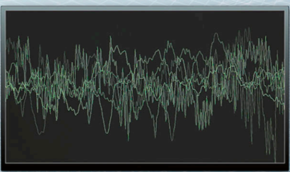
Δημήτρης Καραγιαννάκης

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



Περιέχει CD-rom

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-300-5

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Αντί Προλόγου

Θέλω να καταγράψω εδώ μία ακαδημαϊκή εξομολόγηση, όχι όμως πολύ … de profundis, προς διδάσκοντες και φοιτητές ή και προς τους απλά επαγγελματίες «πληροφορικάριους» ή «ηλεκτρονικούς» που έχουν επιστημονικές ανησυχίες (υπάρχουν και αυτοί και είναι πολλοί, περισσότεροι από όσους φανταζόμαστε!): Κάθε γραμμή του παρόντος βιβλίου (ή συγγράμματος ή εγχειριδίου ή όπως αλλιώς θα το βαπτίσει ο αναγνώστης) ήταν για μένα βάδισμα ισορροπίας σε τεντωμένο σκοινί. Από τη μία μεριά οι τεχνικές και εκπαιδευτικές ανάγκες της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (ή ΨΕΣ όπως επεκράτησε πλέον ο όρος αν και προσωπικά θα τον ήθελα με την λέξη «Ανάλυση» στη θέση του «Επεξεργασία»). Από την άλλη, η ανάγκη να αναδειχθούν οι πανέμορφες μαθηματικές ιδέες που σε θαυμαστή ώσμωση με τα όπλα της τεχνολογικής εξέλιξης οδηγούν στα εντυπωσιακά αποτελέσματα και εφαρμογές της ΨΕΣ σχεδόν σε όλους τους θετικούς (και όχι μόνο!) επιστημονικούς κλάδους.

Ελπίζω να πέτυχα να περάσω απέναντι χωρίς πτώση!

Δεν μπορώ όμως να αποφύγω τον πειρασμό να παραθέσω ως επίμετρο μία φράση του μεγάλου καλλιτέχνη και μηχανικού Leonardo da Vinci η μετάφραση (από τα αγγλικά!) της οποίας βαραίνει εξ ολοκλήρου εμένα: *Όποιος αντιπαθεί την υψηλή σοφία των μαθηματικών τρέφεται με ψευδαισθήσεις.*

Ηράκλειο Κρήτης , Αύγουστος 2011 μ.Χ. *Δημήτρης Καραγιαννάκης*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Παρουσιάζοντας ένα βιβλίο εκπαιδευτικού ή/και επιστημονικού περιεχομένου, ο συγγραφέας πρέπει να είναι **προσεκτικός** αλλά και **ειλικρινής** με τον αναγνώστη που θα το ανοίξει για πρώτη φορά. Υπ’ αυτή την έννοια, ο συγγραφέας πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στόχους, που όμως εμφανίζουν πάντα και μία σχετική δυσκολία:

Ο πρώτος στόχος είναι **να μην** κουράσει ή, ακόμη χειρότερα, **να μην μπερδέψει** –μακρηγορώντας– αυτούς στους οποίους απευθύνεται.

Ο δεύτερος είναι **να μην υποσχεθεί περισσότερα από όσα μπορεί**!

Δεν πρόκειται ως εκ τούτου εδώ να βρείτε μια εισαγωγή **υπέρ του επιστημονικού αντικειμένου** που είναι ο πυρήνας του βιβλίου, γιατί αυτό θα γίνει στις **εισαγωγικές επισημάνσεις του Κεφαλαίου 2**, όταν θα έχει ωριμάσει το διάβασμά σας.

Ας δούμε λοιπόν τώρα πώς θα υπηρετηθούν καλύτερα οι δύο αυτοί στόχοι: Κατ’ αρχάς ας διευκρινίσουμε **σε ποιους απευθύνεται** το ανά χείρας βιβλίο. Σημειώστε ότι ο συγγραφέας επιμένει να το αποκαλεί έτσι –δείτε και τη σχετική αναφορά στον **πρόλογο**– παρά τη «λογοτεχνική διατίμηση» που ο ίδιος επιφέρει έναντι όρων όπως σύγγραμμα, πόνημα, εγχειρίδιο κ.λπ. (παρόλο που δεν θα τον «χάλαγε» και ο όρος **βοήθημα**). Απευθύνεται λοιπόν σίγουρα σε όσους παρακολουθούν **μαθήματα σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης,** όπου εξ ολοκλήρου ή και εν μέρει πρέπει να αποκτήσουν γνώσεις πάνω στην **Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος** (ΨΕΣ). Αυτό αναγκαστικά απαιτεί ένα **σχετικά καλό υπόβαθρο μαθηματικών** γνώσεων, τουλάχιστον σε επίπεδο Απειροστικού Λογισμού Ι και Γραμμικής Άλγεβρας Ι. Βέβαια ο συγγραφέας, έχοντας πλήρη γνώση εκ των έσω του «**νεοελληνικού προβλήματος**» με τα Μαθηματικά, φρόντισε εμβόλιμα να επαναλάβει μερικές **βασικές έννοιές** τους χωρίς διάθεση υποτίμησης όσων τις κατέχουν πλήρως. Το βιβλίο όμως απευθύνεται **και στους διδάσκοντες.** Εδώ η λέξη βοήθημα ταιριάζει πιο καλά, αφού στο **CD των Ασκήσεων** που το συνοδεύει δίνονται όχι μόνο προβλήματα –αυτό είναι σχετικά εύκολο με τόσα κυρίως αγγλόφωνα που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο μερικές φορές και με τις απαντήσεις τους– αλλά και θεωρητικές περιλήψεις (ως πρόλογος) για να διευκολύνουν **και** τον διδάσκοντα στην παρουσίαση εξειδικευμένων ή/και δύσκολων προβλημάτων.

Τέλος, αλλά όχι τελευταία σε αξία κατηγορία αναγνωστών, απευθύνεται στους λεγόμενους «**εραστές της πληροφορικής**», οι οποίοι είτε σπουδάζουν συναφή αντικείμενα είτε έχουν κάποια **επαγγελματική ανάγκη επιμόρφωσης** είτε ακόμα έχουν την ασίγαστη περιέργεια ενός ερασιτέχνη. Αυτοί αλλά μόνον αυτοί μπορούν να παρακάμψουν τις μαθηματικές λεπτομέρειες του βιβλίου.

Και επειδή έχουμε ασυναίσθητα διολισθήσει ήδη στο πεδίο ορισμού του δεύτερου στόχου μας, ας δώσουμε και μερικές **χρηστικές συμβουλές** (δεν είναι αρεστή στον συγγραφέα η λέξη «οδηγίες» για τον αποκλειστικό και μόνο λόγο ότι αυτή δεν αρέσει συνήθως στους άλλους): Όταν το βιβλίο σάς συμβουλεύει **να ψάξετε το πού** είδατε κάποια έννοια, για λίγα λεπτά **ψάξτε το μόνοι σας**! Αν δεν το εντοπίσετε, συμβουλευτείτε το ευρετήριο. Είναι ένας καλός τρόπος να σας εντυπωθούν οι έννοιες και ο σκελετός του βιβλίου. Όταν υπάρχει παραπομπή σε κάποια άσκηση κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, **μην** προχωρήσετε αν τουλάχιστον δεν την κοιτάξετε, ανεξάρτητα αν τη λύσετε. Αν μέσα στις υποδείξεις ή/και απαντήσεις μιας άσκησης υπάρχει η αναφορά «προφανής, «εύκολη» κ.λπ., «παλέψτε» την **επί τόπου**. Αν δεν την καταφέρετε, μην πανικοβληθείτε, αφού μπορεί να ευθύνεται ο υποκειμενισμός του συγγραφέα. Πάρτε όμως και μια **δεύτερη γνώμη** από τον διδάσκοντα ή κάποιο φιλικό σας πρόσωπο που γνωρίζει. Επίσης –και με αυτό τελειώνουν τώρα οι συμβουλές– όταν ο συγγραφέας επικαλείται ή/και παραπέμπει σε **online** βιβλία ή manuals, μη βαρεθείτε **να τα βρείτε μόνοι σας**. Στο κάτω κάτω εν ανάγκη δείτε το ως «σερφάρισμα» στον ωκεανό του διαδικτύου.

Με κίνδυνο να κουράσει, άρα να μην υπηρετήσει σωστά τον πρώτο στόχο, οφείλει ο συγγραφέας να πει κάτι για το **γλωσσικό ύφος του βιβλίου·** ύφος που μάλλον μπορεί να ξενίσει ουκ ολίγους. Η γλωσσική μας **ένδεια** σήμερα στην Ελλάδα είναι **πιο μεγάλη** κατά μέσο όρο και από τη… μαθηματική μας! **Σκόπιμα** λοιπόν, αλλά αραιά και πού, γίνεται «επιστράτευση» του γλωσσικού πλούτου και πιστεύουμε ότι σε αυτό το σημείο γίνεται το βιβλίο, αν όχι παιδαγωγικό, τουλάχιστον **και διδακτικό**.

Παρόλο που ο τομέας των ευχαριστιών έχει γίνει κάτι σαν τυπολατρικός θεσμός στις εισαγωγές των βιβλίων, ίσως ακουστεί παλαιομοδίτικο, αλλά ο συγγραφέας γράφει τώρα «από καρδιάς» (αν τα έγραφε «εκ καρδίας» αναρωτιέται αν και πόσους αναγνώστες θα ενοχλούσε). Εν κατακλείδι λοιπόν εκφράζω τις ευχαριστίες μου ασφαλώς προς τις **Εκδόσεις Ζήτη**, που ανέχθηκαν τον εντελώς ανώμαλο ρυθμό των «δόσεων», όπως ετοιμάζονταν και αποστέλλονταν τα κομμάτια του βιβλίου. Αλλά και τον… **άμισθο** «βοηθό», τον οσονούπω πτυχιούχο και πρώην μαθητή του συγγραφέα στο **Τμήμα ΕΠΠ** του **ΤΕΙ Κρήτης κ. Γεώργιο Κασαγιάννη,** ο οποίος ετοίμασε το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου αλλά δεν θα βαρύνεται για τυχόν

λάθη που θα προκύψουν στους μαθηματικούς τύπους! Εκεί θα βαρύνεται μόνο ο συγγραφέας, που προκαταβολικά δηλώνει ότι θα είναι ευγνώμων σε όσους του τα υποδείξουν, ώστε να τα διορθώσει σε μία μελλοντική επανέκδοση.

ΚΑΛΟ ΣΑΣ ΔΙΑΒΑΣΜΑ!

Ηράκλειο Κρήτης, Αύγουστος 2011

Δρ. Δημήτρης Καραγιαννάκης
Καθηγητής Μαθηματικών ΣΤΕΦ ΤΕΙ Κρήτης

0ο Κεφάλαιο

Σύμβολα, Ορολογία, Θεμελιώδεις Έννοιες και Τύποι

Κανονικά έπρεπε να θεωρήσουμε τον αναγνώστη εξοικειωμένο σχεδόν με όλα όσα θα περιλάβουμε στο παρόν κεφάλαιο (εξού και η αρίθμησή του…), αλλά επειδή -δυστυχώς- η πορεία σε όλα τα στάδια της εκπαιδευτικής διαδικασίας στον τόπο μας χαρακτηρίζεται πλέον από μία μακρά ακολουθία γνωστικών κενών, παραθέτουμε συνοπτικά ένα σημαντικό μέρος από τον όγκο εννοιών, συμβόλων και τύπων που θα εμφανίζονται με την μεγαλύτερη συχνότητα Αν δεχθούμε έστω και εμπειρικά ότι ένα ψηφιακό σήμα (αλλά και σήμα οποιασδήποτε άλλης φύσης), πρωτογενώς ή σε … τελευταία ανάλυση δεν είναι παρά μία συνάρτηση $f(t)$ του χρόνου t, αντιλαμβανόμαστε ότι ούτως ή άλλως για την (ψηφιακή) ανάλυση σήματος χρειαζόμαστε σχεδόν όλα τα είδη των συνόλων αλλά και τις θεμελιώδεις έννοιες που συναντάμε στον Απειροστικό Λογισμό μιας πραγματικής μεταβλητής (αλλά ενίοτε και μη πραγματικής, όπως θα φανεί στην πορεία).

