3.1. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Hooghoudt	396
8.3.2. Ασταθής στράγγιση με τη δυναμική θεωρία του Kirkham	397
8.3.3. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Dagan	398
8.3.4. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Τερζίδη	399
8.4. Στράγγιση διαστρωμένων εδαφών με τους στραγγιστικούς σωλήνες σε οποιαδήποτε θέση	401
8.4.1. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Ernst – σωλήνες στην κατώτερη στρώση	401
8.4.2. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Ernst – σωλήνες στην ανώτερη στρώση	403
8.4.3. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο των Toksöz-Kirkham – σωλήνες στην ανώτερη στρώση	405
8.4.4. Ασταθής στράγγιση με τη μέθοδο του Τερζίδη –σωλήνες στην ανώτερη στρώση	406
8.5. Αναλυτικές μη γραμμικές λύσεις της ασταθούς στράγγισης ομογενών εδαφών	409
8.5.1. Λύση της εξίσωσης Boussinesq με τους σωλήνες στο αδιαπέρατο υπόστρωμα ($D=0$)	409
8.5.2. Λύση της εξίσωσης Boussinesq με τους σωλήνες πάνω από το αδιαπέρατο υπόστρωμα ($D>0$)	410

Κεφάλαιο 9**Κριτήρια στράγγισης των εδαφών**

9.1. Εισαγωγικές έννοιες των κριτηρίων στράγγισης	415
9.1.1. Γενικότητες	415

9.1.2. Μαθηματική έκφραση των κριτηρίων στράγγισης	416
9.2. Επιθυμητό βάθος της υπόγειας στάθμης από την επιφάνεια του εδάφους	418
9.2.1. Βάθος στην εκτός καλλιεργητικής περιόδου στράγγιση	418
9.2.2. Βάθος κατά τη στράγγιση στην καλλιεργητική περίοδο	422
9.2.3. Στράγγιση για την απομάκρυνση των αλάτων	424
9.3. Κριτήρια στράγγισης μίας περιοχής	425
9.3.1. Κριτήρια σταθερής στράγγισης	425
9.3.2. Κριτήρια στράγγισης ασταθούς κατάστασης	427

Κεφάλαιο 10

.....	431
-------	-----

Στραγγιστικοί αγωγοί

10.1. Είδη στραγγιστικών αγωγών	431
10.2. Ανοικτοί στραγγιστικοί αγωγοί ή τάφροι	432
10.2.1. Γενικότητες	432
10.2.2. Κίνηση του νερού στις τάφρους	434
10.2.3. Σχεδίαση των τάφρων	438
10.2.4. Συντήρηση των τάφρων	443
10.3. Υπόγειοι στραγγιστικοί αγωγοί	445
10.3.1. Γενικότητες	445
10.3.2. Είσοδος του νερού στους στραγγιστικούς σωλήνες	446
10.3.3. Υλικά περιβλήματος των στραγγιστικών σωλήνων	448
10.3.4. Καθορισμός παραμέτρων ενός στραγγιστικού δικτύου με σωλήνες	450
10.3.5. Εγκατάσταση και συντήρηση των στραγγιστικών σωλήνων	457

Προβλήματα στραγγίσεων	459
-------------------------------------	-----

Παραρτήματα

Παράρτημα Ι. Διαφορικές εξισώσεις, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα, Σειρές,

Συναρτήσεις	469
I.1. Λύση διαφορική εξίσωσης	469
I.2. Παραγωγή συναρτήσεων	470
I.3. Παραγωγή τριγωνομετρικών συναρτήσεων	471
I.4. Τύποι ολοκληρωμάτων	471
I.5. Τύποι αθροιστικών σειρών	472
I.6. Συναρτήσεις σφάλματος	473

I.7. Τιμές τριγωνομετρικών σχέσεων	474
I.8α. Όγκος περιστρεφόμενης επιφάνειας	475
I.8β. Στραγγιζόμενος όγκος σε φρεάτιο άντλησης	475
Παράρτημα II. Τιμές Συναρτήσεων	477
Πίνακας II.1. Τιμές συναρτήσεων σφάλματος E_1, E_2, E_3, E_4 και E_5	477
Πίνακας II.2. Τιμές συναρτήσεων c_t και g_t των εξισώσεων των van de Leur-Maasland	483
Πίνακας II.3. Τιμές συνάρτησης $C_t \times 10^2$ των van de Leur-Maasland	484
Πίνακας II.4. Τιμές συνάρτησης $C_t \times 10^3$ των van de Leur-Maasland	487
Πίνακας II.5. Τιμές συνάρτησης F_t	490
Πίνακας II.6. Τιμές συνάρτησης E_t	491
Πίνακας II.7. Τιμές A/τ_0 της μεθόδου του πιεζομέτρου	492
Βιβλιογραφία	495
Ευρετήριο όρων	507

Βασικές αρχές των στραγγίσεων των εδαφών

1.1 Εισαγωγικές έννοιες - Υπόγεια στάθμη

1.1.1 Γενικότητες

Στραγγίσεις είναι η επιστήμη που ασχολείται με την απομάκρυνση του πλεονάζοντος νερού μιας περιοχής, είτε αυτό βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια είτε μέσα στο έδαφος, με βασικό σκοπό να κάνει την περιοχή αυτή πιο κατάλληλη για τη χρησιμοποίησή της από τα φυτά και τον άνθρωπο. Αν το νερό βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του εδάφους, η απομάκρυνσή του γίνεται συνήθως με ένα δίκτυο ανοικτών αγωγών που συνίσταται από κανάλια ή τάφρους και το δίκτυο αυτό λέγεται αποστραγγιστικό. Αν το πλεονάζον νερό βρίσκεται μέσα στο έδαφος και σχηματίζει υψηλή υπόγεια στάθμη, η απομάκρυνσή του μπορεί να γίνει με δίκτυα ανοικτών ή κλειστών αγωγών ή με συνδυασμό και των δύο και τα δίκτυα αυτά λέγονται υποστραγγιστικά. Επειδή πολύ σπάνια ένα δίκτυο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για την απομάκρυνση επιφανειακών νερών, στο βιβλίο αυτό όλα τα δίκτυα λέγονται απλά στραγγιστικά και οι αγωγοί λέγονται στραγγιστικοί. Συνήθως οι ανοικτοί στραγγιστικοί αγωγοί αναφέρονται ως τάφροι, οι δε κλειστοί στραγγιστικοί αγωγοί, όταν έχουν κυκλική διατομή, αναφέρονται ως στραγγιστικοί σωλήνες.

Βασικός σκοπός κάθε στραγγιστικού δικτύου στη γεωργία είναι να υποβιβάζει σε εύλογο χρόνο και να διατηρεί την στάθμη του υπόγειου νερού κάτω από τη ζώνη

του ριζοστρώματος των φυτών, έτσι που να εξασφαλίζεται ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την ανάπτυξη και απόδοση των καλλιεργειών με λιγότερο κόστος και μεγαλύτερο κέρδος.

Το έδαφος κοντά και κάτω από τη στάθμη του υπόγειου νερού βρίσκεται σε κατάσταση κορεσμού, δηλαδή όλοι οι πόροι του είναι γεμάτοι με νερό. Στο κορεσμένο έδαφος δεν υπάρχει οξυγόνο, γιατί το υπάρχον διαλυμένο στο νερό καταναλίσκεται πολύ γρήγορα και δεν ανανεώνεται, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να αναπτυχθεί το ριζικό σύστημα των φυτών, το οποίο κάτω από αναερόβιες συνθήκες σαπίζει.

Γενικά ο κορεσμός του εδάφους και οι αναερόβιες συνθήκες επιδρούν δυσμενώς στην ανάπτυξη των φυτών, γιατί αλλοιώνουν το ρυθμό αποσύνθεσης της οργανικής ουσίας και της οξείδωσης των ορυκτών της αργίλου. Έχει βρεθεί ότι, λίγες μέρες μετά τον κορεσμό ενός εδάφους, οι συγκεντρώσεις ιόντων σιδήρου και θείου γίνονται τοξικές για τα φυτά. Επίσης στα κορεσμένα εδάφη η έλλειψη οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα ελαττώνει δραστικά και τη διαπνοή των φυτών.

Η υψηλή στάθμη του υπόγειου νερού έχει και άλλες δυσμενείς επιπτώσεις στο καλλιεργούμενο έδαφος, όπως για παράδειγμα ότι εμποδίζει τη χρήση των καλλιεργητικών μηχανημάτων, αυξάνει τη συμπίεση του εδάφους από τα μηχανήματα και τα ζώα, εμποδίζει τη θέρμανση του εδάφους την άνοιξη και καθυστερεί το φύτευμα των σπόρων, δημιουργεί συνθήκες ανάπτυξης διαφόρων ασθενειών των φυτών καθώς και τη μετακίνηση και συγκέντρωση αλάτων στην περιοχή του ριζοστρώματος.

Η στάθμη του υπόγειου νερού μιας περιοχής μπορεί να ανέρχεται από τη διήθηση των νερών της βροχής ή της άρδευσης ή από την εισροή υπόγειου νερού από διπλανή υψηλότερη περιοχή, καθώς και από τη διαρροή ημίκλειστου υδροφόρου στρώματος που βρίσκεται κάτω από αρτεσιανές συνθήκες. Στο βιβλίο αυτό ως στάθμη του υπόγειου νερού ή απλά υπόγεια στάθμη εννοούμε την πάνω κορεσμένη επιφάνεια του εδάφους που έχει πίεση ίση με την ατμοσφαιρική.

