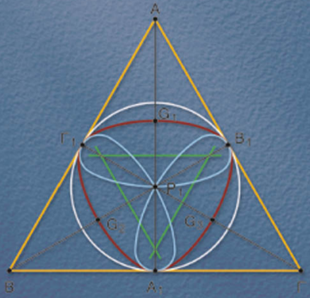
Γεωργίου Λ. Καπέτη

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ του ΤΡΙΓΩΝΟΥ



Β ΤΟΜΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι ρίζες της Γεωμετρίας ξεκινούν από την Αίγυπτο και την Μεσοποταμία. Στην Ελλάδα δημιουργήθηκε η Ελληνική Επιστήμη της Γεωμετρίας (Θαλής - Πυθαγόρας). Τα «Στοιχεία», έργο του Ευκλείδη κατά την Αλεξανδρινή εποχή αποτελούμενα από δεκατρία (13) βιβλία, υπήρξαν πρότυπο μαθηματικής κομψότητας και αυστηρότητας.

Στην Δύση εμφανίσθηκε η Γεωμετρία κατά τον 12ο αιώνα από Άραβες και Ισπανούς - Εβραίους μετανάστες. Κατά τον 16ο αιώνα παρουσιάζονται τα πρώτα προβλήματα κατασκευών με κανόνα και διαβήτη.

Κατά το τέλος του περασμένου αιώνα εμφανίσθηκε η Γεωμετρία του Τριγώνου. Ιδρυταί της θεωρούνται οι BROCARD, LEMOINE, NEUBERG και κυρίως ο πρώτος.

Ήδη το 1889 ο ÉMILE VIGARIÉ σε μια ιστορική ανασκόπηση των μαθηματικών χρησιμοποίησε την έκφραση «η Γεωμετρία του τριγώνου είναι η πιο αξιόλογη πρόοδος που πραγματοποίησαν τα στοιχειώδη μαθηματικά τα τελευταία χρόνια».

Πάντοτε μελετήθηκαν αξιόλογα σημεία και ευθείες στο επίπεδο του τριγώνου, όμως από το 1873 κυρίως και μετά η μελέτη του τριγώνου απετέλεσε το αντικείμενο πολυαρίθμων και αποδοτικών ερευνών. Το σύνολο των αποτελεσμάτων που επετεύχθηκαν και συναρμόσθηκαν μεταξύ τους πήρε το όνομα Γεωμετρία του Τριγώνου ή Πρόσφατη Γεωμετρία (Géometrie du Triangle ή Géometrie recente).

Η **Γαλλική ένωση δια την πρόοδο των επιστημών** (L' Association Française pour l' avancement des sciences) έδωσε την ευκαιρία δια τις πρώτες εργασίες εκείνης της περιόδου και σχετικά επιστημονικά περιοδικά παρουσίασαν κατά καιρούς επιτεύγματα από διακεκριμένα μέλη τους.

1ο «Τα Νέα Μαθηματικά Χρονικά» (Les Neouvelles Annales Mathématiques) παρουσίασαν τα άρθρα των LEMOINE και BROCARD (1873 και 1875), τα αναφερόμενα στα σημεία και τους κύκλους που φέρουν σήμερα τ' ονομά τους, καθώς συνέβη και παλαιότερα μ' εκείνα του MATHIEU (1866), που φαίνεται ήταν ελάχιστα γνωστά εκείνα την εποχή, παρά την σπουδαιότητα της ισογωνίου αντιστροφής (inversion isogonale). Αργότερα (1883) έκανε γνωστές τις μελέτες του ο D'OCAGNE επί της συμμετροδιαμέσου (symédiane).

2ο «Το περιοδικό των στοιχειωδών και ειδικών μαθηματικών» (Le journal des mathématiques élémentaires et spéciales) των BOURGET και G. DE LONGCHAMPS υπήρξε το κύριο όργανο στη Γαλλία, της «Γεωμετρίας του Τριγώνου». Πρέπει να λεχθεί ότι και οι ερευνητές και το κοινό οφείλουν πολλά σ' αυτήν την αξιόλογη επιστημονική έκδοση.

3ο Στο Βέλγιο η «Μάθησις» (Mathésis) των MANSION και NEUBERG, συνέχισε από το 1881 την «Νέα Αλληλογραφία» (Nouvelle Correspondance) του CATALAN. Δια να γίνει κατανοητό το τι αποτελεί το βελγικό αυτό περιοδικό δια την πρόσφατη Γεωμετρία (Géométrie récente) αρκεί να λεχθεί ότι όταν θέλουν να μνημονεύσουν τους κύριους συγγραφείς της Γεωμετρίας του Τριγώνου αναφέρονται παγκοσμίως στους BROCARD, LEMOINE και NEUBERG.

Διάφορες αγγλικές και γερμανικές εκδόσεις, από την πλευρά τους κάνουν γνωστές μελέτες σχετιζόμενες με τον νέο κλάδο της Γεωμετρίας.

Με ενδιαφέρον διαβάζει κανείς την **«ιστορική μελέτη της πορείας της αναπτύξεως της Γεωμετρίας του Τριγώνου»**, του VIGARIÉ, 1889 (συμπλήρωμα στο Mathesis, 1890) και τα άρθρα του ιδίου για το ίδιο θέμα που δημοσιεύονται κάθε χρόνο από τότε στο **Περιοδικό των Μαθηματικών** (Journal de Mathématiques) του DE LONGCHAMPS.

Εκτός από τις περιοδικές αυτές εκδόσεις σπουδαία έργα είναι και τα εξής:

4ο Géométrie récente du triangle, του NEUBERG, εβδομήνα σελίδων στο 3ο κεφάλαιο του 1ου μέρους του Traité de Géométrie των ROUCHÉ και DE COMBEROUSSE, 6η έκδοση 1891.

5ο Μνημόνια επί του «**τετραέδρου**» 1884, περί των προβολών και αντιπροβολών ενός σταθερού τριγώνου και **επί του συστήματος τριών ευθέως ομοίων σχημάτων** από τον NEUBERG (Βρυξέλλες 1890).

6ο Ευθύγραμμη Τριγωνομετρία και Γεωμετρία του Τριγώνου του LALBALETTRIER (Παρίσι 1889).

7ο Στις περιοδικές εκδόσεις που αναφέρθηκαν καθώς και σε πολλές άλλες που αναφέρονται στο τέλος του βιβλίου (Βλ. Συντομογραφίες) τα άρθρα δια την Γεωμετρία του Τριγώνου συνεχίζονται ως τα μέσα του παρόντος αιώνος (GOORMATIGH, THEBAULD, DEAUX, LEEMANS και άλλοι). Μετά παρατηρείται κάποια στασιμότητα.

Σκοπός του γράφοντος είναι αφ' ενός να παρουσιάσει μία κατά το δυνατόν συγκροτημένη εικόνα της Γεωμετρίας του Τριγώνου με βάση αυτά που έχει υπ' όψη του, απ' όσα μέχρι τώρα εγράφησαν, προσθέτοντας και δικά του στοιχεία, αφ' ετέρου χρησιμοποιώντας τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων και με νέες προτάσεις (ή στοιχεία) να συντελέσει στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού της Γεωμετρίας που έφθασε ως τα μέσα σχεδόν του 20ου αιώνα.

Αυτό φαίνεται ήδη στον Α′ Τόμο, από την προσπάθεια να διατυπωθούν εκφράσεις διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών και αναλλοίωτων κωνικών από συστήματα συντεταγμένων της Αναλυτικής Γεωμετρίας σε συστήματα συντεταγμένων της Γεωμετρίας του Τριγώνου.

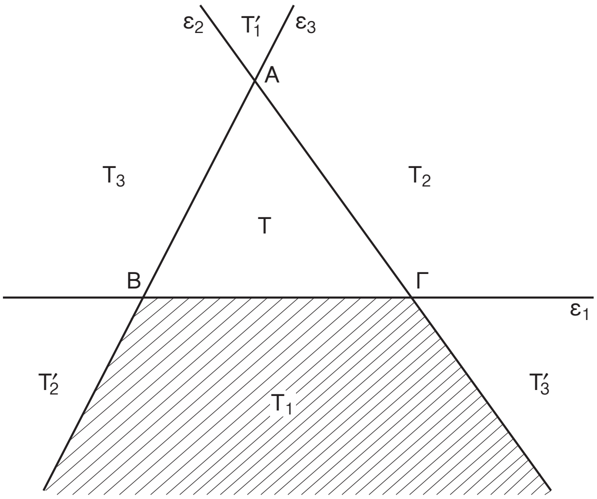
Ο ανά χείρας δεύτερος τόμος της Γεωμετρίας του Τριγώνου περιέχει τον «Συνεχή μετασχηματισμό του Lemoine», εφαρμογή αυτού στους τύπους της Τριγωνομετρίας, στις τριγωνικές συντεταγμένες, στις εξισώσεις ευθειών, κωνικών κλπ., στις αποστάσεις, στα εμβαδά και στα θεωρήματα και προβλήματα και τις 32 λύσεις του προβλήματος του Malfatti. Περιέχει επίσης κύκλους συνδεδεμένους με το τρίγωνο καθώς και την γενική εφαρμογή του συσχετισμού στην μελέτη των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κωνικών στο τρίγωνο.