§0.1 Βασικά στοιχεία από τη θεωρία συνόλων

Υπενθυμίζεται ότι όταν ένα στοιχείο α ανήκει σε σύνολο A γράφουμε $\alpha \in A$ ενώ σε αντίθετη περίπτωση γράφουμε $\alpha \notin A$.

Εν γένει θα περιγράφουμε ένα σύνολο γράφοντας $A=\{x|\varphi(x)\}$ όπου x είναι τα στοιχεία του (είτε είναι αριθμοί είτε όχι) και όπου το $\varphi(x)$ –με την προφανή κατάχρηση στον συμβολισμό– θα εκφράζει την κοινή ιδιότητα που χαρακτηρίζει αυτά τα x (κάποια εξίσωση, ανισότητα, διάταξη, κ.λπ.).

Για παράδειγμα το $A=\{x|x^4 \neq 1\}$ εκφράζει το $A=\{x|x \neq \pm 1,\ \pm \iota\}$, δηλαδή εδώ είχαμε για $\varphi(x)$ το $x^4 \neq 1$. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιο εύχρηστο το $\varphi(x)$

να αντικατασταθεί από μία φράση με λέξεις.

Για παράδειγμα αντί να γράφουμε ότι $A=\{2\kappa | \kappa = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\}$ μπορούμε να γράψουμε $A=\{\kappa | \kappa \text{ άρτιος ακέραιος}\}$.

§0.2 Βασικά στοιχεία από τα σύμβολα του Απειροστικού Λογισμού

Ως γνωστόν, το πιο θεμελιώδες αριθμοσύνολο εδώ είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$

Κατόπιν έχουμε τους ακέραιους $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$.

Ειδικά αν θέλουμε το $\mathbb{N}$ να το "ενισχύσουμε" με το μηδέν γράφουμε $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,3,...\}$.

Τα κλάσματα των ακεραίων (δηλαδή οι ρητοί αριθμοί) συμβολίζονται με

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle|\ m \text{ και } n \text{ ακέραιοι και πρέπει } n\neq 0\right\}.$$

Το σύνολο όλων των πραγματικών γράφεται ως

$$\mathbb{R}=\{x | \text{όπου } x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}.$$

Τέλος για τους μιγαδικούς γράφουμε $\mathbb{C}=\{x+iy |\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

Όταν ένας μιγαδικός z γράφεται υπό την μορφή $x+iy$ (διότι θα δούμε και άλλους τρόπους περιγραφής του) λέμε ότι έχει πραγματικό μέρος $\operatorname{Re} z = x$ και φανταστικό $\operatorname{Im} z = y$ (που πάλι είναι πραγματικός!). Ο μιγαδικός $x-iy$ ονομάζεται συζυγής του z και γράφεται $\bar{z}$ και ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2+y^2}$ ονομάζεται απόλυτη τιμή (ή μέτρο) του z και συμβολίζεται με $|z|$. Αν το ότι $|z|^2=z\bar{z}$ δεν σας είναι προφανές μετά από λίγη σκέψη, παραμείνατε στο §0.2 για όσο χρόνο χρειαστεί μέχρι να τα καταφέρετε! Εις τον Απειροστικό Λογισμό πραγματικής μεταβλητής έχουμε συχνή χρήση των διαστημάτων. Γράφουμε για ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)=\{x | \alpha<x<\beta\}$, για κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]=\{x | \alpha\le x\le\beta\}$ και για ημιανοικτά ή/και ημίκλειστα διαστήματα, αντίστοιχα, τα $[\alpha,\beta)=\{x | \alpha\le x<\beta\}$ και $(\alpha,\beta]=\{x | \alpha<x\le\beta\}$.

Με αυτά καλύπτουμε τα πεπερασμένα διαστήματα (δηλαδή όσα έχουν πεπερασμένο μήκος $L=\beta-\alpha$). Πολύ χρήσιμα όμως είναι και τα απειροδιαστήματα με τις αντίστοιχες βαρύγδουπες περιγραφές ημιανοικτό/ημικλειστό αριστερά/δεξιά κ.λπ., δηλαδή τα

$$(\alpha,\infty)=\{x|\alpha<x\}$$

$$[\alpha,\infty)=\{x|\alpha\le x\}$$

$$(-\infty,\alpha)=\{x|x<\alpha\}$$

$$(-\infty,\alpha]=\{x|x\le\alpha\}$$

Το $(-\infty,\infty)$ "ταυτίζεται" βέβαια με το $\mathbb{R}$ (παρ' όλο που το πρώτο υπονοεί διάταξη ενώ το δεύτερο ένα "λιτό" απειροσύνολο) και ασφαλώς τα $-\infty,\infty$ είναι σύμβολα και όχι αριθμοί.
Περνώντας τώρα σε συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ μπορούμε να γράφουμε $f=u+iv$ όπου οι u,v είναι συναρτήσεις $[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και ονομάζονται, όπως πριν με τον μιγαδικό z, $\operatorname{Re}f=u$ το πραγματικό μέρος της f και $\operatorname{Im}f=v$ το φανταστικό μέρος της.
Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής θα λέμε ότι είναι στοιχείο του συναρτησιακού συνόλου $C[\alpha,\beta]$ και βέβαια αυτό ισοδυναμεί με το ότι οι u,v είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.
Αν η f έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών (δείτε όμως και το επόμενο σχόλιο για μία γενίκευση) και εκεί υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όριά της και είναι πεπερασμένα, θα καλούμε την συνάρτηση κατά τμήματα συνεχή (κ.τ.σ.) και το αντίστοιχο συναρτησιοσύνολο θα συμβολίζεται $C^0[\alpha,\beta]$. Προφανώς όταν οι u,v είναι στο αντίστοιχο $C^0[\alpha,\beta]$ και θα είναι η $f=u+iv$ είναι και αντιστρόφως. Μπορούμε να επιτρέψουμε ένα ή και τα δύο άκρα να απειρισθούν τροποποιώντας τον συμβολισμό κατ' αναλογία.

Σχόλια για τις κ.τ.σ. συναρτήσεις:

α) Σε ορισμένες περιπτώσεις θα δούμε ότι πρέπει να δεχθούμε το πλήθος των ασυνεχειών να είναι αριθμήσιμο. Επειδή όμως δεν θέλουμε να βυζαντινολογούμε –με μαθηματικό τρόπο– ας πούμε απλά ότι θα επιτρέπουμε να έχουμε άπειρο πλήθος ασυνεχειών, ίδιας φύσεως με τον επίσημο ορισμό, που θα είναι "απαριθμήσιμο" όπως κάνουμε με τους ακεραίους.

β) Δεν είναι ανάγκη για μία f στο $C^0[\alpha,\beta]$ να ορίζεται καν στα σημεία ασυνέχειάς της. Όταν όμως ορίζεται και τα πλευρικά της όρια είναι ίσα (και δίνουν βέβαια άλλη τιμή από την τιμή της f εκεί) λέμε αυτή την ασυνέχεια αιρόμενη ασυνέχεια (για λεπτομέρειες δείτε το [1] της Γενικής Βιβλιογραφίας).

γ) Έχουμε δει ήδη δύο συναρτησιοσύνολα: το $C^0\left[\alpha,\beta\right]$ και το γνήσιο υποσύνολο του $C\left[\alpha,\beta\right]$ χωρίς να έχουν καμία ιδιαίτερη δομή. Αργότερα θα δούμε και μερικά άλλα στον κύριο κορμό του βιβλίου αλλά και στα παραρτήματα. Με την κατάλληλη δομή θα αποτελέσουν τους λεγόμενους συναρτησιακούς διανυσματικούς χώρους, έναν μαθηματικό γαλαξία απαραίτητο για την ανάλυση σχεδόν κάθε σήματος.

§0.3 Βασικές συναρτήσεις και χρήσιμοι τριγωνομετρικοί τύποι

Μεταξύ άλλων θα χρειαστούμε:

i. Το ν-βάθμιο πολυώνυμο, $\nu \in \mathbb{N}$: $P_\nu\left(x\right)=\alpha_0 x^\nu+\alpha_1 x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu$. Προφανώς όταν $\nu=0$ παίρνουμε $P_0\left(x\right)=\alpha_0=\text{σταθερά}$.

ii. Τις συναρτήσεις ημιτόνου, συνημιτόνου, εφαπτομένης και συνεφαπτομένης σημειούμενες με $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ και $\cot x$.

iii. Την εκθετική συνάρτηση $\exp x$ ή e^x και την γενίκευσή της α^x (με $\alpha>0$ και κυρίως όταν $\alpha=2$).

iv. Την συνάρτηση του φυσικού και δεκαδικού λογάριθμου, συμβολιζόμενες αντίστοιχα ως, $\ln x$ και $\log x$.

v. Την συνάρτηση απόλυτη τιμή, $|x|$.

vi. Την συνάρτηση ακέραιο μέρος του x (συνήθως IntegerPart ή floor function στις γλώσσες προγραμματισμού) δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον x. Αν πιστέψουμε το σχόλιό μας της §0.2 η $\left[x\right]$ ανήκει στην $C^0\left(-\infty,+\infty\right)$ αλλά προφανώς αν και η $\left[x\right]$ ορίζεται και στα σημεία ασυνέχειας της, δηλαδή το $\mathbb{Z}$, οι ασυνέχειες δεν είναι αιρόμενες. Παραμείνατε στο §0.3 μέχρι να το ξεκαθαρίσετε και αυτό!

vii. Την συνάρτηση $\operatorname{sin}cx=\dfrac{\sin x}{x}$ (προσοχή το c δεν είναι σταθερά… αλλά γράμμα- μέρος του συμβολισμού). Την γραφική της παράσταση αλλά και την χρησιμότητα της θα την δούμε στην §2.4.

viii. Την συνάρτηση **Heaviside** $u_c(t)$ με $c \geq 0$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t < c \\ 1, c \leq t \end{cases}$$

Προφανώς όταν, σε τετριμένη εκδοχή, $c = 0$ η $u_c(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$.

Επομένως για $c > 0$ έχουν ότι η $u_c(t)$ ανήκει στο $C^0[0, \infty)$. Βλέπε και Παράρτημα Β.

ix. Την "συνάρτηση" **δέλτα** του Dirac ως προς το α, δ_α. Τόσο τα εισαγωγικά στην λέξη συνάρτηση όπως και τον ορισμό και την χρησιμότητα του κορυφαίου αυτού μαθηματικού όπλου για την μελέτη των σημάτων θα την αναπτύξουμε στα Παραρτήματα Β και Γ. Θεωρούμε ότι είναι πολύ νωρίς να παρουσιάσουμε τον ορισμό σε αυτό το σημείο διακινδυνεύοντας ένα … μόνιμο εγκλεισμό του αναγνώστη εντός του Κεφ. 0.

x. $\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

xi. $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha),\ \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$.

xii. $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha),\ \cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$.

xiii. $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\cos\alpha$ (τύπος του Euler), για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (και όχι μόνο…).

xiv. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha}\right),\ \sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{\mathrm{i}\alpha} - e^{-\mathrm{i}\alpha}\right)$ Εδώ το xiv είναι άμεση συνέπεια κατάλληλης διπλής χρήσης του xiii. Κάντε το ως προπόνηση!

xv. Αν $z^n = 1, n \in \mathbb{N}$ τότε $z = z_\kappa = e^{2\kappa\pi i/n}$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n-1$ και αντιστρόφως. (Οι αριθμοί z_κ καλούνται τα ***n*** **πρώτα ριζικά της μονάδας**).