1.1.2 Κατάταξη στραγγιζόμενων εδαφών και διαπερατότητα

Όπως είναι γνωστό από την επιστήμη της Εδαφολογίας, τα διάφορα είδη εδαφών χαρακτηρίζονται από το μέγεθος των κόκκων, από τους οποίους συνίστανται. Ο υπολογισμός του μεγέθους των κόκκων ενός δείγματος εδάφους μπορεί να γίνει με ένα ευρύ φάσμα εργαστηριακών μεθόδων και το αντικείμενο αυτό ανήκει στο κεφάλαιο της **Μηχανικής ανάλυσης των εδαφών**.

Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται οι τιμές της διαμέτρου των κόκκων των διαφόρων τύπων εδαφών, σε mm, όπως δίνονται από τους Aravin and Numerov (1965).

Πίνακας 1.1. Κατάταξη εδαφών και διάμετρος κόκκων

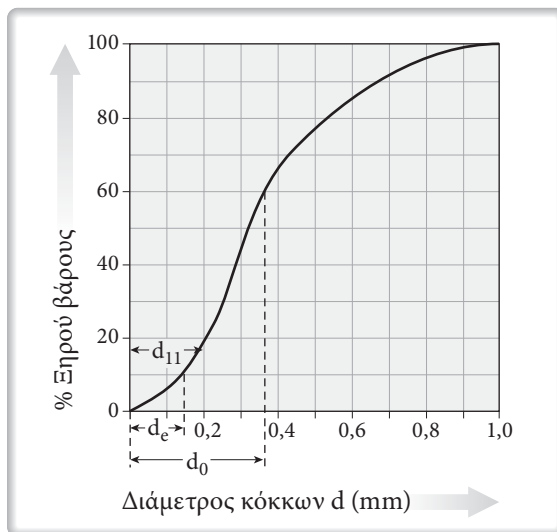
Έδαφος	Διάμετρος κόκκων (mm)
άργιλος	< 0,005
λεπτή ιλύς	0,005 – 0,01
αδρομερής ιλύς	0,01 – 0,05
πολύ λεπτή άμμος	0,05 – 0,25
λεπτή άμμος	0,25 – 0,5
μέση άμμος	0,5 – 1,0
αδρομερής άμμος	1,0 – 2,0
λεπτά χαλίκια	2,0 – 4,0
μέσα χαλίκια	4,0 – 10,0
αδρομερή χαλίκια	10,0 – 20,0
κροκάλες	20,0 – 60,0
λίθοι	> 60,0

Τα ευρήματα της μηχανικής ανάλυσης ενός εδάφους τοποθετούνται σε ένα γράφημα που είναι γνωστό ως **καμπύλη μηχανικής ανάλυσης** του εδαφικού δείγματος. Στον άξονα των x τοποθετούνται οι τιμές των διαμέτρων των εδαφικών κόκκων και στον άξονα των y τα αντίστοιχα ολικά ξηρά βάρη όλων των κόκκων που έχουν διάμετρο μικρότερη από αυτήν και εκφράζονται ως επί τοις εκατό (%) του συνολικού ξηρού βάρους του ερευνούμενου εδαφικού δείγματος. Μια τέτοια καμπύλη παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1.

Με τον όρο **διαπερατότητα** ενός εδάφους εννοείται το χαρακτηριστικό μέγεθος που περιγράφει την κίνηση του νερού στο έδαφος αυτό. Η διαπερατότητα ενός τύπου εδάφους εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το μέγεθος των κόκκων που συνιστούν το έδαφος αυτό. Η διαπερατότητα συνήθως αναφέρεται και ως **υδραυλική αγωγιμότητα** του εδάφους, έννοια που πρώτος εισήγαγε ο Darcy, διατυπώνοντας τις αντίστοιχες σχέσεις, που αργότερα επικράτησε να αναφέρονται ως **Νόμος του Darcy**.

Στη φύση εντελώς αδιαπέρατο έδαφος δεν υπάρχει. Ο όρος λοιπόν **αδιαπέρατο** χρησιμοποιείται για ένα έδαφος του οποίου η διαπερατότητα είναι πολύ μικρότερη, συγκρινόμενη προς τη διαπερατότητα μιας γειτονικής στρώσης του. Κατά

προσέγγιση, για να χαρακτηριστεί μια εδαφική στρώση ως αδιαπέρατη θα πρέπει να έχει μικρότερη από το 10% της τιμής της διαπερατότητας της γειτονικής στρώσης της.



Σχήμα 1.1: Καμπύλη μηχανικής ανάλυσης εδάφους

Τα διαπερατά εδάφη μπορούν να διακριθούν σε ισότροπα και ανισότροπα εδάφη. Ένα έδαφος ονομάζεται **ισότροπο** όταν ο συντελεστής διαπερατότητάς του σε κάθε σημείο του εξεταζόμενου εδάφους, είναι ανεξάρτητος της διεύθυνσης της ταχύτητας κίνησης του εδαφικού νερού, διαφορετικά ονομάζεται **ανισότροπο**. Τα ισότροπα εδάφη διακρίνονται περαιτέρω σε ομοιογενή ή ομογενή και ανομοιογενή ή μη ομογενή εδάφη. Ο συντελεστής διαπερατότητας των **ομογενών εδαφών** είναι ανεξάρτητος των συντεταγμένων μιας περιοχής στράγγισης και έχει σταθερή τιμή σε ολόκληρη την μελετούμενη εδαφική περιοχή. Στα **μη ομογενή εδάφη** ο συντελεστής διαπερατότητας εξαρτάται από τις τιμές των συντεταγμένων της περιοχής του στραγγιζόμενου εδάφους. Με άλλα λόγια διαφέρει από υποπεριοχή σε υποπεριοχή.

Στα **ανισότροπα εδάφη** ο συντελεστής διαπερατότητας σε κάθε δεδομένο σημείο της περιοχής στράγγισης εξαρτάται από τη διεύθυνση της ταχύτητας κίνησης του εδαφικού νερού που στραγγίζεται, παίρνοντας τιμές K_x και K_y στις x και y διευθύνσεις, αντίστοιχα. Ο όρος **μη ομογενή ανισότροπα εδάφη** αναφέρεται σε εδάφη στα οποία οι τιμές της διαπερατότητας εξαρτώνται τόσο από τη διεύθυνση της ταχύτητας κίνησης του υπόγειου νερού όσο και από τις τιμές των συντεταγμένων της περιοχής του στραγγιζόμενου εδάφους.

Τέλος τα εδάφη μιας μελετούμενης περιοχής μπορεί να συνίστανται από διάφορες στρώσεις που έχουν διαφορετικές τιμές των συντελεστών διαπερατότητας. Σ' αυτή την περίπτωση κάθε στρώμα από μόνο του μπορεί να συνίσταται από ένα ισότροπο, ομογενές, ανισότροπο ή μη ομογενές έδαφος. Τα εδάφη σ' αυτή την περίπτωση αναφέρονται ως ενστρωματωμένα εδάφη.

1.2 Μέτρηση και σύνταξη διαγραμμάτων της υπόγειας στάθμης

1.2.1 Εγκατάσταση πιεζομετρικών σωλήνων

Η στάθμη του υπόγειου νερού στο έδαφος έχει ιδιαίτερη σημασία και πρέπει να προσδιορίζεται προσεκτικά. Για την παρακολούθηση της στάθμης του υπόγειου νερού είναι απαραίτητη η εγκατάσταση, στην περιοχή που μελετάται, ενός δικτύου φρεατίων παρατήρησης ή πιεζομετρικών σωλήνων. Οι θέσεις των πιεζομετρικών σωλήνων καθορίζονται ύστερα από προκαταρκτική μελέτη, σε ένα τοπογραφικό διάγραμμα της περιοχής και σε κανονικές αποστάσεις μεταξύ τους, οι οποίες συνήθως αποτελούν τις κορυφές ίσων τετραγώνων. Όμως πάντοτε θα πρέπει να λαμβάνεται μέριμνα ώστε να μην τοποθετηθούν κοντά σε τάφρους, διώρυγες ή κοίτες ποταμών, προς αποφυγή λήψης εσφαλμένων στοιχείων.

Πριν από την εγκατάσταση των πιεζομετρικών σωλήνων πρέπει να εντοπιστεί το βάθος του αδιαπέρατου υποστρώματος, αφού το κάτω άκρο των σωλήνων πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον 20 cm πάνω από το αδιαπέρατο υπόστρωμα.