Μάιος 2002 *Ο συγγραφέας*

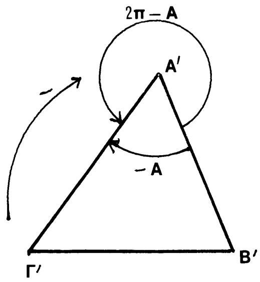
6 ΜΕΡΙΚΗ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ LEMOINE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

6.1. Τρεις πραγματικές ευθείες $ε_1, ε_2, ε_3$ χωρίζουν το επίπεδο σε επτά μέρη. Έκαστο των Τ, $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$ λέγεται τρίγωνο. Το μέρος Τ του επιπέδου είναι το γνωστό συνηθισμένο τρίγωνο δια το οποίο ισχύουν οι τύποι:

$$Α+Β+Γ = π, \quad \frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ} = 2R, \quad Ε = \frac{1}{2}βγημΑ, \quad αβγ = 4ΕR, \quad ϱ = \frac{Ε}{τ}, \quad ϱ_α = \frac{Ε}{τ-α} \text{ κ.λπ.}$$



Σχ. 126α



Σχ. 126β

Θεωρούμε ένα σημείο κινούμενο επί της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ με αρχή το σημείο Α και τέλος πάλι το Α. Αν η φορά της κίνησής του επί της κλειστής γραμμής ΑΒΓ είναι αριστερόστροφη τότε τα στοιχεία α, β, γ, Α, Β, Γ του Τ θεωρούνται θετικά. Εάν η φορά είναι δεξιόστροφη, όπως π.χ. στο Α′Β′Γ′ (Σχ. 126β), που προκύπτει ως συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς μία ευθεία, μολονότι τα μεγέθη α′, β′, γ′, Α′, Β′, Γ′ είναι αντιστοίχως ίσα μεν προς τα α, β, γ, Α, Β, Γ θεωρούνται όμως αντίθετα αυτών. Δηλαδή είναι α′=–α, β′=–β, γ′=–γ, Α′=–Α, Β′=–Β, Γ′=–Γ. Κατά συνέπεια το $Ε' = \frac{1}{2}β'γ'ημΑ' = -\frac{1}{2}βγημΑ = -Ε$, $2R' = \frac{α'}{ημΑ'} = 2R$ και το $s' = \sum a' =$
$= \sum σφ(-Α) = -\sum σφΑ = -\sum a = -s$, $Α'+Β'+Γ' = -π$ κ.λπ.

Στον τελευταίο τύπο εάν ως γωνία $\hat{Α}'$ του Α′Β′Γ′ θεωρηθεί όχι η αρνητική δεξιόστροφη γωνία, $\widehat{Β'Α'Γ'}$ αλλά η αριστερόστροφη θετική γωνία, $\widehat{Β'Α'Γ'}$, τότε θα πρέπει να τεθεί Α′=2π–Α, … και θα είναι Α′ +Β′+Γ′ = 5π, μη δεκτό, διότι δεχόμαστε το Α+Β+Γ = π ή –π. Εάν θεωρηθεί ο τύπος $\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$, στο $A'B'\Gamma'$ δίνει

$$\eta\mu\frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{(\tau'-\beta')(\tau'-\gamma')}{\beta'\gamma'}} \quad \text{ή} \quad -\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}.$$

Η διαφορά στο πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι το $\eta\mu\frac{A}{2}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\eta\mu^2\frac{A}{2} = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

(υποτίθεται ότι $0<A<\pi$, το οποίο δεν ισχύει δια την γωνία A' αφού $-\pi<A'<0$). Θα πρέπει κατά την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας, όπως πάντα, να τεθεί το διπλό πρόσημο προ του ριζικού, εφόσον έχουμε το ενδεχόμενο της ύπαρξης τριγώνων με αρνητικές γωνίες. Αυτό ισχύει, όταν εμφανίζεται γενικά η τετραγωνική ρίζα. Π.χ. το εμβαδόν του $A'B'\Gamma'$ ευρίσκεται

$$6E'^2 = 2\sum \alpha'^2\beta'^2 - \sum \alpha'^4 = 16E^2.$$

Άρα $E'=\pm E$, όπως δε είδαμε σ' αυτήν την περίπτωση εκλέγεται το αρνητικό πρόσημο.

Δι' όλες τις περιπτώσεις των τριγώνων που έχουν γωνίες ή πλευρές όλες θετικές ή όλες αρνητικές ή άλλες θετικές και άλλες αρνητικές δεχόμαστε ότι ισχύουν οι βασικοί τύποι.

$$A+B+\Gamma = \pm\pi, \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R, \quad E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A. \qquad (6.1.1)$$

6.2. Στα σχήματα 126α, 127 θεωρούμε το τμήμα T_1 του επιπέδου ως τρίγωνο με κορυφές Α, Β, Γ, γωνίες $B'=\pi-B$, $\Gamma'=\pi-\Gamma$, οπότε επειδή πρέπει $A'+B'+\Gamma'=\pm\pi$, προκύπτει $A'=-A$ ή $A'=-A-2\pi$ (μη δεκτή). Επομένως έχουμε

$$\mathbf{A'=-A,\quad B'=\pi-B,\quad \Gamma\Delta=\pi-\Gamma} \ \textbf{και}$$

$$\mathbf{A'+B'+\Gamma'=\pi} \qquad (6.2.1)$$

οι (6.1.1) δίνουν:

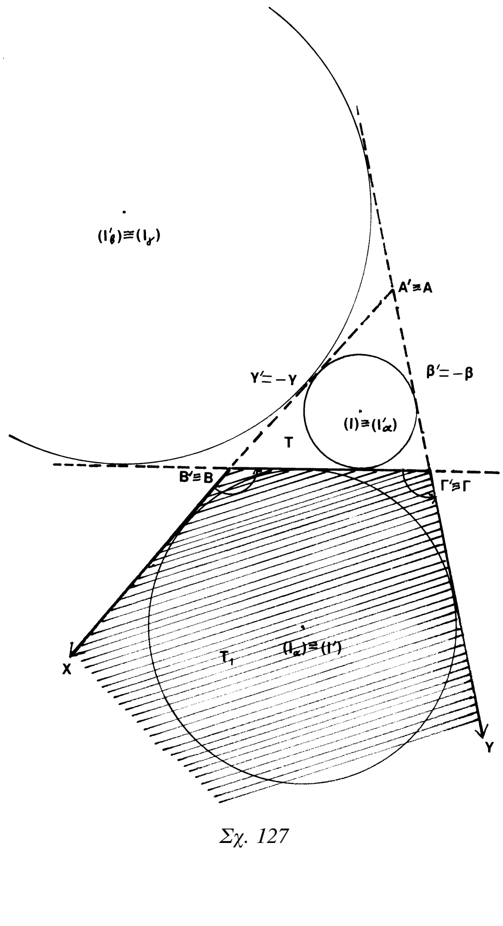
$$\frac{\alpha'}{\eta\mu(-A)} = \frac{\beta'}{\eta\mu(\pi-B)} = \frac{\gamma'}{\eta\mu(\pi-\Gamma)} = 2R',$$

$$E' = \frac{1}{2}\beta'\gamma'\eta\mu A'$$

Εάν εκλεγεί το $\alpha'=\alpha$, ως κοινή πλευρά των T, T_1 προκύπτει $\beta'=-\beta$, $\gamma'=-\gamma$, $R'=-R$, $E'=-E$. Ομοίως τα τ', $\tau-\alpha'$, $\tau'-\beta'$, $\tau'-\gamma'$ γίνονται $-(\tau-\alpha)$, $-\tau$, $\tau-\gamma$, $\tau-\beta$. Τα:

$$\varrho' = \frac{E'}{\tau'} = \frac{-E}{-(\tau-\alpha)} = \varrho_\alpha, \quad \varrho'_\alpha = \frac{E'}{\tau-\alpha} = \frac{-E}{-\tau} = \varrho,$$

$$\varrho'_\beta = \frac{-E}{\tau-\gamma} = -\varrho_\gamma, \qquad \varrho'_\gamma = \frac{E'}{\tau'-\gamma'} = \frac{-E}{\tau-\beta} = -\varrho_\beta.$$



Σχ. 127

Θα μπορούσε κανείς να σκεφθεί συνθετικώς εξής:

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω μία αλγεβρική σχέση:

$$f(A, B, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0 \qquad (6.2.2)$$

ρητή ως προς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών A, B, Γ και πολλαπλασίων ή υποπολλαπλασίων αυτών καθώς και άλλων γωνιακών ή γραμμικών στοιχείων ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Η σχέση παραμένει ισχύουσα, αν αντικατασταθούν:

α) οι γωνίες A, B, Γ με άλλες A′, B′, Γ′, ακόμη και αρνητικές, των οποίων το άθροισμα παραμένει ίσον προς π.