Και κλείνουμε το Κεφ. 0 με τον επόμενο τύπο που τουλάχιστον στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση έκανε τον σεβαστό κ. De Moivre διασημότερο του Euler, αν και αποτελεί απλή ειδική εφαρμογή του xiii:

xvi. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ για $n \in \mathbb{Z}$ (και όχι μόνο…).

1ο Κεφάλαιο

Τα Θεμέλια των Χώρων Εσωτερικού Γινομένου

Πολλές έννοιες που θα συναντήσουμε στο παρόν κεφάλαιο τις συναντάμε σε ένα προπτυχιακό εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας. Υπάρχουν όμως και μέρη της θεωρίας που μάλλον ο διδασκόμενος θα τα συναντήσει για πρώτη φορά. Αυτά κυρίως αφορούν τα απείρου πλήθους ορθοκανονικά συστήματα και θεωρήματα συνδεόμενα με αυτά (π.χ. ανισότητα Bessel, το Λήμμα των Riemann & Lebesgue και άλλα). Μερικών εξ αυτών τις αποδείξεις τις παραλείπουμε αφού το ανά χείρας σύγγραμμα δεν σκοπεύει να παίξει τον ρόλο ενός βοηθήματος προχωρημένης Γραμμικής Άλγεβρας. Δίνεται όμως μια ποικιλία από βιβλιογραφικές παραπομπές για όποιον ενδιαφέρεται.

§1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Η πιο θεμελιώδης αλγεβρική δομή που χρειαζόμαστε είναι ο διανυσματικός χώρος (δ.χ.). Οι αριθμοί που θα χρησιμοποιηθούν σε σχέση με τον ορισμό ενός δ.χ. μπορεί να είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ (τυπικά έπρεπε να πούμε ότι αυτά έχουν την δομή σώματος αλλά δεν θα μας απασχολούν τέτοιες "λεπτομέρειες"). Τα στοιχεία ενός δ.χ. θα τα ονομάζουμε διανύσματα (αλλά ας μην παρασύρεται ο αναγνώστης από την τετριμμένη χρήση του όρου λόγω της Φυσικής στο χώρο ή στο επίπεδο που γνωρίζει). Τυπικά ένα (μη κενό προφανώς) σύνολο V θα καλείται δ.χ. πάνω στο αριθμοσύνολο F $\left(F=\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\right)$ αν το εμπλουτίσουμε με τις εξής πράξεις, $+$ και $\cdot$,

1. *Πρόσθεση διανυσμάτων*: αν $u,v\in V$ ορίζεται ένα τρίτο διάνυσμα $u+v$ πάλι στον V.
2. *Πολλαπλασιασμός με αριθμό*: για κάθε $u\in V$ και $\alpha\in F$ ορίζεται ένα διάνυσμα $\alpha\cdot u\in V$.

Οι εν λόγω πράξεις πρέπει να διασφαλίζουν και τα εξής:

1. $(u+v)+w=u(v+w)$ για κάθε $u,v,w\in V$.
2. Υπάρχει διάνυσμα ονομαζόμενο "μηδενικό διάνυσμα" $\vec{0}$ (το βέλος το βάζουμε για να μην το μπερδεύουμε με τον αριθμό 0 και όχι για να παραπέμψουμε στη συνηθισμένη από την Φυσική γραφή) με την ιδιότητα $\vec{0}+v=\vec{v}+\vec{0}=v$ για κάθε $v\in V$.
3. Για κάθε $v\in V$ υπάρχει ένα διάνυσμα ονομαζόμενο "μείον v", $-v$ με την ιδιότητα $v+(-v)=\vec{0}$.
4. $u+v=v+u$ για κάθε $v,u\in V$.
5. Για κάθε $\alpha\in F$ και $v,u\in V$, $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$.
6. Για κάθε $\alpha,b\in F$ και $u\in V$, $(\alpha+b)\cdot u=\alpha\cdot u+b\cdot u$ και $\alpha\cdot(b\cdot u)=(\alpha b)\cdot u$.
7. Για κάθε $v\in V$, $1\cdot v=v$.

Σχόλιο: Αφού επισημάνουμε ότι η ιδιότητα 9 χρειάζεται διότι δεν πρόκειται περί του συνηθισμένου πολλαπλασιασμού έχουμε από τις 8 και 9 ότι

$$u+(-1)u=(1-1)u=0\cdot u=-0\cdot\vec{u}$$

και επειδή $u-0\cdot u=(1-0)u=u \Rightarrow 0\cdot u=\vec{0}$

άρα το $-u$ της 4 δεν είναι παρά το $(-1)u$ το ήδη εξασφαλισμένο… Και άλλες παρόμοιες "περικοπές" θα μπορούσαν να γίνουν σε έναν πιο αυστηρό ορισμό του δ.χ. V, αλλά με αυτή τη μακρά λίστα ιδιοτήτων αισθανόμαστε πιο απελευθερωμένοι όταν αργότερα οι πράξεις μας γίνουν πιο σύνθετες από ό,τι είχαμε συνηθίσει με τα διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου.

Ανάλογα με το αν $F=\mathbb{R}$ ή $F=\mathbb{C}$ καλούμε τον δ.χ. V πραγματικό ή μιγαδικό δ.χ. και προσοχή διότι αυτά τα επίθετα αφορούν τους αριθμούς και όχι τα διανύσματα!

Ένα $W\subseteq V$ (W υποσύνολο του V) ονομάζεται διανυσματικός υποχώρος (δ.υ.) του V αν στο W οι ίδιες +, και με το ίδιο F έχουμε τις ίδιες ιδιότητες του ορισμού ενός δ.χ. Αν θέλουμε να ελέγξουμε "γρήγορα" κατά πόσο το W είναι δ.υ. έχουμε το εξής κριτήριο ελέγχου.

➲ *Κριτήριο Ελέγχου Ενός Διανυσματικού Υποχώρου*

Για $W\neq\varnothing$, έχουμε δ.υ. αν για κάθε $u,v\in W$ και κάθε $\alpha,b\in F \Rightarrow \alpha u+bv\in W$.

Θα χρειαστούμε τέσσερεις ακόμα ορισμούς:

Ορισμός Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Αν $v_1,...,v_n$ διανύσματα ενός δ.χ. V, το διάνυσμα u καλείται γραμμικός συνδυασμός (γ.σ.) των $v_1,...,v_n$ αν $u = v_1\alpha_1 + ... + v_n\alpha_n$ για κάποιους αριθμούς $\alpha_1,...,\alpha_n \in F$.

Ορισμός Γραμμικής Ανεξαρτησίας Διανυσμάτων

Τα $v_1, v_2,...,v_n$ ενός δ.χ. V θα καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα (γ.α.) αν η εξίσωση $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$ με $\alpha_1,...,\alpha_n \in F$ ικανοποιείται μόνο αν $\alpha_1 = \alpha_2 = = ... = \alpha_n = 0$. Αλλιώς τα καλούμε γραμμικώς εξαρτημένα (γ.ε.).

Ορισμός Γραμμικού Αναπτύγματος

Το σύνολο όλων των u που είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_n$ καθώς τα $\alpha_1,...,\alpha_n$ μεταβάλλονται, ονομάζεται γραμμικό ανάπτυγμα των $v_1,...,v_n$ και συμβολίζεται με $span\{v_1,...,v_n\}$.

Ορισμός Βάσης ενός Δ.Χ.

Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $v_1,...,v_n$ ενός δ.χ. V θα ονομάζεται βάση του V αν είναι γ.α. και $V = span\{v_1,...,v_n\}$. Ο αριθμός αυτών, n, μάλιστα ονομάζεται διάσταση του δ.χ. V και γράφουμε $n = \dim V$.

Σχόλια:

α) Από τους πιο πάνω ορισμούς βγαίνει (και είναι μια εύκολη άσκηση για το σπίτι) ότι τα $v_1,...,v_n$ είναι γ.α. αν και μόνο αν κανένα από αυτά δεν είναι γ.σ. των υπολοίπων $n-1$ διανυσμάτων.

β) Ο αναγνώστης θα πρέπει ήδη να διαισθάνεται ότι ένας δ.χ. (πραγματικός ή μη) που δεν είναι ο τετριμένος $V = \{0\}$ έχει άπειρο πλήθος βάσεων που οδηγεί μετά από σκέψη ότι η διάσταση του V είναι ανεξάρτητη της επιλογής της βάσης.

γ) Ο ορισμός αυτός της βάσης που δόθηκε αφορά εκ κατασκευής δ.χ. πεπερασμένης διάστασης. Αλλά με αυτούς που είναι απειροδιάστατοι θα ασχοληθούμε σε αργότερα και κυρίως στα παραρτήματα.

Ασκήσεις §1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

1) Είναι μάλλον προφανές ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους δ. υπόχωρων ενός δ.χ. είναι και αυτός δ.υ. Ελέγξτε το! Μπορείτε να πείτε το ίδιο για την ένωσή τους; Γιατί;

(*Υπόδειξη*: Αν $u, v \in W_1 \cup W_2$ όπου W_1, W_2 δύο δ.υ ενός δ.χ. ισχύει το κριτήριο $\alpha, b \in F \Rightarrow \alpha u + bv \in W_1 \cup W_2$; Γιατί;)

2) Αν V ένας δ.χ. ως προς F και $u \in V$ τότε το σύνολο $\{\alpha u | \alpha \in F\}$ είναι δ.υ. του V και μάλιστα εμπεριέχεται σε κάθε δ.υ. που περιέχει το u.

3) Αποδείξτε ότι το συναρτησιοσύνολο $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \middle| f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$ καθίσταται πραγματικός δ.χ. με τις συνήθεις πράξεις $f+g$ και kf.
(*Υπόδειξη*: Ιδιότητες ολοκλήρωσης.)

4) Ορίζουμε ως $V = C^1[\alpha, \beta]$ τις συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι με τις συνήθεις πράξεις καθίσταται ένας δ.χ. και επομένως θα είναι και δ.υ. του δ.χ. $C[\alpha, \beta]$

5) Έστω το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων (με n σταθερό) με στοιχεία από το F.
Ορίζουμε επί αυτού την συνήθη πρόσθεση πινάκων και τον πολ/σμό αριθμού επί πίνακα. Τότε παίρνουμε ένα δ.χ. που τον συμβολίζουμε $M_n(F)$ (όπου το M αντιστοιχεί στον όρο Matrix = Πίνακας, που μερικές φορές απαντάται και με τον όρο Μητρώο). Μπορείτε αμέσως να περιγράψετε το $\vec{0}$ του εν λόγω δ.χ.;

6) Παρουσιάζουμε τώρα ένα παράδειγμα «εξωτικού» δ.χ. που όμως είναι πολύ χρήσιμος και σε ειδικότερες μορφές τον συναντάμε σε πολλές ασκήσεις Φυσικής:
Έστω Ω ένα μη κενό υποσύνολο του F και V ένας οποιοσδήποτε δ.χ. Ορίζουμε το σύνολο V^{Ω} όλων των $f : \Omega \to V$ με τις συνήθεις πράξεις $f+g$ και kf. Τότε έχουμε έναν νέο δ.χ.. Σημειώστε ότι η $f(z)$ είναι διάνυσμα και όχι αριθμός και ότι η μηδενική συνάρτησή μας στον V^{Ω} είναι αυτή με εικόνα το ουδέ-

τερο στοιχείο του V. Προσπαθήστε να μην μπερδεύετε την Συνάρτηση $0(z) = \vec{0}$ με το ίδιο το $\vec{0}$.