Οι πιεζομετρικοί σωλήνες συνήθως αποτελούνται από σωλήνες χωρίς ραφή, διαμέτρου 2 ιντσών και μήκους 2 m. Ο τρόπος τοποθέτησης αυτών είναι όμοιος προς αυτόν των πιεζομέτρων και γίνεται με τη βοήθεια γεωτρύπανου διαμέτρου μικρότερης από τη διάμετρο του πιεζομετρικού σωλήνα (κατά 1-2 mm περίπου). Για το σκοπό αυτό ανοίγεται πρώτα η οπή με το γεωτρύπανο σε ένα βάθος 15 cm, στη συνέχεια εισάγεται ο σωλήνας μέχρι ένα βάθος 13 cm, τοποθετείται το γεωτρύπανο στο σωλήνα και επεκτείνεται η οπή μέχρι ένα βάθος 30 cm. Επαναεισάγεται ο σωλήνας σε βάθος 28 cm και συνεχίζεται η διαδικασία αυτή της διανοίξης της οπής και της εισαγωγής του σωλήνα με τα ίδια μεγέθη, μέχρι που το κάτω άκρο του σωλήνα να φτάσει στο επιθυμητό βάθος. Μετά την τελική εγκατάσταση του σωλήνα δημιουργείται με το γεωτρύπανο μια επιπλέον κοιλότητα μήκους 10 cm στο κάτω μέρος του σωλήνα. Επίσης λαμβάνεται μέριμνα ώστε το άνω άκρο των πιεζομετρικών σωλήνων να βρίσκεται 20 cm περίπου υψηλότερα από την επιφάνεια του εδάφους. Σημειώνεται ότι καθώς η εγκατάσταση του σω-

λήνα γίνεται χτυπώντας την ελαφρά με μια σφύρα, για να αποφευχθούν τυχόν βλάβες στο άνω άκρο του, θα πρέπει να χρησιμοποιείται ειδική κεφαλή στο σωλήνα. Ακόμα πολλές φορές πάνω από τους πιεζομετρικούς σωλήνες τοποθετούνται καλύμματα για την αποφυγή εισροής νερού από βροχόπτωση ή άρδευση καθώς και είσοδος άλλων αντικειμένων.

Μετά την αρίθμηση των τοποθετημένων πιεζομετρικών σωλήνων λαμβάνονται τα απόλυτα υψόμετρα του άνω άκρου τους από τα αντίστοιχα υψόμετρα της επιφανείας του εδάφους. Η μέτρηση του βάθους της στάθμης του υπόγειου νερού γίνεται συνήθως σε κανονικά χρονικά διαστήματα, ενός μηνός ή ενός δεκαπενθημέρου, με ειδικά σταθμήμετρα.

Οι τιμές των διαφόρων μετρήσεων αναφέρονται στο βάθος της στάθμης του υπόγειου νερού από το άνω άκρο του σωλήνα. Στη συνέχεια και με τη βοήθεια των στοιχείων της χωροστάθμησης, τα δεδομένα των μετρήσεων ανάγονται σε απόλυτα υψόμετρα της στάθμης του υπόγειου νερού και υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές του βάθους της από την επιφάνεια του εδάφους. Τέλος όλες οι τιμές αυτές παρουσιάζονται συγκεντρωτικά σε έναν ειδικό πίνακα.

1.2.2 Σύνταξη διαγραμμάτων της υπόγειας στάθμης

Με βάση τα δεδομένα των μετρήσεων συντάσσονται τα διαγράμματα των ισοσταθμικών και των ισοβαθών καμπυλών, όπως και το διάγραμμα της διακύμανσης της στάθμης του υπόγειου νερού.

Ισοσταθμικές καμπύλες ονομάζονται οι καμπύλες που συνδέουν τα σημεία της υπόγειας στάθμης, τα οποία έχουν το αυτό απόλυτο υψόμετρο. Για τη σύνταξη των διαγραμμάτων των ισοσταθμικών καμπυλών χρησιμοποιούνται τα δεδομένα των μετρήσεων της ίδιας ημέρας.

Όπως είναι γνωστό, το νερό κινείται από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο ύψος φορτίου ή από την καμπύλη με το μεγαλύτερο απόλυτο υψόμετρο της υπόγειας στάθμης προς την καμπύλη με το μικρότερο απόλυτο υψόμετρο. Έτσι η διεύθυνση της ροής του υπόγειου νερού θα είναι κάθετη προς τις ισοσταθμικές καμπύλες. Από αυτό συμπεραίνεται ότι οι τριτεύουσες στραγγιστικές τάφροι ή οι στραγγιστικοί σωλήνες θα πρέπει να τοποθετηθούν κατά το δυνατόν κάθετοι προς τη διεύθυνση ροής του υπόγειου νερού ή σχεδόν παράλληλοι προς τις ισοσταθμικές καμπύλες.

Μια χάραξη των τριτενυσών στραγγιστικών αγωγών κάθετα προς τις ισοσταθμικές καμπύλες, σημαίνει ότι οι αγωγοί αυτοί δε θα τέμνουν τη διεύθυνση ροής του υπόγειου νερού, αλλά θα είναι παράλληλοι προς αυτή. Αυτό θα έχει ως απο-

τέλεσμα την πλημμελή στράγγιση της περιοχής, οπότε πρέπει να αποφεύγεται.

Οι **ισοβαθείς καμπύλες** συνδέουν όλα τα σημεία μιας περιοχής, τα οποία έχουν το αυτό βάθος στάθμης του υπόγειου νερού από την επιφάνεια του εδάφους. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση του διαγράμματος των ισοσταθμικών καμπυλών, έτσι και για τη σύνταξη των διαγραμμάτων των ισοβαθών καμπυλών χρησιμοποιούνται τα δεδομένα των μετρήσεων της ίδιας κατά το δυνατόν ημέρας.

Από τα διαγράμματα των ισοβαθών καμπυλών μπορούν να καθοριστούν οι υποπεριοχές με υψηλή ή χαμηλή στάθμη του υπόγειου νερού και έτσι κατά προσέγγιση τα τμήματα που έχουν περισσότερο ή λιγότερο ανάγκη από στράγγιση.

Τα **διαγράμματα διακύμανσης της στάθμης** του υπόγειου νερού συντάσσονται από τα δεδομένα των μετρήσεων οι οποίες διενεργήθηκαν σε κανονικά μηνιαία ή δεκαπενθήμερα χρονικά διαστήματα, σε ολόκληρη την περίοδο του έτους. Αυτά συνήθως συντάσσονται για τις θέσεις οι οποίες εμφανίζουν υψηλή στάθμη του υπόγειου νερού και μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη διάρκεια στην οποία έχουμε παρουσία πλεοναζόντων και επιζήμιων νερών, καθώς και την ημερήσια πτώση της υπόγειας στάθμης. Αυτές οι πληροφορίες είναι αναγκαίες για την εκπόνηση μιας πλήρους μελέτης ενός στραγγιστικού δικτύου.

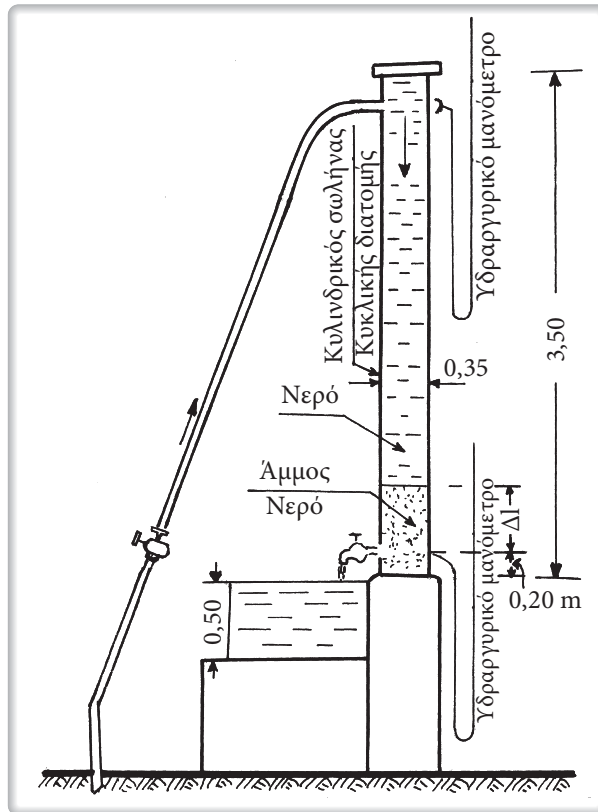
Από τα όσα εκτέθηκαν στην παράγραφο αυτή συμπεραίνεται ότι η σύνταξη των διαγραμμάτων των ισοσταθμικών και των ισοβαθών καμπυλών, καθώς και της διακύμανσης της στάθμης του υπόγειου νερού είναι πολύ χρήσιμη για τη χάραξη ενός στραγγιστικού δικτύου.