β) τα α, β, γ με ποσότητες α′, β′, γ′ ανάλογες με τα ημίτονα των νέων γωνιών και

γ) τα γωνιακά ή γραμμικά στοιχεία από τα x'_1, x'_2, ..., x'_ν που προκύπτουν από τα A′, B′, Γ′, α′, β′, γ′ όπως τα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ προκύπτουν από τα A, B, Γ, α, β, γ. Δηλαδή ισχύει η

$$f' = f(A', B', \Gamma', \alpha', \beta', \gamma', x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu) = 0 \qquad (6.2.2')$$

Η ανωτέρω διατύπωση αποτελεί θεμελιώδες θεώρημα η δε νέα σχέση f′=0 λέγεται συναφής προς την πρώτη f=0.

Απόδειξη:

Η σχέση f ως προς τα γραμμικά στοιχεία είναι ομογενής. Μπορούμε επομένως όλα τα γραμμικά στοιχεία να τα αντικαταστήσουμε με τα α, β, γ και αυτά στη συνέχεια με τα ημίτονα, π.χ. $\alpha = 2R\cdot\eta\mu A$, … . Το R, λόγω της ομογενείας, βγαίνει κοινός παράγοντας εκτός της f και αν αντικατασταθούν οι εφαπτομένες και συνεφαπτόμενες με τα ημίτονα και συνημίτονα η σχέση μετασχηματίζεται στην

$$\varphi(A, B, \Gamma) = 0 \qquad (6.2.3)$$

όπου υπάρχουν μόνο μόνο ημίτονα και συνημίτονα των A, B, Γ και των πολλαπλασίων ή υποπολλαπλασίων αυτών. Εάν τεθεί $A = \pi - B - \Gamma$ η (6.2.3) γίνεται

$$\varphi(\pi - B - \Gamma, B, \Gamma) = 0 \qquad (6.2.4)$$

η οποία επαληθεύεται δια κάθε ζεύγος τιμών (B, Γ), με τιμές θετικές και $B+\Gamma < \pi$. Εάν τεθεί

$$\sigma\upsilon\nu mB + i\eta\mu mB = (\sigma\upsilon\nu B + i\eta\mu B)^m = \mu^m \quad (\mu = e^{Bi})$$

$$\sigma\upsilon\nu mB - i\eta\mu mB = (\sigma\upsilon\nu B + i\eta\mu B)^{-m} = \mu^{-m}$$

θα είναι $2i\eta\mu mB = \mu^m - \mu^{-m}$, $2\sigma\upsilon\nu B = \mu^m - \mu^{-m}$.
Αναλόγως και $2i\eta\mu m\Gamma = \nu^m - \nu^{-m}$, $2\sigma\upsilon\nu m\Gamma = \nu^m + \nu^{-m}$ $(\nu = e^{\Gamma i})$.

Με τις ως άνω αντικαταστάσεις η (6.2.4) καταλήγει σε πολυώνυμο ως προς μ, ν ορισμένου αριθμού όρων, στο οποίο οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ή αρνητικοί, ακέραιοι, κλασματικοί ή και ασύμμετροι. Επειδή, εξ υποθέσεως, αυτό το πολυώνυμο μηδενίζεται δια μία διπλή απειρία τιμών των μεταβλητών, περιεχομένων μεταξύ κάποιων ορίων, έπεται ότι θα μηδενίζεται δια κάθε τιμή του ζεύγους (μ, ν) αδιακρίτως και άρα θα είναι εκ ταυτότητος μηδέν (δηλαδή οι συντελεστές των όρων είναι ίσοι με μηδέν). Αφού η (6.2.4) αληθεύει χωρίς περιορισμό, έπεται ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με την (6.2.3), άρα και με την (6.2.′3), άρα και με την (6.2.2′). Έτσι προκύπτει η ισχύς της (6.2.2).

Παρατηρήσεις:

1η Υπετέθει ότι $A'+B'+\Gamma' = \pi$. Αν αυτό δεν ισχύει π.χ. είναι $A'+B'+\Gamma' = -\pi$ το θεμελιώδες θέωρημα παύει να ισχύει. Το βλέπουμε στο παράδειγμα $\Sigma\eta\mu A = 4\Pi\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$. Δια $A'=-A$, $B'=-B$, $\Gamma'=-\Gamma$ η

$$\Sigma\eta\mu A' = 4\Pi\sigma\upsilon\nu\frac{A'}{2} \Rightarrow \Sigma\eta\mu(-A) = 4\Pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-A}{2}\right) \Rightarrow -\Sigma\eta\mu A = 4\Pi\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \text{ που δεν ισχύει.}$$

2η Υπετέθει ότι η σχέση $f(A, B,\Gamma) = 0$, υπόκειται μόνο στον περιορισμό $A+B+\Gamma = \pi$. Εάν υπέκειτο και σε δεύτερο περιορισμό, π.χ. $B+\Gamma = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή το ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Α, θα έπρεπε επίσης να υποτεθεί ότι και $B'+\Gamma' = \frac{\pi}{2}$. Αν π.χ. τεθεί $A'=-A$, $B' = \pi-B$, $\Gamma' = \pi-\Gamma$, ενώ ισχύει η $\beta = \gamma\varepsilon\varphi B$, δεν ισχύει η $\beta' = \gamma'\varepsilon\varphi B'$ και τούτο διότι γίνεται $-\beta = -\gamma\varepsilon\varphi(\pi-B)$, που έχει αντίθετο πρόσημο της $\beta = \gamma\varepsilon\varphi B$. Αν όμως εκλεγεί $A'=A$, $B'=B+\pi$, $\Gamma'=\Gamma-\pi$, επειδή $B'+\Gamma' = B+\Gamma = \frac{\pi}{2}$, η $\beta'=\gamma'\varepsilon\varphi B'$ ισχύει. Αν εκλεγεί $A'=-A$, $B'=\pi-B$, $\Gamma'=\pi-\Gamma$ και $B+\Gamma = \frac{\pi}{2}$ θα είναι $B'+\Gamma' = \frac{3\pi}{2}$ και άρα στην περίπτωση αυτή η $\beta'=\gamma'\varepsilon\varphi B'$ δεν ισχύει.

Εάν ισχύει μεταξύ των Α, Β, Γ εκτός της $A+B+\Gamma = \pi$ και δεύτερη σχέση, π.χ. η $B+\Gamma = \frac{\pi}{2}$, τότε η (6.2.4) οδηγείται, με απαλοιφή του $\Gamma = \frac{\pi}{2}-B$, σε μία άλλη που περιέχει μόνο το Β. Αποδεικνύεται πάλι ότι ισχύει δια κάθε τιμή του Β (απειρία τιμών), πράγμα που οδηγεί στη νέα διατύπωση, ότι τα A', B', Γ' πρέπει να μπορούν να επαληθεύουν και την $B'+\Gamma' = \frac{\pi}{2}$, ή άλλη σχέση αναλόγως (π.χ. $B'=\Gamma'$ ή $B'=2\Gamma'$ κ.τ.λ.)