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται διανυσματικές συναρτήσεις και αν περιορισθούμε στο υποδιάστημα $[0, \infty)$ και με $V = \mathbb{R}^3$ έχουμε την περιγραφή των διανυσματικών πεδίων της κλάσσικής Μηχανικής.

7) Όπως έχουμε αναφέρει στην θεωρία όταν ένα σύνολο διανυσμάτων εντός ενός δ.χ. είναι γ.ε. τότε τουλάχιστον ένα εξ αυτών είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Αυτό είναι σχετικά απλό αφού από την σχέση $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ αν υποθέσουμε π.χ. ότι $\alpha_1 \neq 0$ τότε έχουμε $v_1 = -(\alpha_2 / \alpha_1) v_2 - \ldots - (\alpha_n / \alpha_1) v_n$, κ.ο.κ. Συμπερασματικά εδώ έχουμε $v_1 \in span\{v_2, \ldots, v_n\}$ κ.ο.κ.

§1.2 Διανυσματικοί Χώροι και Εσωτερικό Γινόμενο

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι ο ορισμός ενός δ.χ. δεν περιλαμβάνει την πράξη πολλαπλασιασμού μεταξύ διανυσμάτων. Η έννοια του εσωτερικού γινομένου (ε.γ.) μπορούμε να πούμε ότι έρχεται να εμπλουτίσει την δομή ενός δ.χ. προς αυτή την κατεύθυνση και όπως θα φανεί αργότερα δημιουργεί το άριστο μαθηματικό περιβάλλον για την μελέτη των σημάτων. Προειδοποιούμε όμως τον αναγνώστη ότι εν γένει οι δ.χ. δεν έχουν "αυτομάτως" και εκ του φυσικού τους κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός Εσωτερικού Γινομένου

Έστω V ένας δ.χ. με $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Για $u, v \in V$ ορίζουμε ως ε.γ. των δύο αυτών διανυσμάτων μία πράξη ανάμεσά τους που οδηγεί σε ένα αριθμό του F (προσοχή όχι διάνυσμα) που συμβολίζουμε $\langle u, v \rangle$. Η πράξη $\langle \ , \ \rangle$ έχει τις ιδιότητες:

1. Για κάθε $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$.
2. Για κάθε $u \in V$, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$.
3. Για κάθε $u, v, w \in V$ και $\alpha, b \in F$, $\langle \alpha u + bu, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + b \langle u, w \rangle$.
4. Για κάθε $u, v \in V$, $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$.

Ορισμός Χώρου Εσωτερικού Γινομένου

Ο δ.χ. V με ένα ε.γ. ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου (χ.ε.γ.)

Μπορούμε να απαριθμήσουμε πολλές ιδιότητες ενός ε.γ. στηριγμένες στις (1)-(4) του ορισμό του (και τις οποίες τις αφήνουμε για ασκήσεις εύκολης ως μέτριας δυσκολίας):

α) Για κάθε $u,v,w \in V$ και $\alpha, b \in F$ ισχύει ότι $\langle u, \alpha v + bw \rangle = \bar{\alpha}\langle u,v\rangle + \bar{b}\langle u,w\rangle$.

β) Για κάθε $v \in V$ και κάθε $\alpha \in F$, $\langle \alpha v, \alpha v\rangle = |\alpha|^2 \langle v,v\rangle$.

γ) Για κάθε $v \in V$, $\langle \bar{0}, v\rangle = 0$.

δ) Στον φυσικό χώρο $\mathbb{R}^3$ πιθανόν να έχετε συναντήσει για $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ και $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται μέσω της πράξης $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2$ (ή ακόμα και ίσως να θυμάστε τον ορισμό από τη φυσική $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_2|\cos\theta$, με θ την γωνία μεταξύ των $\vec{u}_1, \vec{u}_2$). Επαληθεύστε ότι το $\langle u_1, u_2\rangle = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ έχει τις ιδιότητες του ε.γ. που δώσαμε για τον αφηρημένο δ.χ. V.

ε) Γενικεύστε και αποδείξτε την ιδιότητα 3 του ορισμού ενός ε.γ. και την α) για πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων και αριθμών F.

Επιτέλους ήρθε η στιγμή να δώσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα (αν και το κάναμε πλαγίως στο δ) για χ.ε.γ.

Παράδειγμα 1

Παίρνουμε για $V = \mathbb{C}^n$ (n-άδες, γραμμές ή στήλες, με μιγαδικές συντεταγμένες) και $F = \mathbb{C}$. Με τη συνήθη πρόσθεση n-άδων και τον συνήθη πολλαπλασιασμό αριθμών επί n-άδα έχουμε έναν δ.χ. Ορίζουμε για $r_1, \ldots, r_n > 0$ την εξής πράξη μεταξύ δύο $z = (z_\kappa)$ και $w = (w_\kappa)$, $1 \le \kappa \le n$, με $z_{\mathrm{i}}, w_{\mathrm{i}} \in \mathbb{C}$: $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} r_k z_k \bar{w}_k$.

Τότε ο $(\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle)$ είναι χ.ε.γ. Οι αριθμοί $r_1, \ldots, r_n$ ονομάζονται σταθμά (ή βάρη) του $(\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle)$. Συνήθως εμφανίζεται μόνο η περίπτωση $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$.

Παράδειγμα 2

Έστω $V = \mathbb{C}[\alpha, \beta]$ όπως ορίστηκε στην §0.2 και που όπως είδαμε ήδη στην §1.1 με τις συνήθεις πράξεις του αθροίσματος συναρτήσεων $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί συνάρτηση έχουμε έναν (μιγαδικό) δ.χ. Ορίζουμε τώρα την εξής πράξη μεταξύ $f, g \in V$: $\langle f, g \rangle = \int_\beta^\alpha f(x)\overline{g(x)}dx$. (Ο Απειροστικός Λογισμός Ι πρέπει να σας έχει ήδη πείσει ότι η πράξη αυτή είναι εφικτή!). Δοκιμάστε τώρα τις γνώσεις σας στα ορισμένα ολοκληρώματα για να δείτε ότι πράγματι έχει ορισθεί ένα ε.γ.

Παράδειγμα 3

Έστω $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία (άπειρος) ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$. (Για παράδειγμα: όταν $z_n = \frac{1}{2^n i}$ έχουμε $|z_n|^2 = \frac{1}{4^n}$ και η $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κλασσική "φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος" με πρώτον όρο το $\frac{1}{4}$ και "λόγο" το $\frac{1}{4}$ και αντίστοιχη σειρά έχει τιμή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Το σύνολο όλων των $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αυτή την ιδιότητα το ονομάζουμε ℓ^2. Η πρόσθεση των διανυσμάτων του (υπενθυμίζουμε ότι εδώ είναι ακολουθίες) και ο πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα που κάνουν τον ℓ^2 δ.χ. είναι οι συνηθισμένες επεκτάσεις των πράξεων όταν είχαμε πεπερασμένο πλήθος συντεταγμένων (όπως στο Παράδειγμα 1). *Προσοχή όμως*: δεν είναι εντελώς προφανές ότι $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ τότε η $\{z_n w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Θα είναι μία από τις προτεινόμενες στο CD ασκήσεις που συνοδεύονται από εκτεταμένες υποδείξεις. Αν ορίσουμε (σαν γενίκευση του Παραδείγματος 1) για πράξη $\langle z, w \rangle = z \cdot w = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \cdot \overline{w}_n$ δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι ισχύουν οι 4 ιδιότητες ενός ε.γ. Αυτό που ίσως σας δυσκολέψει είναι ότι η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει, ή σε απλουστευμένη διατύπωση ότι το απειροάθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \cdot \overline{w}_n$ είναι κάποιος αριθμός στο $\mathbb{C}$ όπως θα το βρείτε στις ασκήσεις του §1.3 με επαρκή υπόδειξη.

Παράδειγμα 4

Ο χ.ε.γ. $L^2(-\infty, +\infty)$. Είτε θα περιμένετε να ωριμάσουν οι πιο εύκολες περιπτώσεις χ.ε.γ. ή, αν ανυπομονείτε, πηγαίνετε τώρα στο Παράρτημα Γ.

Ασκήσεις §1.2 Διανυσματικοί Χώροι και Εσωτερικό Γινόμενο

1) Στον γνωστό μας δ.χ. $C[-1,\ 1]$ ορίζουμε την σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} |f(x)+g(x)|\,dx\,.$$

Έχουμε ορίσει τώρα ένα ε.γ. στον εν λόγω χώρο;

(*Υπόδειξη*: $\langle x^2, 0\rangle = 2/3$ (γιατί;) $\neq 0$. Άρα η απάντηση είναι όχι Γιατί;)

2) Στον δ.χ. $V = C^1[\alpha,\ \beta]$ (δείτε την Άσκ. 4 της §1.1) ας πάρουμε $[\alpha,\ \beta] =$ $= [-1,\ 1]$. Ορίζουμε για δύο διανύσματα-συναρτήσεις του V την σχέση

$$\langle f,\ g\rangle = f(0)\, g(0) + \int_{-1}^{1} f'(x)\, \overline{g'(x)}\, dx\,.$$

Είναι το $\langle\ ,\ \rangle$ ένα ε.γ. επί του V;

(*Υπόδειξη*: Πάρτε $f(x) = x$, και $g(x) = 0$ που προφανώς ανήκουν στον V (αλλά και σε κάθε δ.χ. $C^1[\alpha,\ \beta]$). Τότε όμως $\langle f, g\rangle = 0$ ενώ $g(x) \neq \vec{0}$. Άρα;)

3) Ας υποθέσουμε ότι στον γνωστό μας **πραγματικό** δ.χ. $C(\alpha, \beta)$ έχουμε το γνωστό ε.γ. του Παραδ. 2 της §1.2. Δείξτε ότι δεν έχουμε πλέον ένα ε.γ. επί του **δ. υπέρχωρου** $C^0(\alpha, \beta)$.

(*Υπόδειξη*: Πάρτε $f(\gamma) = 1$ για $\alpha<\gamma<\beta$ και $f(x) = 0$ για το υπόλοιπο ανοικτό διάστημα. Τότε $\langle f, f\rangle = 0$ αλλά $f(x) \neq \vec{0}$.)

4) Έστω V ο δ.χ. που ορίσαμε στην Άσκ. 6 της §1.2. Ορίζουμε για $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ την εξής σχέση: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}[A\,(\overline{B})^T]$. Εδώ με $(\overline{B})^T$ συμβολίζουμε τον **ανάστροφο** (όλες οι γραμμές γίνονται στήλες και οι στήλες γραμμές) του πίνακα με τα **συζυγή** στοιχεία του B και με tr (εκ του trace) το **ίχνος** του πίνακα (= άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του). Ελέγξτε ότι το $\langle\ ,\ \rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του V.

(*Υπόδειξη*: Αν $A = (\alpha_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τότε $\langle A, B\rangle = \sum_{\iota=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{b_{ji}}$.)

Παράρτημα 4ου Κεφ.

Χρήση του Mathematica 6

Ακολουθήστε τα **interactive** (και εις διπλούν!) παραδείγματα που σας δίνονται εδώ, βάζοντας τις δικές σας **μικρές παραλλαγές** των παραμέτρων και διασταυρώστε τα αποτελέσματά σας με τα ήδη λυμένα. Βρείτε την κατάλληλη διασύνδεση με όσα είδατε στην θεωρία της ΨΕΣ και στις διάφορες Ασκήσεις του CD. Μερικά σχήματα αφορούν θεωρία Παραρτημάτων και μπορείτε σε αυτή την φάση να τα παραλείψετε προσωρινά. Ίσως χρειαστεί να κάνετε **επαναληπτικές συγκρίσεις/διασταυρώσεις** και με τα αντίστοιχα σχήματα της διάσπαρτα προτεινόμενης **online** βιβλιογραφίας τα οποία θα αναζητήσετε στις **αγγλικές λέξεις-κλειδιά** που έχουμε παραθέσει. Συμβουλευθείτε εν ανάγκη και το **ευρετήριο**, αφού πολλοί όροι δίνονται με μεταφραστικές **παραλλαγές**.