1.3 Νόμος του Darcy

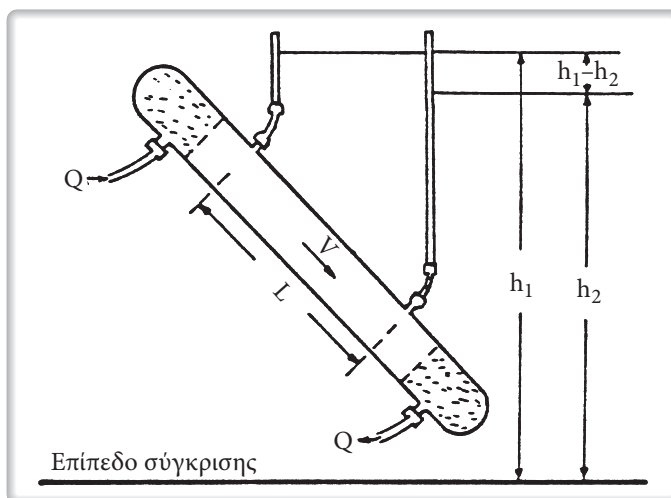
1.3.1 Έκφραση και πεδίο ισχύος του νόμου του Darcy

Ο θεμελιώδης νόμος που περιγράφει την κίνηση του υπόγειου νερού μέσα στο έδαφος δόθηκε από τον H. Darcy το 1856. Στο Σχήμα 1.2α φαίνεται η πειραματική συσκευή του Darcy και στο Σχήμα 1.2β φαίνεται η συσκευή επαλήθευσης του νόμου του Darcy για τις διάφορες κατευθύνσεις (Τερζίδης και Καραμούζης, 1985). Από τα πειράματά του ο Darcy κατάληξε στο συμπέρασμα ότι

η παροχή όγκου νερού που κινείται μέσα σε ορισμένης σύστασης άμμο είναι ανάλογη προς τη διαφορά των πιεζομετρικών φορτίων των επιφανειών εισόδου και εξόδου του δείγματος της άμμου και αντίστροφα ανάλογη του πάχους του δείγματος.



Σχήμα 1.2α: Πειραματική συσκευή του Darcy.



Σχήμα 1.2β: Συσκευή επαλήθευσης του νόμου του Darcy για ροή σε διάφορες κατευθύνσεις.

Η μαθηματική διατύπωση του συμπεράσματος αυτού οδηγεί στη σχέση:

$$\frac{Q}{A} = V = -K \frac{h_2 - h_1}{\Delta L} \quad (1.3.1)$$

όπου Q είναι η παροχή του νερού, A η επιφάνεια της διατομής του πορώδους μέσου, K ένας συντελεστής αναλογίας, που αργότερα ονομάστηκε **συντελεστής διαπερατότητας** ή **συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας**, ΔL το πάχος του πορώδους μέσου, h_1 και h_2 τα πιεζομετρικά φορτία κατάντη και ανάντη, αντίστοιχα, του διαπερώμενου πάχους του πορώδους μέσου. Ο λόγος $Q/A = V$, που είναι η παροχή ανά μονάδα επιφάνειας, έχει διαστάσεις ταχύτητας [LT^{-1}] και καλείται **μακροσκοπική ταχύτητα** ή **ταχύτητα διαστάλαξης** (seepage velocity). Το αρνητικό πρόσημο της εξίσωσης (1.3.1) δείχνει ότι η ροή λαμβάνει χώρα κατά την έννοια των ελαττωμένων πιεζομετρικών φορτίων.

Η γραμμική σχέση που περιγράφει τη ροή των ρευστών σε πορώδη μέσα και δίνεται από την εξίσωση (1.3.1) είναι γνωστή ως Νόμος του Darcy και αποτελεί τη βάση ενός ιδιαίτερου κλάδου της Μηχανικής των ρευστών, γνωστού ως ροή μέσα από πορώδες υλικό. Ενδιαφέρον είναι να σημειωθεί η ομοιότητα μεταξύ του νόμου του Darcy και άλλων νόμων της Φυσικής, όπως ο νόμος του Ohm στον Ηλεκτρισμό και ο νόμος του Fourier στη Θερμοδυναμική.

Μια σειρά από απλά πειράματα οδηγούν σε μια γενίκευση του νόμου του Darcy για ομογενή και ισότροπα πορώδη μέσα, η οποία μπορεί να εκφραστεί από τη διανυσματική εξίσωση:

$$\vec{V} = -K \text{grad}h, \quad (1.3.2)$$

όπου το διάνυσμα \vec{V} είναι ο όγκος εκροής του νερού ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου [$L^3L^{-2}T^{-1}$] ή η ταχύτητα διαστάλαξης, K ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας, που έχει διαστάσεις ταχύτητας [LT^{-1}], h το πιεζομετρικό ή υδραυλικό ύψος ή απλά φορτίο, με διαστάσεις μήκους, [L] και $\text{grad}h$ η κλίση του πιεζομετρικού ύψους.

Δεδομένου ότι το πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο $h = p/\rho g + z$ είναι μια αριθμητική ποσότητα και ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας μια σταθερή αναλογίας, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα:

$$\Phi = -K \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = -Kh \quad (1.3.3)$$

που είναι μια αριθμητική ποσότητα. Η ποσότητα Φ καλείται **δυναμικό ταχύτητας** και έχει διαστάσεις (L^2T^{-1}). Από τις εξισώσεις (1.3.2) και (1.3.3) συμπεραίνουμε ότι τα $\text{grad}\Phi$ και $\text{grad}h$ είναι διανυσματικές ποσότητες και ότι η ταχύτητα δια-

στάλαξης V είναι πάντοτε κάθετη στην επιφάνεια ίσου δυναμικού της μορφής:

$$\Phi = -Kh = \text{σταθερό},$$

οπότε θα είναι και $h = \text{σταθερό}$.

Από τη διανυσματική εξίσωση (1.3.2) και για ανισότροπο πορώδες μέσω μπορούμε να γράψουμε τις τρεις συνιστώσες ταχύτητες του νόμου του Darcy για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Έτσι για τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) έχουμε:

$$V_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}, \quad V_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.3.4\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου K_x, K_y, K_z οι συντελεστές υδραυλικής αγωγιμότητας στις x, y, z διευθύνσεις, αντίστοιχα. Επίσης για τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r, φ, z) έχουμε:

$$V_r = -K_r \frac{\partial h}{\partial r}, \quad V_\varphi = -K_\varphi \frac{\partial h}{r \partial \varphi}, \quad V_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.3.5\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου K_r, K_φ, K_z οι συντελεστές υδραυλικής αγωγιμότητας στις r, φ, z διευθύνσεις, αντίστοιχα.

Πολύαριθμα πειράματα, διαφόρων ερευνητών, έδειξαν ότι ο νόμος του Darcy έχει ορισμένα όρια εφαρμογής. Ας ορίσουμε πρώτα έναν αριθμό Reynolds για τη ροή των ρευστών μέσα σε πορώδες υλικό:

$$R_e = \frac{Vd}{\nu}, \quad (1.3.6)$$

όπου V είναι η ταχύτητα διαστάλαξης, d είναι μια χαρακτηριστική μέση διάμετρος των κόκκων του πορώδους υλικού και ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Από τα πειράματα προκύπτει ότι ο νόμος του Darcy ισχύει για $R_e < 3$ ως 10. Για $R_e > 10$ δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ παροχής και κλίσης υδραυλικού φορτίου και η απόκλιση αυτή από τον νόμο του Darcy αποδόθηκε αρχικά στην τυρβώδη διάταξη της ροής. Νεώτερες παρατηρήσεις έδειξαν ότι η τυρβώδης διάταξη της ροής μέσα σε πορώδες υλικό αρχίζει για $R_e > 400$ ως 600 και κατά συνέπεια οι πρώτες αποκλίσεις από το νόμο του Darcy δεν οφείλονται στην τυρβώδη διάταξη, αλλά στις δυνάμεις αδράνειας, που είναι σημαντικές για $R_e > 3$.

Για τη μεταβατική ζώνη ($10 < R_e < 600$) όπου η ροή είναι ταχύτερη ή οι κόκκοι του πορώδους υλικού αρκετά μεγάλοι, βρέθηκε από πειράματα ότι η σχέση μεταξύ της ταχύτητας V και της υδραυλικής κλίσης $\text{grad}h$ δεν είναι γραμμική. Οι πιο γνωστές μη γραμμικές σχέσεις είναι της μορφής:

$$\text{grad}h = A\vec{V} + B\vec{V}^2 \quad (1.3.7)$$

$$\vec{V} = C(\text{grad}h)^n \quad (1.3.8)$$

όπου A , B , C και n είναι σταθερές πειραματικά προσδιοριζόμενες.

Για πολύ μικρές ταχύτητες, ο όρος $B\vec{V}^2$ είναι αμελητέος και η εξίσωση (1.3.7) ανάγεται στο νόμο του Darcy, που δίνεται από την εξίσωση (1.3.2). Αν και δεν έχει προσδιορισθεί επακριβώς, εν τούτοις πρέπει να υπάρχει και ένα κατώτερο όριο ισχύος του νόμου του Darcy για πάρα πολύ βραδεία ροή, όταν οι μοριακές δυνάμεις είναι σημαντικές.

Στην πράξη είμαστε επιφυλακτικοί ως προς την ισχύ του νόμου του Darcy σε υδροφόρα στρώματα από χαλίκια, σχιστογενή και καρστικά πετρώματα κ.λπ., λόγω ύπαρξης μεγάλων αγωγών πορώδους, καθώς και σε κανονικά υδροφόρα στρώματα στις περιοχές κοντά στα τοιχώματα των φρεατίων ή των στραγγιστικών τάφρων, όπου οι ταχύτητες είναι σχετικά μεγάλες λόγω της μεγάλης κλίσης του υδραυλικού φορτίου.