3η Χρησιμοποιώντας απλούς συντελεεστές είναι εύκολο να βρούμε οσουσδήποτε μετασχηματισμούς ώστε να είναι $A'+B'+\Gamma' = \pi$. Αναφέρουμε τους εξής:

$$\left.\begin{array}{lll}
1o. & -A,\ \pi-B,\ \pi-\Gamma & \text{(εις τριπλούν)}\\
2o. & \pi-A,\ \frac{\pi-B}{2},\ \frac{\pi-\Gamma}{2} & \text{(εις τριπλούν)}\\
3o. & \frac{2\pi}{3}-A,\ \frac{2\pi}{3}-B,\ \frac{2\pi}{3}-\Gamma & \text{(εις απλούν)}\\
4o. & A,\ B+m,\ \Gamma-m & \text{(εις εξαπλούν)}\\
5o. & A+m,\ B-\frac{m}{2},\ \Gamma-\frac{m}{2} & \text{(εις τριπλούν)}\\
6o. & \frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\ \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\ \frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2} & \text{(εις απλούν)}\\
7o. & \frac{A}{2}-\frac{\pi}{2},\ \frac{B}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\Gamma}{2}+\frac{\pi}{2} & \text{(εις τριπλούν)}\\
8o. & nA+(1-n)\pi,\ nB,\ n\Gamma & \text{(εις τριπλούν, } n\neq 0)\\
9o. & \pi-2A(=-A+B+\Gamma),\ \pi-2B(\eta A-B+\Gamma),\ \pi-2\Gamma(\eta' A+B-\Gamma) & \text{(εις απλούν)}\\
10o & m(B-\Gamma)+\pi,\ m(\Gamma-A),\ m(A-B) & \text{(εις τριπλούν)}\\
11o. & m(B-\Gamma),\ m(\Gamma-A)+\frac{\pi}{2},\ m(A-B)+\frac{\pi}{2} & \text{(εις τριπλούν)}
\end{array}\right\} \qquad (6.2.5)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί εφαρμόζονται άμεσα σε οποιαδήποτε τριγωνομετρική σχέση μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου π.χ. δια τον 1ο μετασχηματισμό

Η $\Sigma\eta\mu A = 4\Pi\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ έχει συναφή στο Α την $-\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ και άλλες δύο στα Β και Γ.

Η $\Sigma\sigma\upsilon\nu A = 1+4\Pi\eta\mu\frac{A}{2}$ έχει συναφή στο Α την $\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1-4\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ και άλλες δύο.

Ο 2ος εφαρμοζόμενος στο Α και στην $\Sigma\eta\mu^2 A = 2+2\Pi\sigma\upsilon\nu A$ έχει συναφή την

$$\eta\mu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2} = 2-2\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

και άλλες δύο. Δηλαδή όλοι οι μετασχηματισμοί μπορεί να εφαρμοσθούν στις παραπάνω σχέσεις. Όταν ένας μεσχηματισμός είναι συμμετρικός (π.χ. ο 3ος, 6ος, 9ος κ.λπ.) ως προς Α, Β, Γ έχουμε ένα αποτέλε-

σμα. Όταν είναι ημισυμμετρικός, δηλαδή δύο από τα A', B', Γ' εκφράζονται συμμετρικά με τα Α, Β, Γ (όπως οι 1ος, 2ος κ.λπ.) έχουμε τρία διαφορετικά αποτελέσματα. Όταν βρεθεί το ένα, τα άλλα δύο προκύπτουν με εναλλαγή δύο εκ των Α, Β, Γ.
Αν τέλος ένας μετασχηματισμός είναι αντισυμμετρικός, π.χ. ο 4ος έχουμε έξι διαφορετικα αποτελέματα.
Ο πίνακας (6,.2.5) περιέχει λοιπόν μια τριακοντάδα μετασχηματισμών. Δηλαδή ξεκινώντας από μία οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου, π.χ. των $\sum σφΒ\, σφΓ = 1$ μας δίνει τριάντα άλλες σχέσεις.

6.3. Ο (λεγόμενος) συνεχής μετασχηματισμός του Μ.Ε. Lemoine είναι ο 1ος εκ των (6.2.5). Αν και παρουσιάζει μεγάλη παραγωγικότητα στην εφαρμογή του (την οποία θα αναφέρουμε σ' αυτό το κεφάλαιο), είναι ειδική περίπτωση του εξής γενικότερου μετασχηματισμού.

Έστω ότι οι β.σ. του σημείου $P[l, m, n]$, εκφράζονται ως συναρτήσεις των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ δηλαδή είναι:

$$P:\ l = f_1(A, B, \Gamma),\quad m = f_2(A, B, \Gamma),\quad n = f_3(A, B, \Gamma) \tag{6.3.1}$$

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό των A', B', Γ' από τους (6.2.5) ή έναν άλλο, στον οποίο, όπως πάντα, ισχύει η $A'+B'+\Gamma' = \pi$. Εάν στις (6.3.1) γίνουν οι αντικαταστάσεις A/A', B/B', Γ/Γ' προκύπει το σημείο $P_\beta[l', m', n']$ του οποίου οι β.σ. είναι οι

$$P_\beta:\ l' = f_1(A', B', \Gamma'),\quad m' = f_2(A', B', \Gamma'),\quad n' = f_3(A', B', \Gamma') \tag{6.3.2}$$

Το σημείο P_β ονομάζεται **συναφές βαρυκεντρικό του Ρ,** δια του μετασχηματισμού $F: A/A'$, B/B', Γ/Γ' όταν ο F είναι συμμετρικός (όπως το 3ο στις 6.2.5). Εάν ο F είναι ημισυμμετρικός (όπως στο 1ο, 2ο κ.λπ. των 6.2.5) τότε το P_β ονομάζεται **συναφές βαρυκεντρικό των Ρ στο Α**. Εάν τέλος ο F είναι αντισυμμετρικός (Βλ. 4ο), τότε ονομάζεται **συναφές βαρυκεντρικό του Ρ στη διάταξη (Α, Β, Γ).** Ανάλογα ισχύουν και δια τις καθετικές (ή τριγραμμικές) συντεταγμένες του $P[x, y, z]$. Δηλαδή αν είναι

$$x = F_1(A, B, \Gamma),\quad y = F_2(A, B, \Gamma),\quad z = F_3(A, B, \Gamma) \tag{6.3.3}$$

και εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός $F: A'/A, \ldots$ στις γωνίες, προκύπτει το σημείο $P_\kappa[x', y', z']$ (ή P_τ)

$$P_\kappa\,(\text{ή } P_\tau):\ x'' = F_1(A', B', \Gamma'),\quad y'' = F_2(A', B', \Gamma'),\quad z'' = F_3(A', B', \Gamma'),$$

το οποίο ονομάζεται **συναφές καθετικό ή (τριγραμμικό) του Ρ.** Προστίθεται αν χρειασθεί όπως και προηγουμένως, ο χαρακτηρισμός: στο Α ή στη διάταξη (Α, Β, Γ).

6.4. Δοθείσης μιας καμπύλης $C \equiv f(l, m, n) = 0$, ονομάζουμε **συναφή βαρυκεντρική, καμπύλη** την $C_\beta \equiv f'(l', m, n') = 0$, η οποία προκύπτει από την f, κάνοντας τον μετασχηματισμό $F: A/A' \ldots$ επί των συντελεστών και αντικαθιστώντας τα l, m, n με τα l', m', n'.

Αναλόγως ορίζεται η συναφής καθετική (ή τριγραμμική) καμπύλη C_κ (ή C_τ) της C.

Εκ των ανωτέρω προκύπτει ότι:

1ο «Κάθε καμπύλη και η συναφής αυτής C_β ή C_κ (ή C_τ) είναι του ιδίου βαθμού».

2ο Αν ένα σημείο Ρ γράφει μία καμπύλη C, το βαρυκεντρικό συναφές P_β γράφει την συναφή βαρυκεντρική C_β, και το συναφές P_κ (ή P_τ) γράφει την συναφή C_κ (ή C_τ) της καμπύλης C. Διότι αν η εξίσωση $f(l, m, n) = 0$ επαληθεύεται από τις (6.2.6), η $f(l', m', n') = 0$ θα επαληθεύεται από τις (6.2.7), λόγω του θεμελιώδους θεωρήματος εφόσον πρόκειται δια μία σχέση μεταξύ των στοιχείων παντός τριγώνου.

3ο Η **ομογραφία** διατηρείται, εφόσον οι τύποι του μετασχηματισμού μετασχηματίζουν μία ευθεία στην συναφή ευθεία αυτής (βαρυκεντρικής, καθετικής ή τριγραμμικής). Έχουμε λοιπόν τα

Πορίσματα:

1ο. «Εάν τρία σημεία είναι ομοευθευθειακά, τότε και τα συναφή τους είναι επίσης ομοευθειακά». «Εάν πέντε σημεία είναι ομοκωνικά, τότε και τα συναφή τους είναι ομοκωνικά».