Παράδειγμα Πρώτο της Interactive Mathematica

Για τους τύπους των συναρτήσεων παραθύρου που σας δίνονται θα αναγνωρίσατε στα:

(α) το Τριγωνικό Παράθυρο (ή Παράθυρο Barlett, βλ. Άσκ. 9(β) της §3.2),

(β) το Παράθυρο Hanning, βλ. Άσκ. 10 της §3.2) και στα

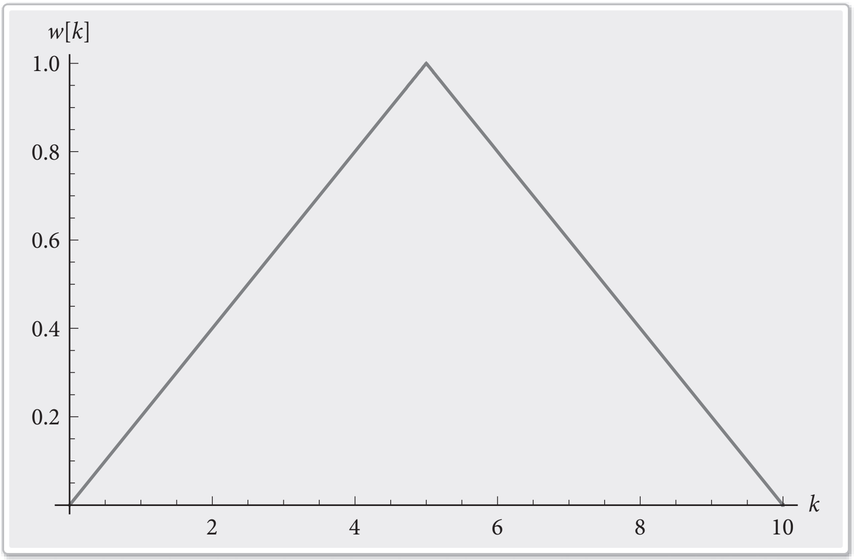
(γ) και (δ), αντίστοιχα, τα γνωστά μας Παράθυρα Hamming και Blackman από το Παράδειγμα 3 στην θεωρία της Ενότητας 3.2.

Υπενθυμίζουμε ότι θέλουμε το M **άρτιο** αριθμό (αν και δεν είναι προς θανάτου να μην είναι, οπότε κάνουμε τις γνωστές απλές τροποποιήσεις που ήδη σας έχουμε αναπτύξει –πού;– σε θεωρία και ασκήσεις).

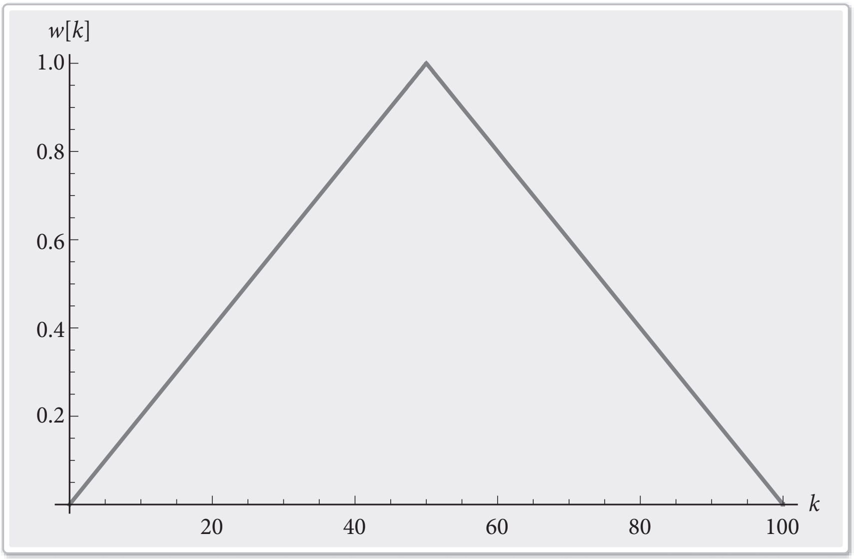
Εδώ παίρνετε μια γεύση για το πώς σχεδιάζονται αυτές οι συναρτήσεις ειδικά στις περιπτώσεις του (μικρού) $M = 10$ και του (μεγάλου) $M = 100$.

Μετά εσείς μπορείτε να «παίξετε» με το εύρος του M, από το 2 (μάλλον άχρηστο!) ως …1 εκατομμύριο (μάλλον αχρείαστο!), μιμούμενοι την επίλυσή μας.

(α) $w[\kappa]=\begin{cases} \dfrac{2\kappa}{M} , & 0\le\kappa\le\dfrac{M}{2} \\ 2-\dfrac{2\kappa}{M} , & \dfrac{M}{2}\le\kappa\le M \end{cases}$

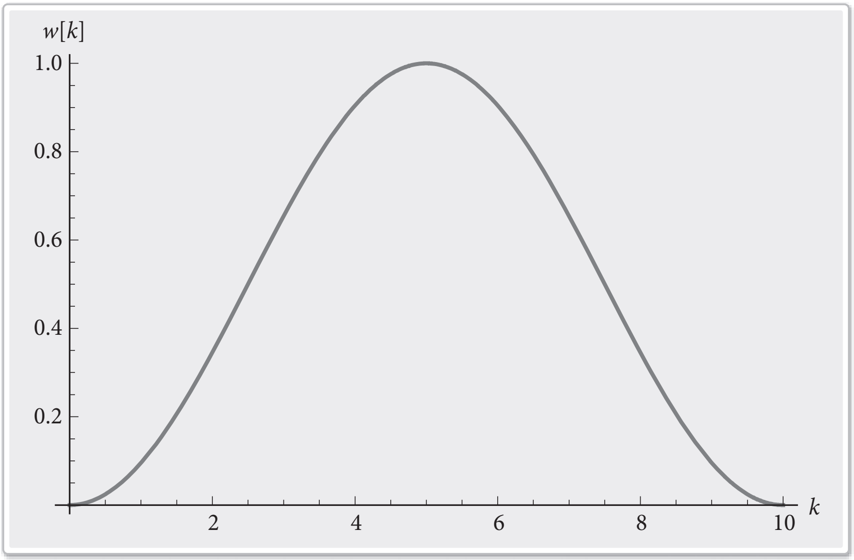


Εικόνα 1: $M = 10$

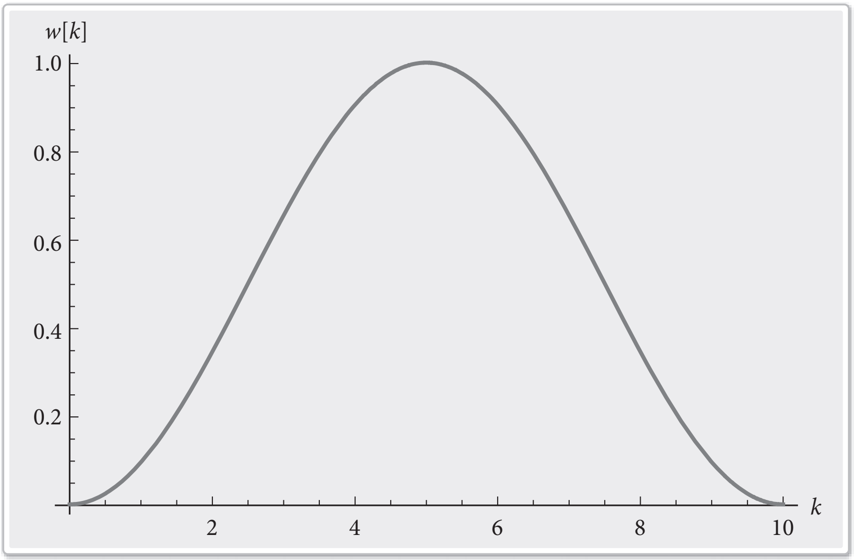


Εικόνα 2: $M = 100$

(β) $w[\kappa]=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi\kappa}{M}\right)\right],\;\; 0\le\kappa\le M$

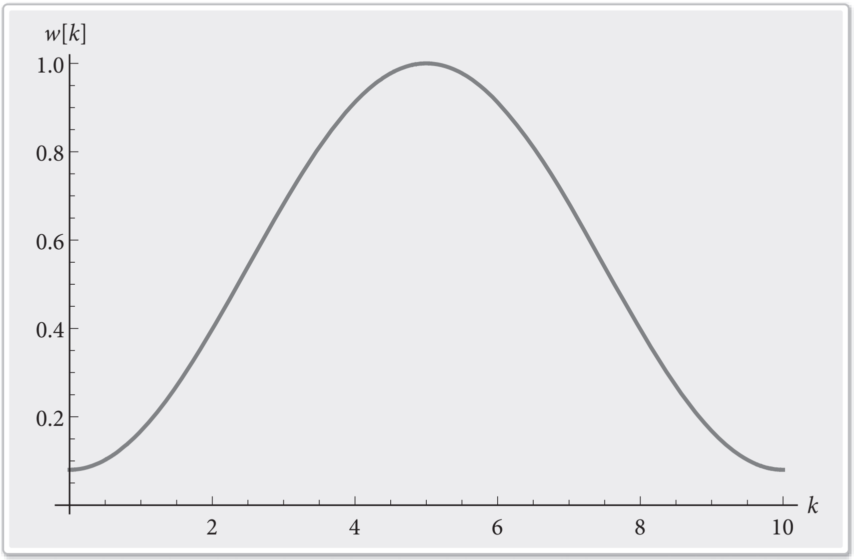


Εικόνα 3: $M=10$

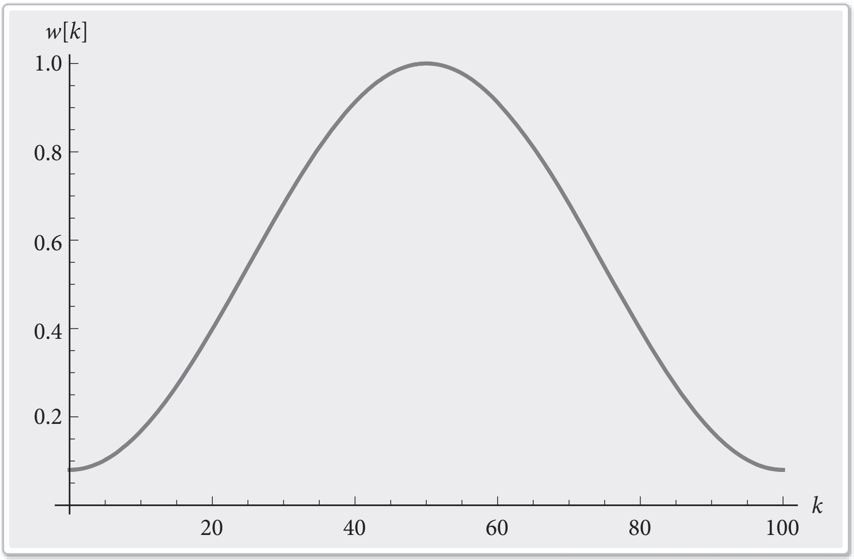


Εικόνα 4: $M=100$

(γ) $w[\kappa] = 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi\kappa}{M}\right), \quad 0 \le \kappa \le M$