Όσον αφορά τη μεταβολή της ροής με το χρόνο, παραδεχόμαστε ότι ο νόμος του Darcy ισχύει για την ασταθή ή μη μόνιμη ροή, όπως και για τη μόνιμη ροή, με μόνο περιορισμό ότι η ροή πρέπει να είναι βραδεία, δηλαδή οι δυνάμεις αδράνειας να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες σε σύγκριση με τις δυνάμεις τριβής. Η παραδοχή αυτή έχει επαληθευθεί πειραματικά και θεωρητικά (Polubarinova-Kochina, 1962).

Περισσότερα για την ισχύ του νόμου του Darcy μπορεί κανείς να βρει σε διάφορα συγγράμματα υδραυλικής των υπόγειων νερών (Καραμούζης, 2012).

Στην περίπτωση μη κορεσμένης ροής ο νόμος του Darcy ισχύει με τις παραπάνω μορφές, όμως η υδραυλική αγωγιμότητα K δεν είναι σταθερή, αλλά μια μονοτονική συνάρτηση της περιεχόμενης υγρασίας ή της πίεσης του εδαφικού νερού και για διάκριση ονομάζεται **τριχοειδής αγωγιμότητα**.

1.3.2 Υδραυλική αγωγιμότητα

Για τα απλά πειράματα του Darcy ο συντελεστής της υδραυλικής αγωγιμότητας K της εξίσωσης (1.3.1) ή (1.3.4) είναι μια σταθερή αναλογίας, της οποίας η τιμή παραμένει αμετάβλητη για το ίδιο δείγμα πορώδους υλικού και εφ' όσον το ρευστό παραμένει αμετάβλητο, όπως για παράδειγμα το νερό σταθερής θερμοκρασίας, χωρίς φυσικοχημικές αλλοιώσεις.

Αν όμως μεταβάλουμε τις ιδιότητες του ρευστού, όπως το ειδικό βάρος ή το ιξώδες αυτού ή τις γεωμετρικές ιδιότητες του πορώδους υλικού, ο νόμος του Darcy

εξακολουθεί να ισχύει με τη μορφή της εξίσωσης (1.3.4), όμως οι τιμές του K θα μεταβληθούν. Πράγματι αν στα πειράματα μεταβληθεί κατά σειρά ένας μόνο από τους παραπάνω παράγοντες και συγκριθεί η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας προς αυτόν, θα παρατηρήσουμε ότι η τιμή του K είναι:

- α) ανάλογη προς την τιμή του ειδικού βάρους γ του ρευστού,
- β) αντίστροφα ανάλογη προς την τιμή του ιξώδους μ και
- γ) ανάλογη προς το τετράγωνο της μέσης διαμέτρου d των κόκκων του πορώδους υλικού. Εξυπακούεται ότι πρέπει να περιμένουμε και κάποια μεταβολή του K , που οφείλεται στο σχήμα των κόκκων, τον τρόπο διάστρωσης τους κ.λπ. καθώς και άλλους απρόβλεπτους παράγοντες.

Τα παραπάνω πειραματικά δεδομένα μπορούν να εκφραστούν με τη σχέση:

$$K = Cd^2 \frac{\gamma}{\mu} \quad (1.3.9)$$

όπου το C καλείται **παράγοντας σχήματος** (shape factor), είναι αδιάστατο και περιλαμβάνει τις επιδράσεις του σχήματος της διάστρωσης και συσκευασίας των κόκκων, τις αποκλίσεις του μεγέθους αυτών από τη μέση διάμετρο, καθώς και τις επιδράσεις του πορώδους.

Ορίζοντας την **απόλυτη ή γεωμετρική διαπερατότητα του μέσου**, k , που έχει διαστάσεις επιφάνειας (L^2), με τη σχέση:

$$k = Cd^2 \quad (1.3.10)$$

και αντικαθιστώντας αυτήν στην εξίσωση (1.3.9), παίρνουμε:

$$K = k \frac{\gamma}{\mu} = k \frac{g}{\nu}, \quad (1.3.11)$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και ν το κινηματικό ιξώδες.

Στα φυσικά εδάφη ο συντελεστής της υδραυλικής αγωγιμότητας επηρεάζεται επιπλέον και από άλλους παράγοντες, όπως είναι η ανισοτροπία και ανομοιογένεια αυτών, οι διάφορες φυσικοχημικές μεταβολές, οι βιολογικές δραστηριότητες των μικροοργανισμών κ.λπ., οι οποίες δυστυχώς δεν μπορούν να συμπεριληφθούν στη μαθηματική διατύπωση των παραπάνω εξισώσεων. Οποσδήποτε όμως οι τιμές του K οι οποίες λαμβάνονται από τις μετρήσεις στον αγρό περιλαμβάνουν και τις επιδράσεις των παραπάνω παραγόντων.

Ο συντελεστής της υδραυλικής αγωγιμότητας, K μετριέται με τις συνηθισμένες μονάδες μέτρησης της ταχύτητας όπως cm/sec, m/sec, m/ώρα ή και m/24ωρο.

Σε ακριβείς μετρήσεις του συντελεστή K πρέπει να σημειώνεται το είδος του χρησιμοποιούμενου ρευστού και η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Αν το ρευστό είναι νερό μπορούμε να πάρουμε χωρίς σημαντικό σφάλμα την πυκνότητά του ίση με την μονάδα, αλλά το ιξώδες του νερού μεταβάλλεται πολύ με τη θερμοκρασία. Για θερμοκρασία 10°C το ιξώδες του νερού είναι 1,303 centipoises, για 20°C είναι 1,002 centipoises και για 30°C είναι 0,789 centipoises. Επειδή το ιξώδες του νερού είναι περίπου μια μονάδα για 20°C , μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις τιμές του K_Θ για οποιαδήποτε θερμοκρασία σε τιμές K_{20} με τη σχέση:

$$K_{20^\circ} = K_{\Theta^\circ} \left(\frac{\mu_{\Theta^\circ}}{\mu_{20^\circ}} \right) \quad (1.3.12)$$

Ο συντελεστής της απόλυτης ή γεωμετρικής διαπερατότητας, k , μετριέται σε μονάδες επιφάνειας, όπως cm^2 ή m^2 . Οι τιμές του k ποικίλουν μεταξύ των τιμών 10^{-16}cm^2 (για γρανίτες) και 10^{-3}cm^2 (για χαλίκια). Οι Αμερικανοί Γεωλόγοι και Πετρελαιολόγοι χρησιμοποιούν τη μονάδα Darcy που είναι:

$$1 \text{ darcy} = \frac{1 \text{ centipoise} \times 1 \text{ cm}^3 \times \text{sec}^{-1} \times \text{cm}^{-2}}{1 \text{ atm} \times \text{cm}^{-1}} = 0,987 \times 10^{-8} \text{ cm}^2.$$

Επειδή το Darcy είναι σχετικά μεγάλη μονάδα για τα περισσότερα από τα φυσικά εδάφη, στην πράξη χρησιμοποιείται και το millidarcy, που είναι:

$$1 \text{ millidarcy} = 10^{-3} \text{ darcy}.$$

Στη Γαλλία χρησιμοποιείται το darce που είναι:

$$1 \text{ darce} = 1 \mu^2 = 1,013 \text{ darcy} = 10^{-12} \text{ m}^2 = 10^{-8} \text{ cm}^2.$$

Οι παραπάνω μονάδες αν και διαστατικά είναι ανομοιόμορφες και προκαλούν σύγχυση, εν τούτοις χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη βιβλιογραφία.

Για να βρούμε την τιμή του k όταν είναι γνωστή η τιμή του συντελεστή K , χρησιμοποιείται η εξίσωση (1.3.11). Για παράδειγμα έστω ότι για ένα έδαφος βρέθηκε ότι

$$K = 10 \text{ cm hr}^{-1} = \frac{10}{3600} \text{ cm/sec} \text{ για νερό θερμοκρασίας } 20^\circ\text{C}.$$

Παίρνοντας $\mu = 0,01 \text{ poise}$, θα έχουμε:

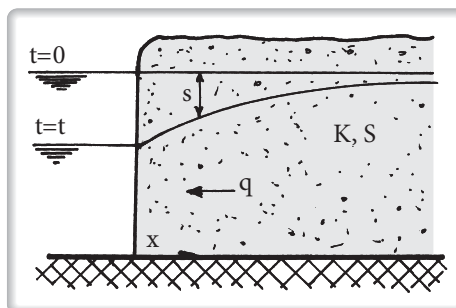
$$k = K \frac{\mu}{\gamma} = \left(\frac{10}{3600} \right) \frac{0,01}{1 \times 980} = 2,84 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 = 2,84 \mu^2.$$

Ασταθής κίνηση του νερού προς τάφρο

5.1 Γραμμικές λύσεις χωρίς επαναπλήρωση

5.1.1 Γενικότητες

Στο παρακάτω Σχήμα 5.1 παρουσιάζεται μια ημιάπειρη στρώση εδάφους, το οποίο βρίσκεται πάνω σε μια αδιαπέρατη βάση, και περιορίζεται στα αριστερά του από μια τάφρο. Θεωρούμε ότι δεν γίνεται επαναπλήρωση από βροχόπτωση ή άρδευση και κατά συνέπεια στη μόνιμη ή σταθερή κατάσταση η υπόγεια στάθμη του εδάφους και η ελεύθερη στάθμη του νερού της τάφρου βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 5.1: Ασταθής ροή του νερού προς τάφρο σε έδαφος χωρίς επαναπλήρωση.