Φαίνεται αμέσως η παραγωγικότητα αυτού του μετασχηματισμού. Αν μας δοθεί μια τριάδα ομοευθειακών σημείων, μπορούμε να βρούμε, χωρίς υπολογισμό ή απόδειξη, βάσει των (6.2.5) μία τριακοντάδα συναφών βαρυκεντρικών τριάδων και άλλη μία τριακοντάδα τριγραμμικών. Π.χ. Αν θεωρήσουμε τα ομοευθειακά σημεία M[1, 1, 1], G[a_1], P[συνA], εφαρμόζοντας τον 9ο μετασχηματισμό των (6.9.5) προκύπτει η τριάδα M, $\check{H}$[a], P′[συν2A]. Στις ευθείες των δύο αυτών τριάδων κείνται και τα σημεία D_0[b_1+c_1], L[b+c] αντιστοίχως.

2ο. «Η τομή δύο καμπύλων έχει συναφές (βαρυκεντρικώς, καθετικώς ή τριγραμμικώς) την τομή των συναφών καμπύλων (βαρυκεντρικώς, καθετικώς ή τριγραμμικώς αντιστοίχως).

3ο. «Αν τρεις ευθείες συγκλίνουν, τότε και οι συναφείς αυτών συγκλίνουν (βαρ., καθ. ή τριγρ.)».

4ο. «Δύο ομολογικά σχήματα, μετασχηματίζονται επίσης εις σχήματα ομολογικά (βαρ., καθ. ή τριγρ.)».

4ο. «Οι εφαπτόμενες καμπύλες (θεωρούμενες ως όρια τεμνουσών) μετασχηματίζονται σε εφαπτόμενες της συναφούς καμπύλης (βαρ., καθ. ή τριγρ.) στα συναφή σημεία». Επομένως:
«η πολική ενός σημείου ως προς μία κωνική μετασχηματίζεται σε πολική του συναφούς σημείου ως προς την συναφή κωνική (βαρ., καθ. ή τριγρ.)». Συνεπώς
«Οι συναφείς ευθείες έχουν περιβάλλουσες συναφείς καμπύλες».

6.5. «Ειδικά στις βαρυκεντρικές συναφείς η επ' άπειρο ευθεία $e \equiv l+m+n = 0$ μετασχηματίζεται στον εαυτό της». Επομένως σ' αυτόν τον μετασχηματισμό, **«ευθείες παράλληλες μετασχηματίζονται σε ευθείες παράλληλες, ως συγκλίνουσες με την επ' άπειρο ευθεία e». «Κάθε παραβολή , ως επαπτομένη της e, μετασχηματίζεται σε παραβολή». «Κάθε υπερβολή, ως έχουσα δύο κοινά σημεία με την e, μετασχηματίζεται σε υπερβολή.** Επομένως: **«κατά τον μετασχηματισμό αυτόν διατηρείται το γένος της κωνικής». «Δύο σχήματα ομοιόθετα μετασχηματίζονται σε δύο σχήματα επίσης ομοιόθετα».**

«Δια τις συναφείς καθετικές ο αντιορθικός άξονας, x+y+z = 0, μετασχηματίζεται στον εαυτό του».

«Στις βαρυκεντρικές συναφείς: αν δύο σημεία είναι συμπληρωματικά ή αντισυμπληρωματικά το ίδιο αντίστοιχα είναι και τα μετασχηματισμένα τους. Το ανάλογο ισχύει δια σημεία αντίστροφα, ισοβαρικά ημιαντίστροφα (semi-reciproques), δυναμικά καθώς και δια τα επ' άπειρο σημεία που αντιστοιχούν σε μία ευθεία ή ένα σημείο. (§5.4.9 και §5.4.10).

«Στις καθετικές συναφείς η ιδιότητα αυτή εφαρμόζεται: στα ισογώνια σημεία, στα παραπληρωματικά και αντιπαραπληρωματικά (εννοείται ως προς το I[α]), τα οποία προσδιορίζονται από μία σχέση γραμμική των συντεταγμένων γενικώς».

6.6. Ο μετασχηματισμός του M. Lemoine, από όλους μόνο αυτός, έχει αξιόλογες μετρικές ιδιότητες, όταν μεταβαίνουμε από ένα σχήμα στο συναφές του:

1ο. «Η απόσταση δύο συναφών σημείων βρίσκεται, κατά προσέγγιση προσήμου, κάνοντας τον μετασχηματισμό στα στοιχεία που υπάρχουν μέσα στην έκφραση των δύο αρχικών σημείων».

2ο. «Ανάλογη πρόταση ισχύει δια την απόσταση σημείου από ευθεία».

3ο. «Ομοίως δια την εφαπτομένη της γωνίας δύο ευθειών».

4ο. «Οι ορθές γωνίες διατηρούνται».

Αναζήτηση μετασχηματισμού. «Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $P_1[l_1, m_1, n_1]$, $P_0[l_0, m_0, n_0]$ και την απόσταση αυτών $d = P_1P_0$. Επίσης τα μετασχηματισμένα αυτών $P_1'[l_1', m_1', n_1']$, $P_0'[l_0', m_0', n_0']$ και την απόστασή τους $d' = P_1'P_0'$. Αν d'' είναι η μετασχηματισμένη της d, ζητείται να προσδιορισθεί ο μετασχηματισμός ώστε, να ισχύει η σχέση $d'^2 = kd''^2$, στην οποία ο συντελεστής k να είναι ανεξάρτητος των βαρυκεντρικών συντεταγμένων των θεωρηθέντων σημείων».

Η (2.2.2′) δίνει $x_1 - x_0 = \beta\left(\frac{l_1}{e_1} - \frac{l_0}{e_0}\right)$, $y_1 - y_0 = \alpha\left(\frac{m_1}{e_1} - \frac{m_0}{e_0}\right)$,

όπου $e_1 = l_1 + m_1 + n_1$, $e_0 = l_0 + m_0 + n_0$.

Εάν τεθεί: $\frac{l_1}{e_1} - \frac{l_0}{e_0} = \upsilon$, $\frac{m_1}{e_1} - \frac{m_0}{e_1} = u \Rightarrow x_1 - x_0 = \beta\upsilon$, $y_1 - y_0 = \alpha u$. Επομένως είναι (βλ. 2.4.1)

$$d^2 = \alpha^2 u^2 + \beta^2 \upsilon^2 + 2\alpha\beta u\upsilon\,\text{συν}\Gamma \tag{6.6.1}$$

$$d'^2 = \alpha^2 u'^2 + \beta^2 \upsilon'^2 + 2\alpha\beta u'\upsilon'\,\text{συν}\Gamma' \tag{6.6.2}$$

Από την [6.6.1] δια του μετασχηματισμού προκύπτει η

$$d''^2 = \alpha'^2 u'^2 + \beta'^2 \upsilon'^2 + 2\alpha'\beta' u'\upsilon'\,\text{συν}A' \tag{6.6.3}$$

Δια να ισχύει $d'^2 = kd''^2$, δια κάθε ζεύγος P_1, P_0, δηλαδή δια κάθε ζεύγος (u', υ') θα πρέπει

$$k = \frac{\alpha_2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma}{2\alpha'\beta'\,\text{συν}\Gamma'} \tag{6 6.4}$$

Επειδή ισχύει η $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}A = 0$, κατά το θεμελιώδες θεώρημα θα ισχύει και η $\alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'^2 - 2\alpha'\beta'\,\text{συν}\Gamma' = 0$ και η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$k = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma'^2} \tag{6.6.5}$$

Επειδή είναι $\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$, κατά δε το θεμελιώδες θεώρημα δια τις ποσότητες α', β', γ' ισχύουν οι σχέσεις $\frac{\alpha'}{\text{ημ}A'} = \frac{\beta'}{\text{ημ}B'} = \frac{\gamma'}{\text{ημ}\Gamma'}$, από την (6.6.5) προκύπτει η σχέση

$$k' = \frac{\text{ημ}^2 A}{\text{ημ}^2 A'} = \frac{\text{ημ}^2 B}{\text{ημ}^2 B'} = \frac{\text{ημ}^2 \Gamma}{\text{ημ}^2 \Gamma'} \tag{6.6.6}$$