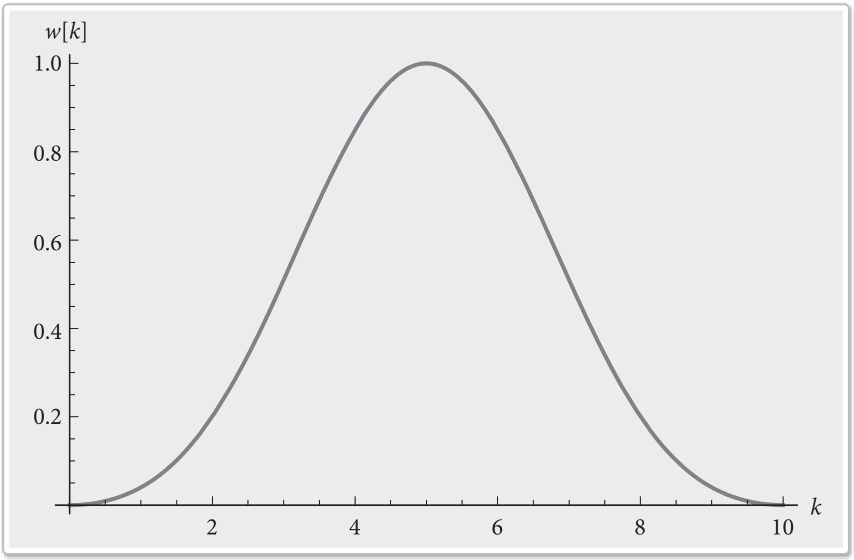


Εικόνα 5: $M = 10$

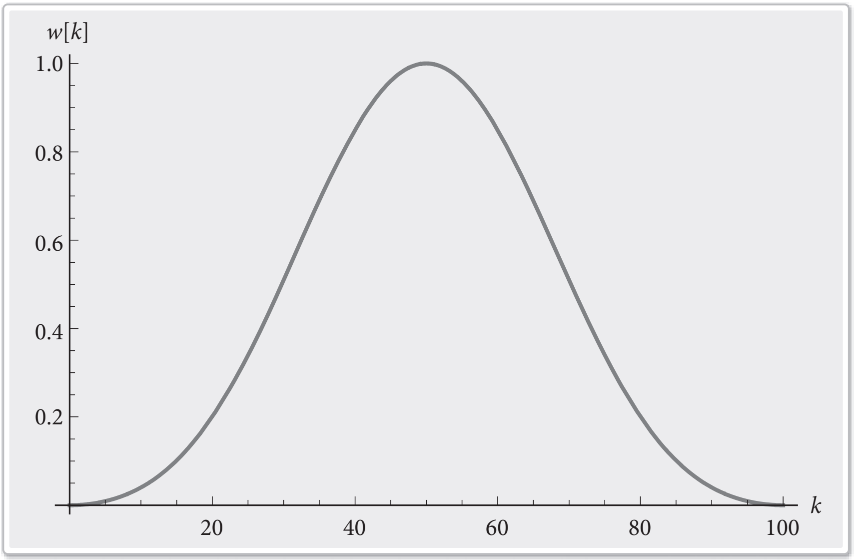


Εικόνα 6: $M = 100$

(δ) $w[\kappa]=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi\kappa}{M}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi\kappa}{M}\right),\ \ 0\le\kappa\le M$



Εικόνα 7: $M=10$



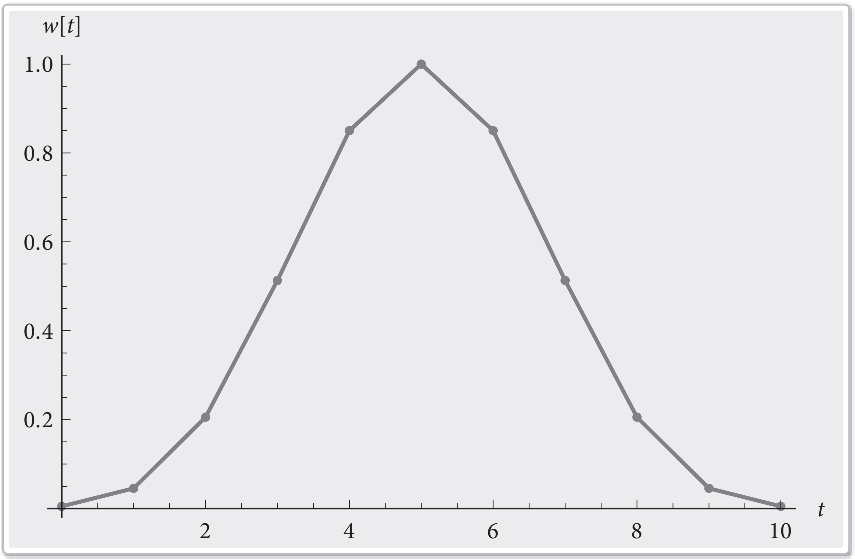
Εικόνα 8: $M=100$

Παράδειγμα Δεύτερο: Πιο Σύνθετα Παράθυρα

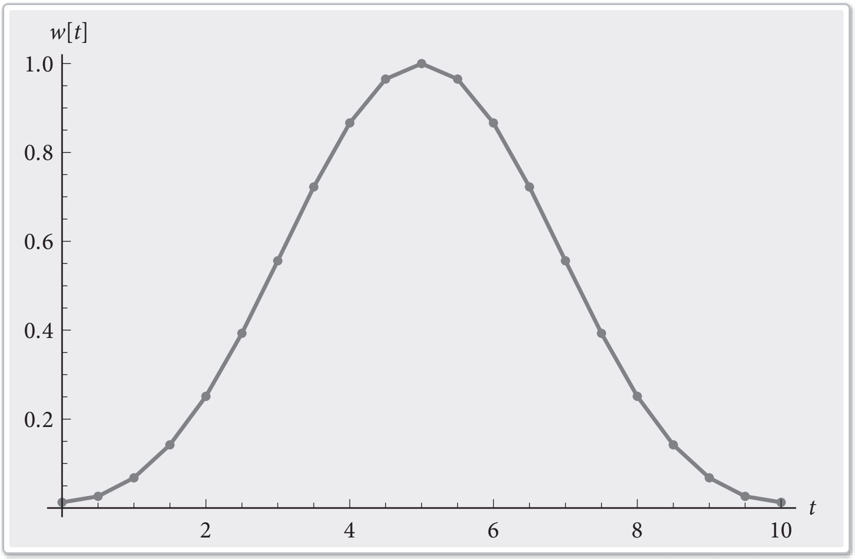
(i) Το Παράθυρο **Blackman-Harris** είναι στην πραγματικότητα μία **οικογένεια από παράθυρα** με 3 (ή ακόμα και 4 όρους) και παίζοντας με του συντελεστές έχουμε ένα «δώσε και πάρε» για να ισορροπήσουμε το **πλάτος του κυρίως λοβού** με το μέγεθος των **πλευρικών λοβών**. Ψάξτε να δείτε πού ακριβώς εισήχθησαν αυτές οι έννοιες. Η Βρετανική **online** εγκυκλοπαίδεια με την εντυπωσιακή ονομασία **diracdelta.co.uk** (για επιστήμονες και μηχανικούς) μας λέει ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις παραθύρου **(α)** και **(β)** που σας δίνονται δίνουν για την συγκεκριμένη επιλογή των συντελεστών, αντίστοιχα πλευρικούς λοβούς 67 dB και 61 dB και υπηρετούν τον στόχο να μειώσουν την «φασματική διαρροή» (**leakage**) του **FT** στο Πεδίο του Χρόνου. Προφανώς δεν θα σας ζητήσουμε να τα ελέγξετε αυτά αλλά θα σας πούμε πώς να τα σχεδιάζετε. Εδώ το N είναι το μήκος του παραθύρου και θα πάρουμε $N=10$ και $N=20$, αντίστοιχα με βηματισμό $\Delta t=1$ για την (α) και $\Delta t=0.5$ για την (β). Εσείς μετά μιμηθείτε την λύση μας και πάλι με την Mathematica βρείτε τι γίνεται για **μεγάλο** N (όχι όμως παράλογα μεγάλο!)

(α) $$w(t)=0.42323-0.49755\cos\left[\frac{2\pi t}{N}\right]+0.07922\cos\left[\frac{4\pi t}{N}\right]$$

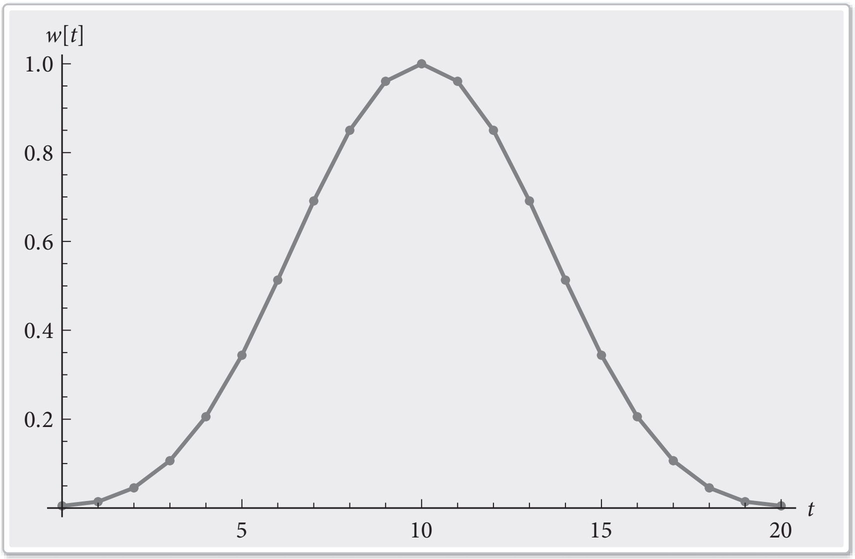
(β) $$w(t)=0.44959-0.49364\cos\left[\frac{2\pi t}{N}\right]+0.05677\cos\left[\frac{4\pi t}{N}\right]$$