Στο χρόνο $t=0$ αρχίζει η άντληση του νερού από την τάφρο με αποτέλεσμα να χαμηλώνει η ελεύθερη στάθμη της και ν' αρχίζει το νερό του εδάφους να κινείται προς την τάφρο. Εάν παραδεχθούμε ότι ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας K και η ειδική σε νερό απόδοση S του εδάφους έχουν σταθερές τιμές, σ' όλες τις θέσεις και σ' όλους τους χρόνους και ακόμα ότι η διοχετευτικότητα παίρνει μια μέση σταθερή τιμή, δηλαδή $T = Kh = KB$, τότε η κίνηση του εδαφικού νερού του περιγράφεται μαθηματικά από την εξίσωση Darcy:

$$q = -KB \frac{\partial s}{\partial x} \quad (5.1.1)$$

και από την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -S \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.1.2)$$

όπου q είναι η παροχή του νερού ανά μονάδα μήκους της τάφρου, B είναι μια μέση τιμή του βάρους της υπόγειας στάθμης από το αδιαπέρατο υπόστρωμα, s είναι η πτώση της υπόγειας στάθμης από την αρχική της θέση, S είναι η ειδική σε νερό απόδοση του εδάφους, x είναι η οριζόντια απόσταση από την τάφρο και t είναι ο χρόνος.

Από τις εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{S}{KB} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.1.3)$$

Η εξίσωση (5.1.3) είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης του παραβολικού τύπου. Στη βιβλιογραφία είναι γνωστή ως εξίσωση του Fourier ή γραμμική εξίσωση του Boussinesq. Η λύση της εξίσωσης (5.1.3) μπορεί να είναι αναλυτική ή αριθμητική, ανάλογα με την μορφή της αρχικής και των οριακών συνθηκών.

Στο πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω η αρχική συνθήκη είναι:

$$s(x, 0) = 0, \quad t = 0, \quad x \geq 0 \quad (5.1.4\alpha)$$

και η μια οριακή συνθήκη, πολύ μακριά από την τάφρο, είναι:

$$s(\infty, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (5.1.4\beta)$$

Η άλλη οριακή συνθήκη, στο τοίχωμα της τάφρου, στη γενική περίπτωση είναι μια τυχαία συνάρτηση του χρόνου: $s(0, t) = g(t)$. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα λύνεται με αριθμητικές μεθόδους και με τη βοήθεια υπολογιστή. Εάν και η οριακή αυτή συνθήκη είναι μια σταθερή ή μια απλή εκθετική συνάρτηση του

χρόνου, τότε το πρόβλημα μπορεί να έχει και αναλυτικές λύσεις. Ας υποθέσουμε ότι η οριακή συνθήκη στο τοίχωμα της τάφρου είναι της μορφής:

$$s(0,t) = at^m, \quad t > 0, \quad x = 0 \quad (5.1.4\gamma)$$

όπου a και m είναι σταθερές.

Το πρόβλημα μικτής τιμής των εξισώσεων (5.1.3) και (5.1.4α,β,γ) δεν έχει γενική αναλυτική λύση, αλλά ειδικές αναλυτικές λύσεις, των οποίων η μορφή εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου m . Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τέσσερις λύσεις, που αντιστοιχούν στις τιμές $m = 0, 1/2, 1$ και $3/2$, οι οποίες αποτέλεσαν και την διδακτορική διατριβή του Edelman, που υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο του Delft της Ολλανδίας το 1947. Η μέθοδος που ακολουθείται εδώ βασίζεται στην ομοιότητα των βοηθητικών συνθηκών (5.1.4α,β) και στην ομοιότητα των προφίλ της υπόγειας στάθμης στους διαφόρους χρόνους. Η μορφή, της μεταβλητής ομοιότητας μπορεί εύκολα να προσδιορισθεί και είναι:

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{KB}} \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (5.1.5)$$

Η δοκιμαστική συνάρτηση ομοιότητας, η οποία μπορεί να μετασχηματίσει τη μερική διαφορική εξίσωση (5.1.3) σε συνήθη διαφορική εξίσωση και τις τρεις οριακές συνθήκες (5.1.4α,β,γ) σε δύο βοηθητικές συνθήκες με σταθερά τα δεύτερα μέλη τους, θα είναι της μορφής:

$$s(x,t) = at^m F(u) \quad (5.1.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.1.5) και (5.1.6), οι μερικές παράγωγοι της εξίσωσης (5.1.3) γίνονται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= amt^{m-1} F + at^m \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = amt^{m-1} F + at^m F' \left(-\frac{u}{2t} \right) = \\ &= at^{m-1} \left(mF - \frac{u}{2} F' \right), \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = at^m \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = at^m F' \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{KB}} \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \quad (5.1.8)$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = at^m F'' \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{KB}} \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 = at^{m-1} F'' \left(\frac{1}{4} \frac{S}{KB} \right) \quad (5.1.9)$$

όπου οι οξείες υποδηλώνουν ολική παραγωγή ως προς u , δηλαδή $F' = dF/du$ και $F'' = d^2F/du^2$.

Από τις εξισώσεις (5.1.3), (5.1.7) και (5.1.9) παίρνουμε:

$$at^{m-1}F''\left(\frac{1}{4} \frac{S}{KB}\right) = \frac{S}{KB} at^{m-1} \left(mF - \frac{u}{2} F'\right)$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων:

$$F'' + 2uF' - 4mF = 0 \quad (5.1.10)$$

Η εξίσωση (5.1.10) είναι μια συνήθης γραμμική διαφορική εξίσωση της δεύτερης τάξης με μεταβλητό συντελεστή της πρώτης παραγώγου και με μια παράμετρο m .

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.1.5) και (5.1.6), η αρχική συνθήκη (5.1.4α) και η οριακή συνθήκη (5.1.4β) μετασχηματίζονται σε μία βοηθητική συνθήκη:

$$F(\infty) = 0, \quad u = \infty \quad (5.1.11\alpha)$$

και η άλλη οριακή συνθήκη (5.1.4γ) μετασχηματίζεται στη δεύτερη βοηθητική συνθήκη:

$$F(0) = 1, \quad u = 0 \quad (5.1.11\beta)$$

Το πρόβλημά μας τώρα είναι να λύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.1.10) με τις δύο βοηθητικές της συνθήκες (5.1.11α,β), για διάφορες τιμές της παραμέτρου m . Παρακάτω παρουσιάζονται τέσσερις περιπτώσεις, που αντιστοιχούν στις τιμές $m = 0, 1/2, 1$, και $3/2$ και οι οποίες έχουν και μια κάποια φυσική σημασία σε πρακτικά προβλήματα.

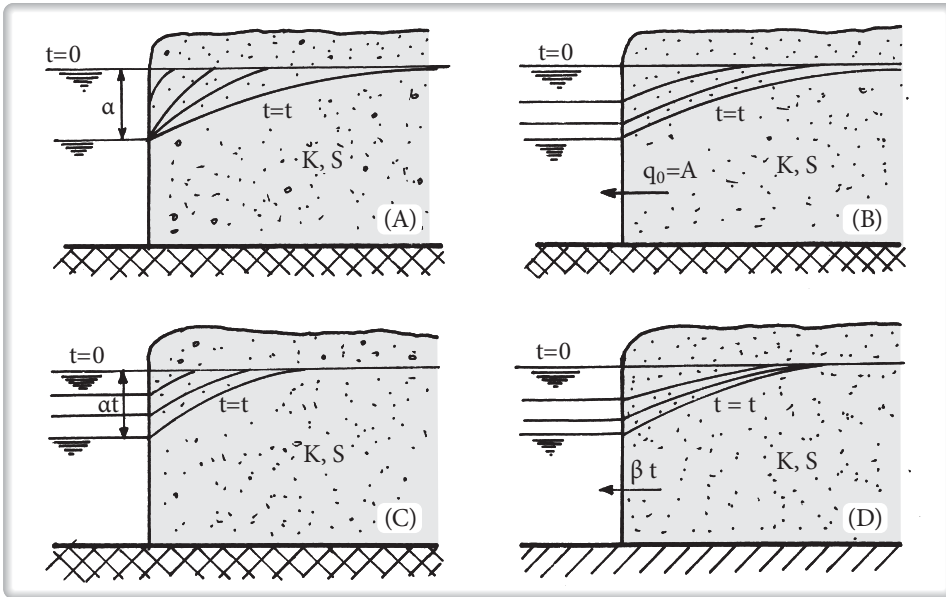
5.1.2 Απότομη πτώση της στάθμης στην τάφρο [$m = 0, s(0, t) = \alpha$]

Η περίπτωση που είναι $m = 0$ αντιστοιχεί στο φυσικό πρόβλημα της ασταθούς κίνησης του εδαφικού νερού, που προκαλείται από την απότομη πτώση της ελεύθερης στάθμης του νερού της τάφρου κατά ένα σταθερό ποσό α , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2Α.

Για $m = 0$ η εξίσωση (5.1.10) γίνεται:

$$F'' + 2uF' = 0 \quad (5.1.12)$$

και έχει τις ίδιες εξισώσεις (5.1.11α, β) ως βοηθητικές συνθήκες.