η οποία δίνει: $$k'^2 = \frac{2\sum \text{ημ}^2 B\,\text{ημ}^2\Gamma - \sum \text{ημ}^4 A}{2\sum \text{ημ}^2 B'\text{ημ}^2\Gamma' - \sum \text{ημ}^4 A'} = \frac{4\text{ημ}^2 A\,\text{ημ}^2 B\,\text{ημ}^2\Gamma}{4\text{ημ}^2 A'\,\text{ημ}^2 B'\text{ημ}^2\Gamma'} = k'^3.$$

Συνεπώς $k'^2(k'-1)=0$, και διότι $k'\neq 0$, είναι $k'=1$ και η (6.2.13) δίνει

$$\eta\mu A' = \pm\eta\mu A,\ \ \eta\mu B' = \pm\eta\mu B,\ \ \eta\mu\Gamma' = \pm\eta\mu\Gamma.$$

αυτές σε συνδυασμό με τις $A+B+\Gamma=\pi$, $A'+B'+\Gamma'=\pi$ δίνουν ως δυνατές περιπτώσεις τις: $A'=A$, $B'=B$, $\Gamma'=\Gamma$ που είναι ταυτολογία και δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον και τις:

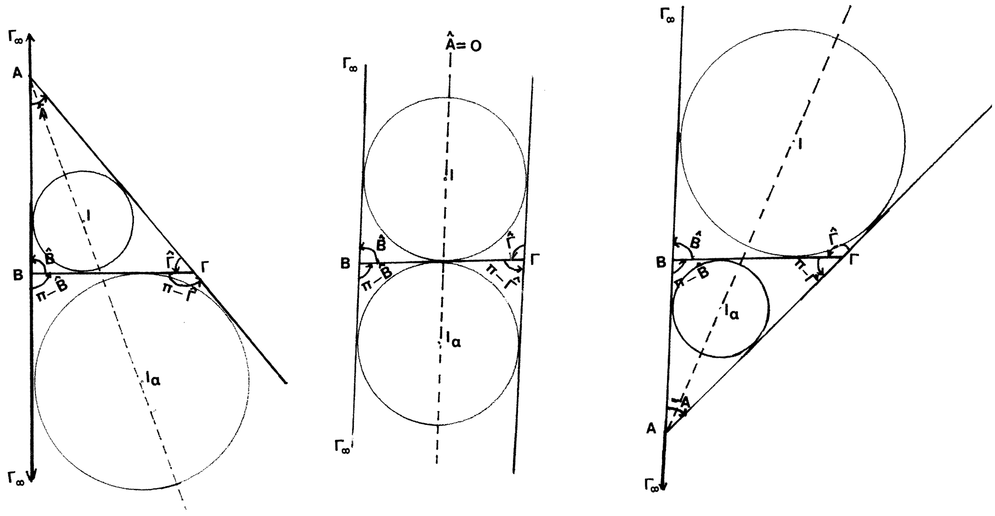
$$A'=-A,\ B'=\pi-B,\ \Gamma'=\pi-\Gamma\cdot\ \ A'=\pi-A,\ B'=-B,\ \Gamma'=\pi-\Gamma\cdot\ \ A'=\pi-A,\ B'=\pi-B,\ \Gamma'=-\Gamma. \quad (6.6.7)$$

Εάν επί πλέον υποτεθεί ότι $k=1$. (Δηλαδή $\alpha'^2=\alpha^2$, $\beta'^2=\beta^2$, $\gamma'^2=\gamma^2$) οι (6.6.7) δίνουν τον μετασχηματισμό του Lemoine στα Α, Β και Γ αντιστοίχως, οπότε ισχύει η $d'^2=d''^2$. Εάν $k\neq 1$ οι τύποι (6.6.5) και οι (6.6.7) δεν φαίνεται να αντιστοιχούν σε άλλους ενδιαφέροντες μετασχηματισμούς.

Η γεωμετρική σημασία του μετασχηματισμού του Μ. Lemoine

Η βασική ιδέα στην οποία στηρίχθηκε ο Μ. Lemoine και από την οποία προέκυψε ο φερώνυμος μετασχηματισμός του ήταν η εξής:

Υποθέτουμε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται συνεχώς δια περιστροφής της πλευράς ΓΑ δεξιόστροφα περί το σημείο Γ. Θα έχουμε τρεις μορφές της εικόνας του μεταβλητού τριγώνου.



Σχ. 127α *Σχ. 127β* *Σχ. 127γ*

1η Το σημείο Α είναι επάνω από την ΒΓ (Σχ. 127α) και θα παραμείνει εκεί έως ότου κατά την περιστροφή τους η ΓΑ τείνει να γίνει παράλληλος με την ΑΒ, δηλαδή το $A\to\Gamma\infty$.

2η Το σημείο $A\equiv\Gamma\infty$ δηλαδή η ΓΑ γίνεται παράλληλος στην ΒΑ (Σχ. 127β).

3η Το σημείο Α, συνεχιζόμενης της περιστροφής της ΓΑ, είναι κάτω από την ΒΓ (Σχ. 127 γ).

Έστω τώρα μία γενική ιδιότητα J του τριγώνου ΑΒΓ της πρώτης μορφής. Θεωρούμε την μεταβολή που παρουσιάζει η ιδιότητα J κατά την συνεχή μεταβολή του ΑΒΓ. Στην πρώτη μορφή η ιδιότητα J παραμένει αμετάβλητη. Στη δεύτερη μορφή η ιδιότητα J πρέπει να αλλάζει και η αλλαγή της πρέπει να παρουσιάζει μία αοριστία, διότι στην μορφή αυτή δεν δυνάμεθα να αποφανθούμε δια την θέση του Α (αν δηλαδή είναι άνω ή κάτω της ΒΓ), αφού κάθε ευθεία έχει ένα μόνο επ' άπειρο σημείο. Τέλος στην τρίτη μορφή η ιδιότητα J συνήθως μεταπίπτει σε μία άλλη γενική ιδιότητα J′ του τριγώνου, διαφορετική από την J.

Πράγματι. Τα στοιχεία του τριγώνου ΑΒΓ αλλάζουν συνήθως όταν μεταβαίνουμε από την πρώτη στην τρίτη μορφή. Π.χ. Ο εγγεγραμμένος κύκλος (Ι) και ο παρεγγεγραμένος (Ια) στην πλευρά ΒΓ δια την πρώτη μορφή, στην δεύτερη μορφή συγχέονται και στην τρίτη μορφή εναλλάσσουν ρόλους. Εάν συνεπώς έχουμε ένα γενικό θεώρημα (ιδιότητα J), στο οποίο αναφέρεται ο εγγεγραμμένεος κύκλος (Ι), δυνάμει της συνεχείας που αναφέρθηκε, θα προκύψει ένα άλλο θεώρημα, στο οποίο θα περιέχεται ο παρεγγεγραμμένος κύκλος (Ια) στην πλευρά ΒΓ. Από την γεωμετρική αυτή μελέτη του θέματος προκύπτει εύκολα ο μετασχηματισμός του Lemoine, ο οποίος, δια τους ανωτέρω λόγους, τον ονόμασε συνεχή μετασχηματισμό στο Α (και αναλόγως στα Β και Γ).

6.7. Μετασχηματισμός του Lemoine

Από τα προηγουμένως εκτεθέντα προκύπτει ότι:

Εάν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό του Lemoine, ή όπως λέγεται συνεχής μετασχηματισμός (Σ.Μ.), στο Α εκτελώντας τις αντικαταστάσεις Α/–Α, Β/π–Β, Γ/π–Γ (και ο οποίος χάριν συντομίας συμβολίζεται με L_A (αναλόγως L_B: Α/π–Α, Β/–Β, Γ/π–Γ και L_Γ: Α/π–Α, Β/π–Β, Γ/–Γ) τότε προκύπτουν οι εξής αντικαταστάσεις:

Α. Γενικά

1ο $\left.\begin{array}{l} \alpha/\alpha,\ \beta/{-\beta},\ \gamma/{-\gamma}\cdot\ \ \tau/{-(\tau-\alpha)},\ \tau-\alpha/{-\tau},\ \tau-\beta/\tau-\gamma,\ \tau-\gamma/\tau-\beta\cdot\ \ E/{-E},\ R/{-R}\cdot\ \varrho/\varrho_\alpha, \\ \varrho_\alpha/\varrho,\ \varrho_\beta/{-\varrho_\gamma},\ \varrho_\gamma/{-\varrho_\beta}\cdot\ \ \delta/{-\delta_\alpha},\ \delta_\alpha/{-\delta},\ \delta_\beta/{-\delta_\gamma},\ \delta_\gamma/{-\delta_\beta},\ a/{-a},\ b/{-b},\ c/{-c},\ d/d_\alpha,\ d_\beta/d_\gamma,\ldots \end{array}\right\}$ (6.7.1)

$$T_\alpha:\ a_1 = \text{εφ}\,\frac{A}{2} \,/\, \text{εφ}\left(-\frac{A}{2}\right) = -\text{εφ}\,\frac{A}{2} = -a_1,\quad b_1 = \text{εφ}\,\frac{B}{2} \,/\, \text{εφ}\,\frac{\pi-B}{2} = \text{σφ}\,\frac{B}{2} = \frac{1}{b_1},\quad \text{εφ}\,\frac{\Gamma}{2} \,/\, \frac{1}{c_1}$$

και επομένως η τριάδα $(a_1, b_1, c_1)/\left(-a_1, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{c_1}\right)$. Αναλόγως ο Σ.Μ. εφαρμοσμένος στο Β δίνειτην $(a_1, b_1, c_1)/\left(\frac{1}{a_1}, -b_1, \frac{1}{c}\right)$ και στο Γ την $(a_1, b_1, c_1)/\left(\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{b_1}, -c_1\right)$. Γενικώς αν ο Σ.Μ. εφαρμοσθεί στο $E \equiv$ Α ή Β ή Γ έχουμε την αντικατάσταση $(a_1, b_1, c_1)/(a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon)$ όπου ε=α, β, γ. Ισχύει η $\sum a_\varepsilon b_\varepsilon = 1$ $(\varepsilon \equiv \alpha, \beta, \gamma)$* όπου τα $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ δίδονται από τις (6.7.2) εκ των οποίων προκύπτουν οι (6.7.3).

$$\left.\begin{array}{lll} a_\alpha = -a_1, & b_a = \dfrac{1}{b_1}, & c_\alpha = \dfrac{1}{c_1} \\ a_\beta = \dfrac{1}{a_1}, & b_\beta = -b_1, & c_\beta = \dfrac{1}{c_1} \\ a_\gamma = \dfrac{1}{a_1}, & b_\gamma = \dfrac{1}{b_1}, & c_\gamma = -c_1 \end{array}\right\} \ (6.7.2) \qquad \left.\begin{array}{ll} s_\alpha = a_a+b_\alpha+c_\alpha & \text{με } \sum a_\alpha b_\alpha = 1 \\ s_\beta = a_\beta+b_\beta+c_\beta & \text{με } \sum a_\beta b_\beta = 1 \\ s_\gamma = a_\gamma+b_\gamma+c_\gamma & \text{με } \sum a_\gamma b_\gamma = 1 \end{array}\right\} \ (6.7.3)$$

2ο Εάν οι β.σ. ενός σημείου P είναι l, m, n τότε οι β.σ. του μετασχηματισμένου συναφούς P_α είναι $l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha$ που είναι τα μετασχηματισμένα των l, m, n με τις αντικαταστάσεις α/α, β/–β, γ/–γ, δηλ. είναι: $P_\alpha[l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha]$. Εάν τα l, m, n δεν είναι συναρτήσεις των α, β, γ, τότε $l_\alpha = l$, $m_\alpha = m$, $n_\alpha = n$ και $P_\alpha[l, m, n] \equiv P$ π.χ. δια το M[1, 1, 1] είναι $M_\alpha[1,1,1]$.

* καθώς και όλες οι ιδιότητες των a, b, c οι αναφερόμενες στην εισαγωγή VII σελ 79-112.

Εάν x, y, z οι καθετικές συντεταγμένες του P, οι β.σ. θα είναι αx, βy, γz και οι μετασχηματισμένες των θα είναι αx_α, $-\beta y_\alpha$, $-\gamma z_\alpha$, οπότε οι καθετικές συντεταγμένες του P_κ, συναφούς του P, θα είναι $P_\kappa[x_\alpha, -y_\alpha, -z_\alpha] \equiv P_\kappa[-x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha]$. Εάν τα x, y, z δεν είναι συναρτήσεις των α, β, γ τότε τα $P_\kappa[-x, y, z] \not\equiv P$.

3o Εάν $f(l, m, n, k, k', k'', \ldots)$ η εξίσωση μιας καμπύλης K σε β.σ. η μετασχηματισμένη της K_α στο A θα έχει εξίσωση $f(l, m, n, k_\alpha, k'_\alpha, k''_\alpha \ldots)$.

Εάν C: $F(x, y, z, k, k', k'', \ldots) = 0$ η εξίσωση μιας καμπύλης σε καθετικές συντεταγμένες, η συναφής της C_α στο A θα έχει εξίσωση: C_α: $F(-x, y, z, k_\alpha, k'_\alpha, k''_\alpha \ldots) = 0$.

4o Εκ των (2.2.2′) έπεται ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες (ως προς το ΑΓΒ) σχ. 66) του P είναι x, y τότε του P_α θα είναι

$$x_\alpha = \frac{-\beta l}{l+m+n} = -x, \quad y_\alpha = \frac{\alpha m}{l+m+n} = y,$$

δηλ. είναι $P_\alpha(-x, y)$. Αν συνεπώς $u = \varphi(x, y, k, k', k'') = 0$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης στο καρτεσιανό σύστημα (ΓΑ, ΓΒ) η εξίσωση της συναφούς στο A θα είναι $\varphi(-x, y, k_\alpha, k'_\alpha, k''_\alpha, \ldots) = 0$.

5o Ισχύουν τα αναφερόμενα στην §6.6.

6o Συνεζευγμένες τετράδες προς I[α].

Α. σημείων: Αν $P[l, m, n]$ ένα σημείο, ένθα l, m, n οι β.σ., εφαρμόζοντας τον Σ.Μ στα A, B, Γ διαδοχικά προκύπτουν τα σημεία $P_\alpha[l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha]$, $P_\beta[l_\beta, m_\beta, n_\beta]$, $P_\gamma[l_\gamma, m_\gamma, n_\gamma]$. Η τετράδα P, P_α, P_β, P_γ λέγεται συνεζευγμένη ως προς το I[α]. Τέτοιες είναι π.χ. οι

$I, I_\alpha, I_\beta, I_\gamma, G, G_\alpha, G_\beta, G_\gamma, N, N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$, $D_0[b_1+c_1] \equiv D_0[\alpha(\tau-\alpha)]$,

$D_\alpha[b_\alpha+c_\alpha] \equiv D_\alpha[\alpha\tau, \beta(\tau-\gamma), \gamma(\tau-\beta)]$, D_β, D_γ · $\Phi_\alpha\left[-\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right]$, Φ_β, Φ_γ κ.λπ.

Β. ευθειών: Η ευθεία $\widetilde{H} \equiv \sum al = 0$, που είναι η πολική του $L[\alpha^2]$ ως προς την εγγεγραμμένη στο ΑΒΓ, έλλειψη του Steiner $(s_0) \equiv \sum l^2 - 2\sum mn = 0$ είναι και ο ομολογικός άξονας του ορθικού τριγώνου (σεβιανού $A_0B_0\Gamma_0$ του ορθοκέντρου H) και του ΑΒΓ.

Το ΑΒΓ ως προς το $A_0B_0\Gamma_0$, λέγεται αντιορθικό. Ενώ όμως το ΑΒΓ έχει ένα ορθικό, δεν έχει και **ένα αντιορθικό, αλλά τέσσερα.** Εάν θεωρήσουμε τις κάθετες από τα A, B, Γ στις εσωτερικές διχοτόμους, αυτές τέμνονται ανά δύο εις τα σημεία I_α, I_β, I_γ, παράκεντρα του ΑΒΓ. Το καθένα των τριγώνων: $I_\alpha I_\beta I_\gamma$, $II_\beta I_\gamma$, $II_\gamma I_\alpha$, $II_\alpha I_\beta$ έχει ορθικό το ΑΒΓ και άρα είναι αντιορθικό του ΑΒΓ. Ο ομολογικός άξονας του $I_\alpha I_\beta I_\gamma$ με το βασικό λέγεται αντιορθικός και έχει εξίσωση την (6.7.4α).

$$\left.\begin{array}{lll}
\widetilde{I} : & \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0 & (\alpha) \\
\widetilde{I}_\alpha : & -\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0 & (\beta) \\
\widetilde{I}_\beta : & \frac{l}{\alpha} - \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0 & (\gamma) \\
\widetilde{I}_\gamma : & \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} - \frac{n}{\gamma} = 0 & (\delta)
\end{array}\right\} \qquad (6.7.4)$$

Σχ. 128

Αναλόγως τα τρίγωνα $II_\beta I_\gamma$, $I_\gamma II_\alpha$, $I_\beta I_\alpha I$ είναι ομολογικά με το ΑΒΓ και έχουν αντίστοιχους ομολογικούς άξονες τους $\widetilde{I}_\alpha$, $\widetilde{I}_\beta$, $\widetilde{I}_\gamma$ με εξισώσεις τις υπόλοιπες των (6.7.4), οι οποίες ως προς το I[α], αποτελούν συνεζευγμένη τετράδα.