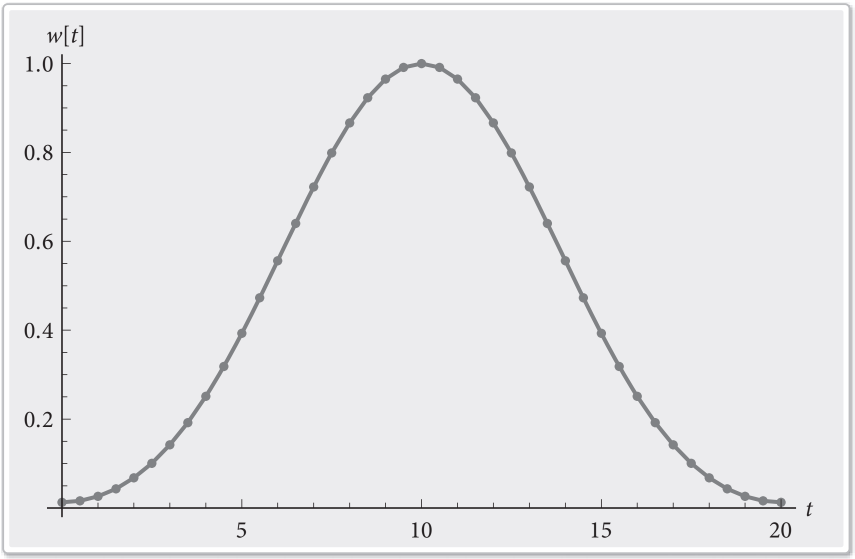
Εικόνα 9: (α) με $N=10$



Εικόνα 10: (β) με $N = 10$

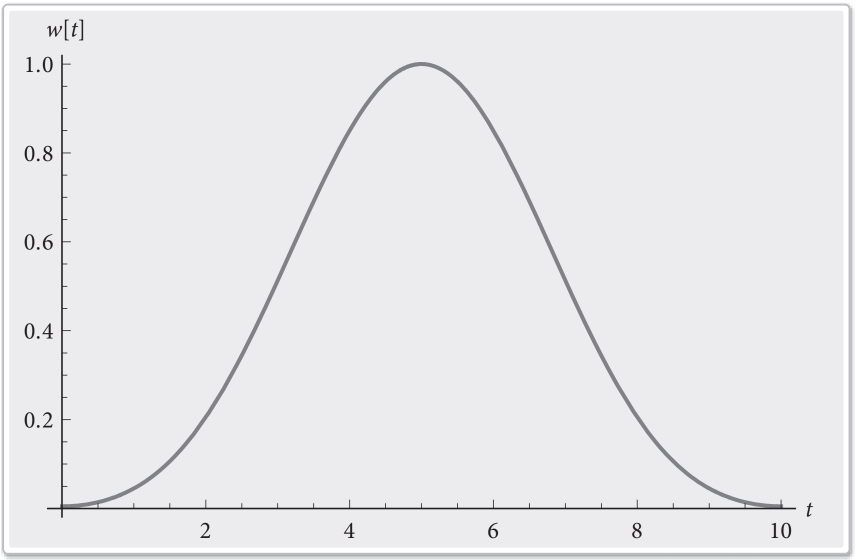


Εικόνα 11: (α) με $N = 20$

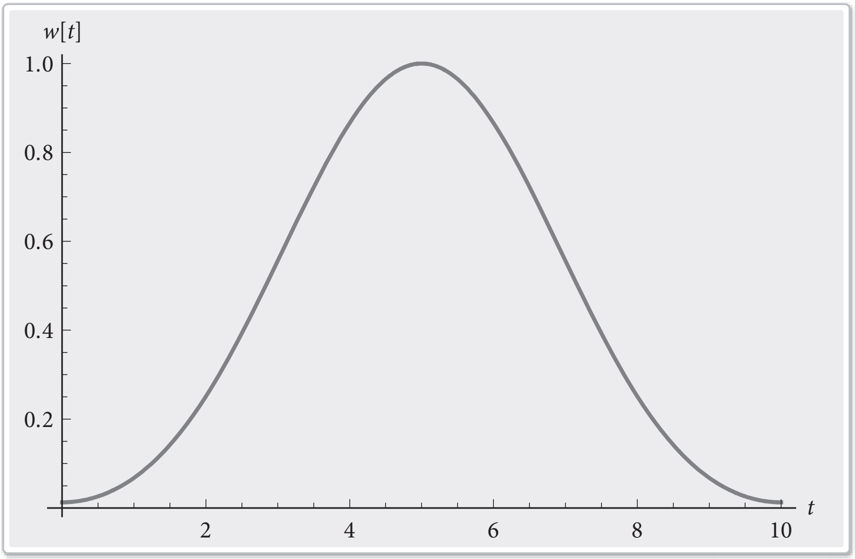


Εικόνα 12: (β) με $N = 20$

Σχόλιο του Συγγραφέα: Ο Γ. Κασαγιάννης πολύ εύστοχα μου υπέδειξε την πιθανότητα **να αγνοηθεί ο βηματισμός** και να σχεδιαστεί η καμπύλη κατά συνεχή τρόπο αφού αφορά **αναλογικά** κυκλώματα. Τότε σε αυτή την περίπτωση προσέφερε ως “bonus” και τα δύο τελευταία σχήματα.



Εικόνα 13: $N = 10$



Εικόνα 14: $N = 10$

Παράδειγμα Τρίτο: Πιο Σύνθετα Παράθυρα

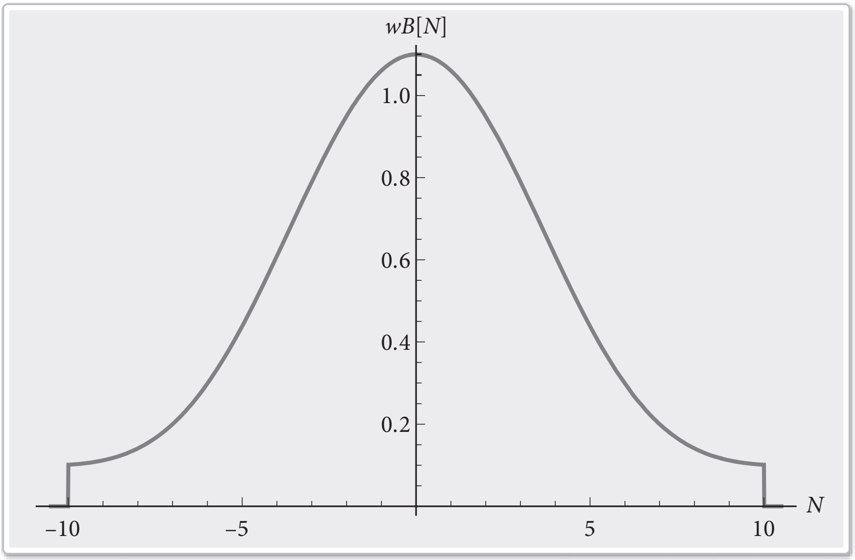
Ο **J.O. Smith III**, στο **online** σύγγραμμά του **“Spectral Audio Signal Processing”**, αναφέρεται και στην λεγομένη **Οικογένεια Παραθύρων Blackman** που περιγράφεται για διάφορες, μηδενικές και μη, τιμές των τριών συντελεστών μέσω του τύπου

$$w_B[N] = w_R[N]\left[\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\Omega_M N) + \alpha_2 \cos(2\Omega_M N)\right]$$

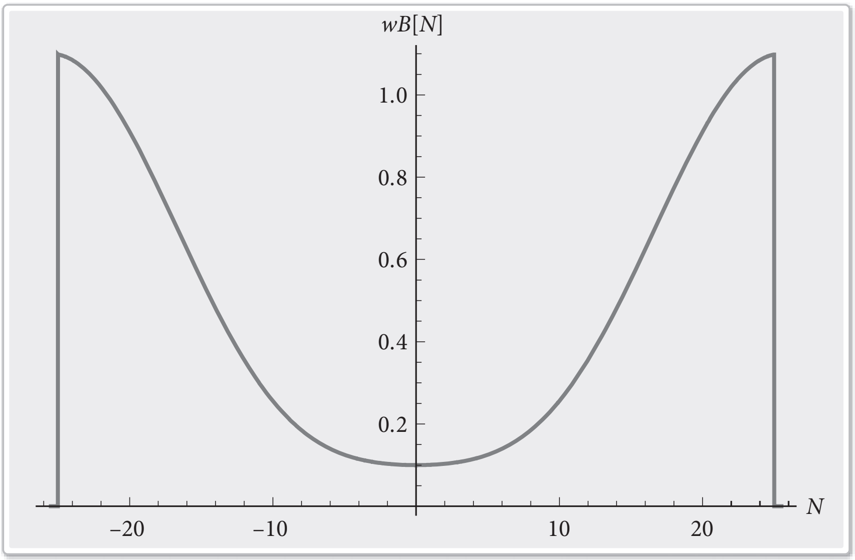
όπου $\Omega_M = 2\pi / M$ και $w_R[N]$ το γνωστό μας **ορθογώνιο** Παράθυρο συμμετρικό ως προς το O, δηλαδή = 1 για $N \in \left[-(M-1)/2,\ (M-1)/2\right]$ και = 0 εκτός του κλειστού αυτού διαστήματος.
Προφανώς και αυτό εξυπηρετεί τις ίδιες ανάγκες με το (i), αλλά για τον **DTFT** και **δεν** πρόκειται να σας ζητήσουμε να πάρετε ούτε καν τον FT (δηλαδή τον FFT αφού πάτε στην εγγύτερη προς το Μ δύναμη του 2 με μηδενικές τιμές για όσα δείγματα θα έλειπαν (κάπου τα ξανασυζητήσαμε αυτά, πού;). Βέβαια, χωρίς να θέλουμε να δώσουμε μοχθηρές ιδέες σε διδάσκοντες, όλα αυτά θα μπορούσατε να τα αναλάβετε ως **projects εργαστηρίου** και να τα δείτε να λειτουργούν στην πράξη! Εμείς «χάριν παιδιάς» αφού θα ήταν αφελές να νομίσουμε ότι θα ελέγχαμε την **roll-off** ή τους **λοβούς** με απλούς αριθμούς, αντί να πάρουμε τους συντελεστές με τις κλασσικές τους τιμές που είναι οι $\alpha_0 = 0.42$, $\alpha_1 = 0.5$ και $\alpha_2 = 0.08$, θα πάρουμε αντίστοιχα:

(α) 0.5, 0.5 και 0.1 με $M = 21$

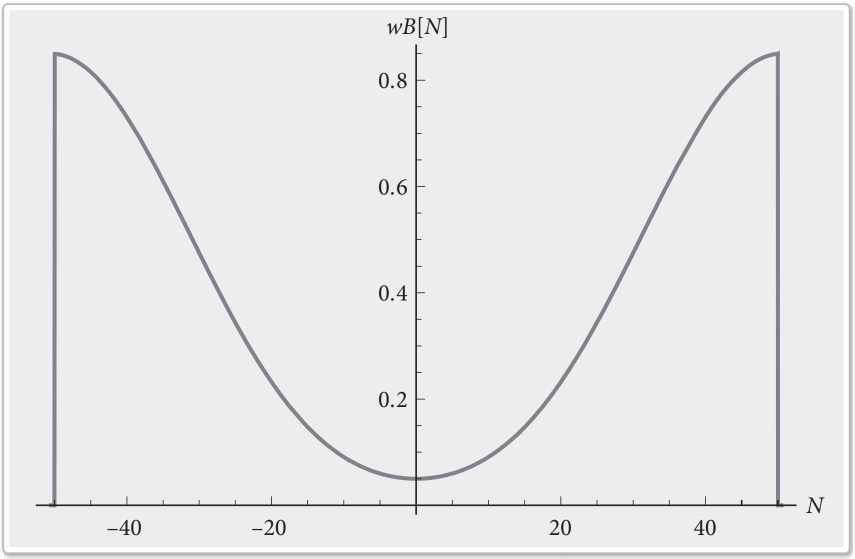
(β) 0.5, –0.5 και 0.1 με $M = 51$
(γ) 0.4, –0.4 και 0.05 με $M = 101$.
Εσείς μιμηθείτε τον τρόπο μας και με Mathematica σχεδιάστε τα, με τους ίδιους συντελεστές αλλά με τα M των άλλων δύο κάθε φορά (6 συνολικά καμπύλες έχετε να σχεδιάσετε!)