Σχήμα 5.2: Περιπτώσεις ασταθούς ροής του νερού σε έδαφος χωρίς επαναπλήρωση

Εισάγοντας τη νέα μεταβλητή $H = \frac{dF}{du}$, οπότε θα είναι $\frac{dH}{du} = \frac{d^2F}{du^2}$, η εξίσωση (5.1.12) γράφεται:

$$\frac{dH}{du} + 2uH = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dH}{H} = -2udu$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή παίρνουμε:

$$H = \frac{dF}{du} = C_1 e^{-u^2} \tag{5.1.13}$$

η οποία γράφεται:

$$dF = C_1 e^{-u^2} du$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την εξίσωση αυτή παίρνουμε:

$$F(u) = C_1 \int e^{-u^2} du + C_2 \tag{5.1.14}$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες προσδιορίζονται από τις βοηθητικές συνθήκες (5.1.11α,β). Από τη βοηθητική συνθήκη (5.1.11α) παίρνουμε:

Κριτήρια στράγγισης των εδαφών

9.1 Εισαγωγικές έννοιες των κριτηρίων στράγγισης

9.1.1 Γενικότητες

Η παρουσία υπερβολικής υγρασίας στη ζώνη του ριζοστρώματος των φυτών έχει, εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις, επιζήμια επίδραση στην ανάπτυξή τους. Σ' αυτές τις περιπτώσεις οι επιπτώσεις στη γεωργική παραγωγή είναι σημαντικές, οπότε το οικονομικό αποτέλεσμα μιας γεωργικής εκμετάλευσης σίγουρα δεν θα είναι το επιδιωκόμενο. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζονται με τις στραγγίσεις των εδαφών, οπότε αυτόματα καθορίζεται και το κύριο αντικείμενό τους, που είναι η παρεμπόδιση της παρουσίας μιας κατάστασης με υπερβολική υγρασία στο ριζόστρωμα των φυτών. Ακόμα το αντικείμενο των στραγγίσεων σε ξηρές περιοχές επεκτείνεται και στην παρεμπόδιση της συγκέντρωσης διαφόρων αλάτων στη ζώνη του ριζοστρώματος. Αυτό γίνεται με την απόπλυση των εδαφών, αποτέλεσμα της οποίας είναι η απομάκρυνση των αλάτων αυτών από το έδαφος της ζώνης του ριζοστρώματος των φυτών.

Οι περισσότερες καλλιέργειες των φυτών απαιτούν το έδαφος στη ζώνη του ριζοστρώματός τους να παραμένει ακόρεστο σε νερό. Αυτό επιτυγχάνεται με τον έλεγχο της θέσης της στάθμης του υπόγειου νερού, έτσι ώστε αυτή να βρίσκεται κάτω από το ριζόστρωμα των φυτών ή αν ανυψωθεί λόγω βροχής ή άρδευσης να

μπορεί να κατεβεί σε σύντομο χρόνο, ο οποίος είναι ανάλογος με το είδος και την ηλικία των φυτών.

Το πρόβλημα της παρουσίας υψηλής υπόγειας στάθμης παρουσιάζεται γενικά σε εδάφη τα οποία είναι συνεκτικά, σχεδόν αδιαπέρατα, πολλές φορές αβαθή, που περιορίζονται από κάτω με άλλες αδιαπέρατες εδαφικές στρώσεις και δέχονται νερό από τις βροχές ή την άρδευση με βαθειά διήθηση. Ακόμα πολλές φορές το έδαφος, το οποίο μας απασχολεί από την πλευρά των στραγγίσεων, μπορεί να εδράζεται πάνω σε μια ημιδιαπερατή εδαφική στρώση, η οποία αποτελεί το πάνω όριο ενός ημίκλειστου υπό πίεση υδροφορέα. Έτσι το νερό από τον υδροφορέα και μέσα από την ημιδιαπερατή στρώση μπορεί με ανοδική κίνηση να εισέρχεται στο έδαφος και να δημιουργεί μια υψηλή υπόγεια στάθμη. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το έδαφος δεν είναι δυνατό να στραγγιστεί χωρίς την επέμβαση του ανθρώπου. Από αυτά γίνεται αντιληπτό ότι, κατά την εξέταση των κριτηρίων των στραγγίσεων των εδαφών, θα πρέπει να επικεντρώνεται η προσοχή μας στην επίδραση που έχει μια στράγγιση στις συνθήκες της υγρασίας και της αλατότητας στη ζώνη του ριζοστρώματος των φυτών.

9.1.2 Μαθηματική έκφραση των κριτηρίων στράγγισης

Οι διάφοροι μαθηματικοί τύποι, που δίνουν την ισαποχή των στραγγιστικών αγωγών στην περίπτωση της σταθερής στράγγισης ενός ομογενούς και ισότροπου εδάφους, όταν οι στραγγιστικοί αγωγοί εδράζονται πάνω σε ένα οριζόντιο αδιαπέρατο υπόστρωμα, με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.2.6) για $h_0 = 0$ ή της εξίσωσης (3.2.9) για $D = 0$, μπορούν να γραφούν στη γραμμική τους έκφραση με τη μορφή:

$$L^2 = 8KB \frac{y_0}{q_0}. \quad (9.1.1)$$

Στην εξίσωση αυτή L είναι η ισαποχή των στραγγιστικών αγωγών, K είναι ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας του εδάφους, B είναι ένα μέσο βάθος της υπόγειας στάθμης από το αδιαπέρατο υπόστρωμα, το οποίο μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$B = d_e + \frac{y_0}{2}, \quad (9.1.2)$$

όπου y_0 είναι το βάθος της υπόγειας στάθμης στο μεσοδιάστημα των στραγγιστικών αγωγών, q_0 η σταθερή παροχή βαθειάς διήθησης από βροχόπτωση ή άρδευση και d_e είναι το ισοδύναμο βάθος. Στην εξίσωση (9.1.1) ο όρος y_0/q_0 περιγράφει το λόγο της θέσης της υπόγειας στάθμης και της έντασης της παροχής

της βαθείας διήθησης. Με την εκλογή της κατάλληλης τιμής του όρου αυτού παρεμποδίζεται η παρουσία υπερβολικής υγραφίας στη ζώνη του ριζοστρώματος ενός συγκεκριμένου εδάφους. Γι αυτόν ακριβώς το λόγο ο όρος y_0/q_0 είναι και το **κριτήριο στράγγισης για συνθήκες σταθερής κατάστασης**.

Στην περίπτωση που εξετάζεται η ασταθής στράγγιση ενός ομογενούς και ισότροπου εδάφους, το κριτήριο στράγγισης του δε μπορεί να εκφραστεί με τον ίδιο όρο y_0/q_0 , όπως και στη σταθερή στράγγιση, αλλά με όρους οι οποίοι καθορίζουν την πτώση της υπόγειας στάθμης το χρόνο. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την εξίσωση (6.3.13) ή (6.3.14) των Glover-Dumm, η οποία μπορεί να γραφεί:

$$L^2 = \pi^2 \frac{KB}{S} \frac{t}{\ln\left(1,173 \frac{y_0}{y_t}\right)}, \quad (9.1.3)$$

στην οποία S είναι η ειδική απόδοση του εδάφους σε νερό ή το αποτελεσματικό πορώδες, t είναι ο χρόνος από την αρχή και y_t η θέση της στάθμης στο μεσοδιάστημα των στραγγιστικών αγωγών στο χρόνο t . Στην εξίσωση (9.1.3) ο όρος KB/S χαρακτηρίζει το έδαφος και ο όρος $t/\ln(1,173 y_0/y_t)$ καθορίζει το κριτήριο στράγγισης για συνθήκες ασταθούς κατάστασης. Ανάλογα κριτήρια στράγγισης μπορούν να ορισθούν και από τις άλλες εξισώσεις ισαποχής των στραγγιστικών αγωγών.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις εξισώσεις (9.1.1) και (9.1.3) με y συμβολίζεται το ύψος της υπόγειας στάθμης από το επίπεδο των στραγγιστικών αγωγών, ενώ αυτό που πραγματικά μας ενδιαφέρει στις στραγγίσεις είναι το βάθος της υπόγειας στάθμης από την επιφάνεια του εδάφους. Έτσι πάντοτε θα πρέπει να γίνεται η ανάλογη εκλογή του βάθους εγκατάστασης των στραγγιστικών αγωγών, ώστε να εξασφαλιστεί, με την εκλογή και του κατάλληλου κριτηρίου στράγγισης, το απαιτούμενο βάθος της θέσης της υπόγειας στάθμης από την επιφάνεια του εδάφους.

Για την εκλογή του κατάλληλου κριτηρίου στράγγισης θα πρέπει να εξετάζονται τα εξής:

- i. Οι **υδρολογικές συνθήκες** της περιοχής, από τις οποίες υπολογίζεται η ποσότητα του πλεονάζοντος νερού, το οποίο θα πρέπει να στραγγιστεί σε ένα καθορισμένο χρόνο.
- ii. Οι **αγρονομικές συνθήκες**, οι οποίες αναφέρονται στο είδος των καλλιεργούμενων φυτών, σε σχέση και με τα εδάφη της περιοχής. Από αυτές τις συνθήκες καθορίζεται το ανώτερο όριο της υπόγειας στάθμης του εδάφους στη ζώνη του ριζοστρώματος καθώς και η διάρκεια παραμονής της στη θέση αυτή.

- iii. Οι **εδαφικές συνθήκες**, από τις οποίες υπολογίζονται οι σχέσεις μεταξύ της ικανότητας αερισμού και της περιεχόμενης υγρασίας του εδάφους, μεταξύ της θέσης της υπόγειας στάθμης και της περιεχόμενης υγρασίας του εδάφους και ακόμα μεταξύ της θέσης της υπόγειας στάθμης και της τριχοειδούς ανύψωσης του νερού στο έδαφος.
- iv. Οι **οικονομικές συνθήκες**, από τις οποίες υπολογίζεται η τιμή μεταξύ του κόστους εγκατάστασης ενός στραγγιστικού συστήματος και του κέρδους, το οποίο προκύπτει από την αύξηση ή τη διατήρηση της υψηλής τιμής της παραγωγής σε μία καλά στραγγιζόμενη περιοχή.

Η πολυπλοκότητα της αλληλοεξάρτησης όλων αυτών των συνθηκών δείχνει ότι με το κριτήριο στράγγισης επιδιώκεται να εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο οι θεωρητικοεμπειρικές γνώσεις μας, κατά τη σύνταξη της μελέτης ενός στραγγιστικού δικτύου μιας περιοχής.

Πριν ακριβώς αποφασιστεί ο απαιτούμενος έλεγχος της υπόγειας στάθμης, με την εγκατάσταση ενός στραγγιστικού δικτύου, θα πρέπει να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα τα οποία είναι αποτέλεσμα των δεδομένων των ειδικών συνθηκών μιας συγκεκριμένης περιοχής.

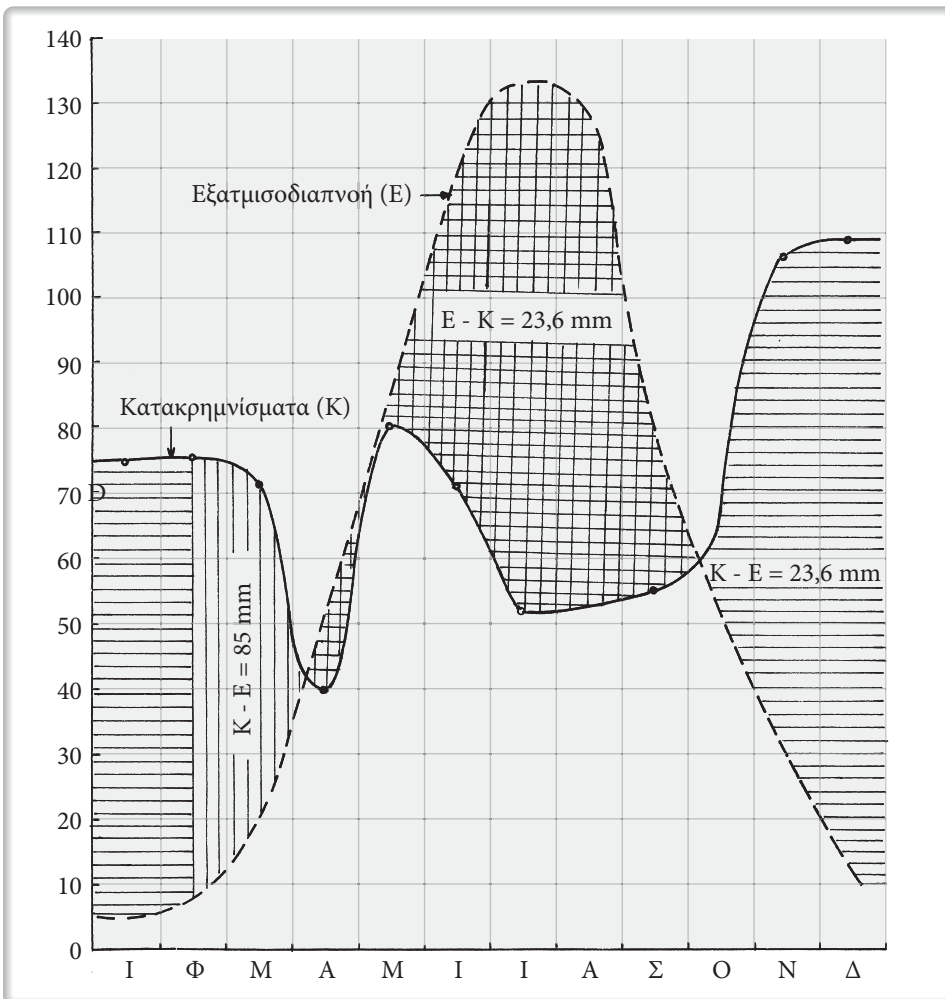
Έτσι θα πρέπει να ληφθεί πρόνοια για την απομάκρυνση της ποσότητας του νερού που πλεονάζει, στο χρονικό διάστημα που βρίσκεται έξω από την καλλιεργητική περίοδο. Αυτή η διαδικασία θα έχει ένα έμμεσο αποτέλεσμα στην ανάπτυξη των φυτών και ονομάζεται απλά **εκτός της καλλιεργητικής περιόδου στράγγιση**. Ακόμα θα πρέπει να ληφθεί πρόνοια για την απομάκρυνση του νερού που πλεονάζει κατά την κύρια καλλιεργητική περίοδο. Αυτή η διαδικασία θα έχει ένα άμεσο αποτέλεσμα στην ανάπτυξη των φυτών και ονομάζεται **στράγγιση της καλλιεργητικής περιόδου**. Τέλος θα πρέπει να ληφθεί πρόνοια για την αποφυγή της αλατότητας των εδαφών, η οποία είναι αποτέλεσμα της άρδευσης ή της τριχοειδούς ανύψωσης του υπόγειου νερού. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **στράγγιση για την απομάκρυνση των αλάτων**.

9.2 Επιθυμητό βάθος της υπόγειας στάθμης από την επιφάνεια του εδάφους

9.2.1 Βάθος στην εκτός καλλιεργητικής περιόδου στράγγιση

Σε περιοχές με κλίμα όπως είναι της Ελλάδας ο κύριος όγκος των κατακρημνισμάτων λαμβάνει χώρα από τον Οκτώβριο μέχρι και το Μάρτιο. Αυτό γίνεται

φανερό από τα δεδομένα της μέσης μηνιαίας βροχόπτωσης και της εξατμισοδιαπνοής μιας συγκεκριμένης περιοχής. Στο Σχήμα 9.1 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα των κατακρημνισμάτων και της εξατμισοδιαπνοής της περιοχής Αρναίας Χαλκιδικής. Η βροχόπτωση κυμαίνεται στις σχετικά υψηλές τιμές των 50 mm μηνιαία το Χειμώνα και στις αρχές της Άνοιξης και τις υψηλές τιμές των 70 και 80 mm το Φθινόπωρο. Αυτή ελαττώνεται τον Απρίλιο στα 40 mm, και λαμβάνει τη μικρότερη τιμή της των 10 mm τον Αύγουστο. Η ετήσια τιμή της είναι 746 mm. Η εξατμισοδιαπνοή είναι πολύ χαμηλή τη χειμερινή περίοδο και έχει μηνιαίες τιμές γύρω στα 10 mm κατά τους μήνες Δεκέμβριο ως Μάρτιο. Υψηλές



Σχήμα 9.1 Διάγραμμα κατακρημνισμάτων και εξατμισοδιαπνοής στο σταθμό Αρναίας.



Παράρτημα Ι. Διαφορικές εξισώσεις, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα, Σειρές, Συναρτήσεις

Ι.1. Λύση διαφορική εξίσωσης

Έστω η Δ.Ε.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

Βοηθητική εξίσωση: $m^2 + pm + q = 0$.

Ρίζες: $m_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Αν $p^2 - 4q < 0$ ρίζες μιγαδικές $m_{1,2} = a \pm ib$, όπου $a = -p/2$, $b = \sqrt{4q - p^2}/2$.

Λύση:

$$y(x) = e^{ax} [c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$$

Είναι λοιπόν:

$$p = 0 \text{ και } q = \lambda^2 > 0$$

$$p^2 - 4q = -4\lambda^2 < 0$$

ρίζες μιγαδικές $m_{1,2} = a \pm ib$, όπου $a = 0$ και $b = \lambda$.

$$y(\xi) = c_1 \cos(\lambda \xi) + c_2 \sin(\lambda \xi)$$

1.2. Παραγωγή συναρτήσεων

$$1. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$2. \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^n}\right) = -\frac{n}{u^{n+1}} \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}\left(\frac{u^n}{v^m}\right) = -\frac{u^{n-1}}{v^{m+1}} \left(mv \frac{du}{dx} - mu \frac{dv}{dx} \right)$$

$$8. \frac{d}{dx}(u^n v^m) = u^{n-1} v^{m+1} \left(nv \frac{du}{dx} - mu \frac{dv}{dx} \right)$$

$$9. \frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{d}{du}[f(u)] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$10. \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$11. \frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a) \frac{du}{dx}$$

$$12. \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$13. \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + (\ln u)u^v \frac{dv}{dx}$$