Εικόνα 15: $M = 21$



Εικόνα 16: $M = 51$



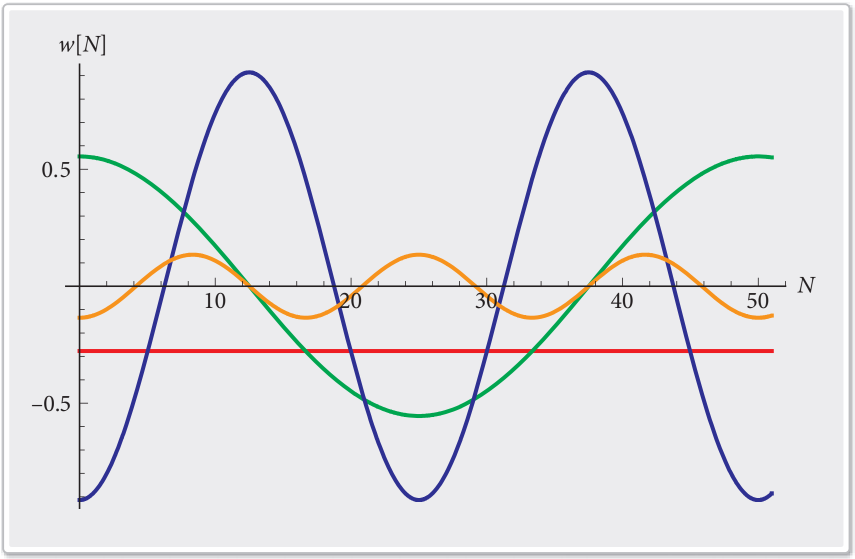
Εικόνα 17: $M = 101$

Παράδειγμα Τέταρτο: Πιο Σύνθετα Παράθυρα

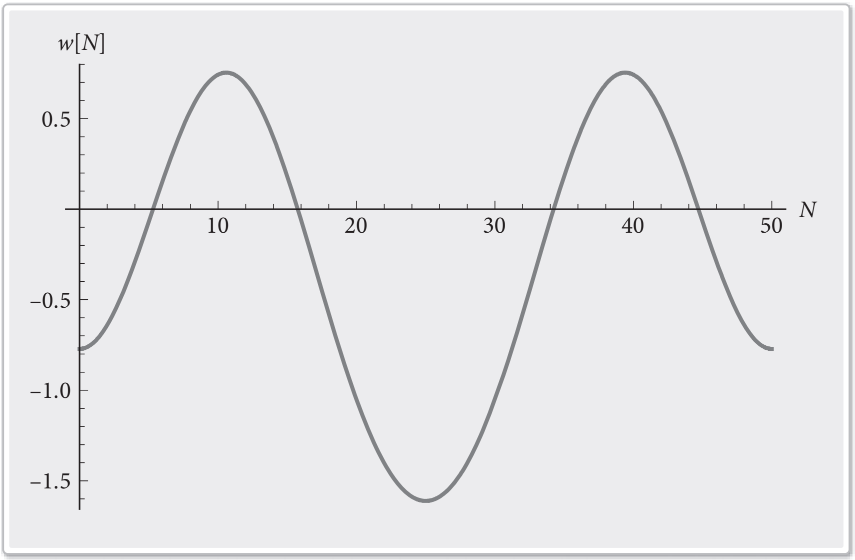
Παρουσιάζοντας τα παραδείγματα αυτά, των πιο «απαιτητικών» Παραθύρων, (όχι μόνο από μαθηματικής άποψης όταν είναι να εφαρμοστεί ο FT, αλλά και από τεχνικής εφαρμογής τους), αμφιταλαντευτήκαμε ανάμεσα στην παρουσίαση του πολύ σημαντικού Παραθύρου του **J. Kaiser** και του παραθύρου **Nuttall**. Το πρώτο, τα τελευταία 10 χρόνια τουλάχιστον, έχει δοκιμαστεί στην πράξη και οι ειδικοί μας λένε ότι είναι **σχεδόν βέλτιστο** παράθυρο, γύρω από το $\omega = 0$, όσον αφορά τις κορυφές (peaks). Δυστυχώς η παρουσία της **συνάρτησης Bessel** αν και είναι θεμελιώδης στα προχωρημένα φυσικομαθηματικά προβλήματα μας αποθάρρυνε! Το δεύτερο είναι αντιπρόσωπος μιας ευρύτερης κατηγορίας παραθύρων με κάπως μεν χαμηλή διακριτική ικανότητα, αλλά είναι στα λεγόμενα dynamical range παράθυρα και είναι καλή επιλογή για τα FIR φίλτρα με βάση την εξής θεωρητική παρατήρηση, που η μαθηματικής της απόδειξη υπερβαίνει τους στόχους μας:

Παράθυρα της μορφής $w[n] = \sum_{\kappa=0}^{K} \alpha_\kappa \cos\left(\dfrac{2\pi\kappa n}{N-1}\right)$, έχουν μόνο $2K+1$ μη μηδενικούς συντελεστές μετά από την εφαρμογή του DFT. Ο A. H. Nuttall ήταν ο πρώτος που σε σχετική δημοσίευσή του στο IEEE (Transaction on acoustics, speech and signal processing) το 1981 έδωσε εφτά τετράδες «ιδανικές» για διάφορες εφαρμογές του εν λόγω παραθύρου. Σημειώστε ότι εμείς μέχρι τώρα είδαμε παράθυρα μέχρι το

K=2 (οπότε τα projects που υπαινιχθήκαμε δεν είναι τελικά τόσο οδυνηρά!). Ας δούμε λοιπόν και ένα τέτοιο παράθυρο όταν *K*=3 **με τυχαία (Random) τετράδα συντελεστών με τρία δεκαδικά ψηφία**, το οποίο θα σχεδιάσουμε για *N*=51 και εσείς θα το κάνετε για *N*=101 (με δικούς σας Random αριθμούς).



Εικόνα 18: Οι επιμέρους συναρτήσεις του αθροίσματος

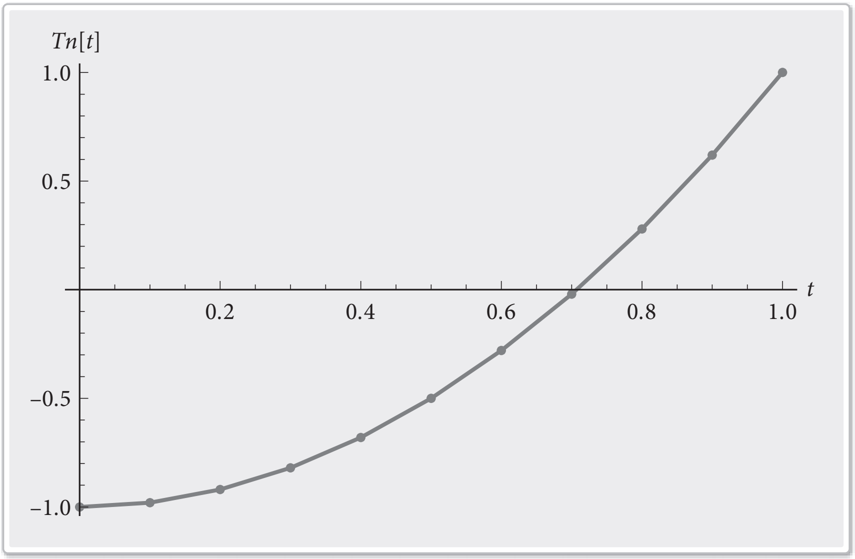


Εικόνα 19: Το άθροισμα των συναρτήσεων

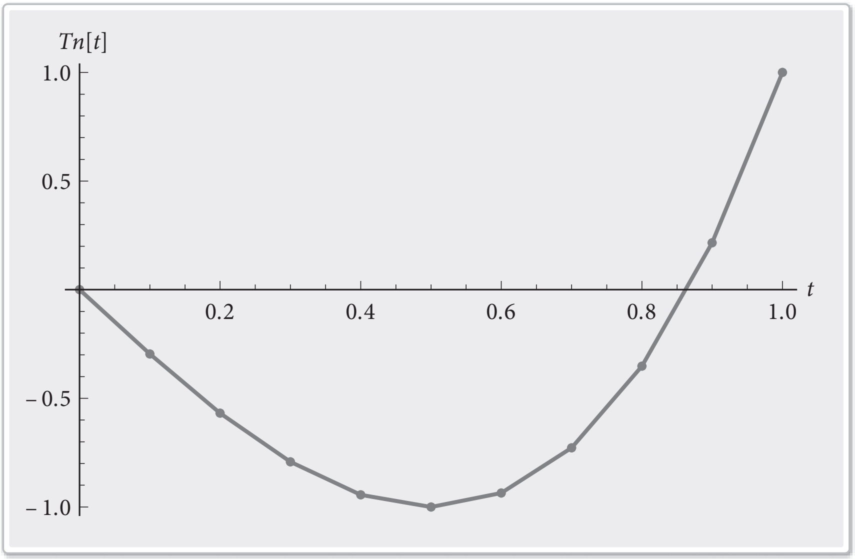
Παράδειγμα Πέμπτο: Τα μη κανονικοποιημένα πολυώνυμα Chebyshev

Αφού είναι … πολυώνυμα ποιος είναι άραγε ο λόγος να τα ξεχωρίσουμε (και να τα σχεδιάσουμε) ανάμεσα από τόσες θεμελιώδεις ειδικές συναρτήσεις (π.χ. όπως είναι μία Gaussian). Η απάντηση είναι ότι ήδη χρησιμοποιούνται στα **αναλογικά φίλτρα** αλλά επίσης και επειδή είναι «μασκαρεμένος» ο πολυωνυμικός τους χαρακτήρας. Ένας ακόμα λόγος θα μπορούσε να είναι ότι ίσως ακόμα να εκκρεμεί για σας μια παλαιά μας άσκηση πάνω σε αυτά που όμως την αποφύγατε (ποια;).

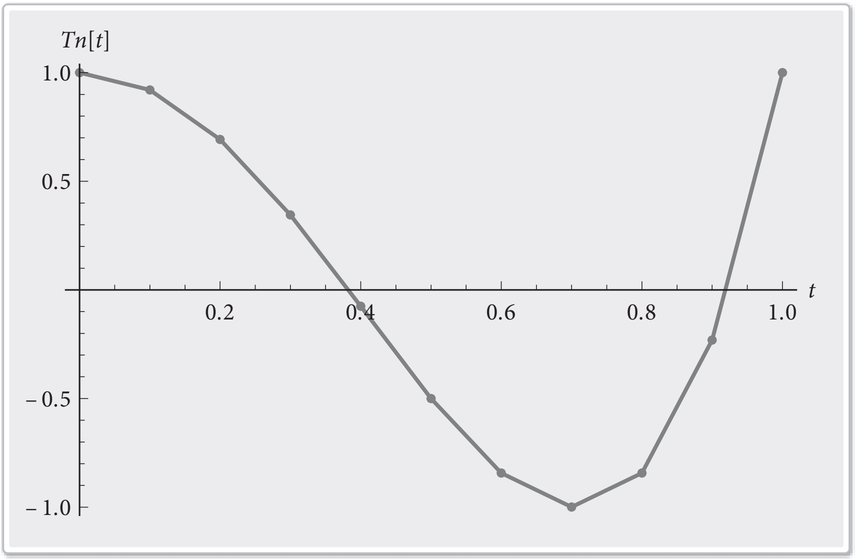
Θέτοντας t στην θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής στα αντίστοιχα $T_n(x)$, στην μορφή που σας δώσαμε στο Παράδ. 2 της §1.6, $T_n(t) = \cos(n\arccos t)$, θα σχεδιάσουμε τα πολυώνυμα για $n = 2$, 3 και 4 στο διάστημα $0 \le t \le 1$, με $\Delta t = 0.1$. Εσείς καλείστε να βρείτε το $T_5(t)$ με βήμα $\Delta t = 0.05$.



Εικόνα 20: $n = 2$



Εικόνα 21: $n = 3$



Εικόνα 22: $n = 4$

Επίλογος για το CD των Ασκήσεων

Σκόπιμα έχουμε παραλείψει είτε πολύ δύσκολα παράθυρα, είτε υπολογισμούς αλλά ακόμα και προχωρημένες μαθηματικές έννοιες τις οποίες από απόψεως βιβλιογραφίας μπορείτε να δείτε στα [6] και [7] της Γενικής Βιβλιογραφίας και online στα [2] και [4] του κεφαλαίου 3.

Οι Ασκήσεις που θα συνόδευαν τα παραρτήματα Α και Β, έχουν ενσωματωθεί υπό μορφή παραδειγμάτων εντός της θεωρίας τους. Αλλά και εκεί, έχουμε «παραλείψει» λεπτομέρειες και πράξεις που καλείστε να αντιμετωπίσετε ως γνήσιες ασκήσεις!