Επίσης συνεζευγμένες τετράδες ως προς I{α} είναι οι ευθείες:

$R, R_a, R_\beta, R_\gamma$ (1.7.11)· $r, r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ (1.7.14)· $GN, G_\alpha N_\alpha, G_\beta N_\beta, G_\gamma N_\gamma$ (1.8.3)·

$G, \widetilde{G}_\alpha, \widetilde{G}_\beta, \widetilde{G}_\gamma$ (5.2.6)· $\widetilde{Y}, \widetilde{Y}_\alpha, \widetilde{Y}_\beta, \widetilde{Y}_\gamma$ (5.2.40) κ.λπ.

Γ. κύκλων: Αν η κωνική f=0 είναι κύκλος, τότε και οι $f_\alpha=0$, $f_\beta=0$, $f_\gamma=0$ παριστάνουν επίσης κύκλους. Διότι δια τα $\delta_1 = A–2A+Z$, $\varepsilon_1 = Γ–2E+Z$, $\beta_1 = A–2B+Γ$ ισχύουν οι

$$\frac{\delta_1}{\alpha^2} = \frac{\varepsilon_1}{\beta^2} = \frac{\beta_1}{\gamma^2}.$$

Αν $\delta'_1, \varepsilon'_1, \beta'_1$ είναι τα μετασχηματισμένα των $\delta_1, \varepsilon_1, \beta_1$ δια του μετασχηματισμού του Lemoine στο Α ή Β ή Γ, επειδή δια τον μετασχηματισμό αυτό ισχύει η (6.6.5), η $\dfrac{\delta'_1}{\delta_1} = \dfrac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\beta'_1}{\beta_1}$ οδηγεί στην $\dfrac{\delta'_1}{\alpha^2} = \dfrac{\varepsilon'_1}{\beta^2} = \dfrac{\beta'_1}{\gamma^2}$. Δηλ. **«κατά τον μετασχηματισμό του Lemoine, οι κύκλοι μετασχηματίζονται σε κύκλους»**. Ως παράδειγμα αναφέρονται οι: $C(\widetilde{G}) \equiv (I)$, $C(\widetilde{G}_\alpha) \equiv (I_\alpha)$, $C(\widetilde{G}_\beta) \equiv (I_\beta)$, $C(\widetilde{G}_\gamma) \equiv (I_\gamma)$ (5.2.5 και 5′). Αποτελούν δε οι $C(G_\varepsilon)$ (ε/0, α, β, γ και $G_0 \equiv G$) συνεζευγμένη τετράδα.

Δ. Κωνικών: Αναφέρονται ως πολλαπλό παράδειγμα οι κωνικές $F_{\varepsilon\varepsilon'}$ (5.2.45-48). Έτσι οι $F_{0\alpha}, F_{\alpha\alpha}$, $F_{\beta\alpha}$, $F_{\gamma\alpha}$ αποτελούν συνεζευγμένη τετράδα ως προς το I[α]. Διότι οι αντικαταστάσεις α, β/–β, γ/–γ που ισοδυναμούν με τις α/–α, β/β, γ/γ κι' αυτές με την α/–α μετασχηματίζουν την $F_{0\alpha}$ στην $F_{\alpha\alpha}$. Αναλόγως οι β/–β και γ/–γ μετασχηματίζουν την $F_{0\alpha}$ στις $F_{\beta\alpha}$, $F_{\gamma\alpha}$. Άλλες δύο συνεζευγμένες τετράδες είναι οι $F_{0\beta}$, $F_{\alpha\beta}$, $F_{\beta\beta}$, $F_{\gamma\beta}$ και $F_{0\gamma}$, $F_{\alpha\gamma}$, $F_{\beta\gamma}$, $F_{\gamma\gamma}$.

Τέλος υπάρχουν συνεζευγμένες τετράδες ως προς Ι[α] κυβικών και άλλων καμπύλων.

6.8. Εφαρμογή του μετασχηματισμού του Lemoine (Σ.Μ) στους τύπους

Παριστάνοντας με: $\delta = 4R+\varrho$, $\delta_\alpha = 4R-\varrho_\alpha$, $\delta_\beta = 4R-\varrho_\beta$, $\delta_\gamma = 4R-\varrho_\gamma$, με εφαρμογή του Σ.Μ στο Α έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

1ο. Εκ της $\varrho = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \varrho_\alpha = \frac{-E}{-(\tau-\alpha)} \Rightarrow \varrho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$ κ.λπ. ή $E = \tau\varrho = (\tau-\alpha)\varrho_\alpha =$ κ.λπ.

2ο. $\sum \alpha(\beta+\gamma)\text{συν}A = \frac{\varrho}{R}[\tau^2+(2R+\varrho)\delta]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει

$-\alpha(\beta+\gamma)\text{συν}A+\beta(\alpha-\gamma)\text{συν}B+\gamma(\alpha-\beta)\text{συν}\Gamma = \frac{\varrho_\alpha}{R}[\delta_\alpha(\varrho_\alpha-2R)-(\tau-\alpha)^2]$.

3ο. $\sum \alpha^2(\beta\varrho_\gamma+\gamma\varrho_\beta) = 2E[\tau^2+(2R+\varrho)\delta]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει την

$\alpha^2(\beta\varrho_\beta+\gamma\varrho_\gamma)-\beta^2(\gamma\varrho+\alpha\varrho_\beta)-\gamma^2(\beta\varrho+\alpha\varrho_\gamma) = 2E[\delta_\alpha(\varrho_\alpha-2R)-(\tau-\alpha)^2]$.

4ο. $\beta\varrho_\gamma+\gamma\varrho_\beta = \frac{E}{2\varrho\varrho_\alpha}[\alpha(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)^2]$.

Ο Σ.Μ. στο Α δίνει: $\beta\varrho_\beta+\gamma\varrho_\gamma = \frac{E}{2\varrho\varrho_\alpha}[\alpha(\beta+\gamma)+(\beta-\gamma)^2]$

Ο Σ.Μ στο Β δίνει: $\beta\varrho_\alpha+\gamma\varrho = \frac{E}{2\varrho_\beta\varrho_\gamma}[\alpha(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma)^2]$.

5ο. $\sum \alpha(\tau-\alpha)^2\ \text{συν}A = \frac{2E}{R}(2R^2-2R\varrho-\varrho^2)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\alpha\tau^2\text{συν}A+\beta(\tau-\gamma)^2\text{συν}B+\gamma(\tau-\beta)^2\text{συν}\Gamma = \frac{2E}{R}(2R^2+2R\varrho_\alpha-\varrho_\alpha^2)$.

6ο. $\delta = \frac{\alpha\tau+\varrho_\alpha^2}{\varrho_\alpha} = \varrho_\alpha + \frac{\alpha}{a_1}\ \left(a_1 = \text{εφ}\,\frac{A}{2}\right)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\delta_\alpha = \frac{\alpha(\tau-\alpha)-\varrho^2}{\varrho} = -\varrho - \frac{\alpha}{a_\alpha} = -\varrho + \frac{\alpha}{a_1}$.

7ο. $\varrho_\alpha+\varrho_\beta = \frac{\tau\gamma}{\varrho_\gamma}$

Ο Σ.Μ στο Α δίνει: $-\varrho+\varrho_\gamma = \frac{(\tau-\alpha)\gamma}{\varrho_\beta}$

Ο Σ.Μ στο Β δίνει: $\varrho_\gamma-\varrho = \frac{(\tau-\beta)\gamma}{\varrho_\alpha}$

Ο Σ.Μ στο Γ δίνει: $\varrho_\alpha+\varrho_\beta = \frac{(\tau-\gamma)\gamma}{\varrho}$.

8ο. $\sum \alpha^6 = 2(\tau^2-\varrho\delta)^3-24\tau^2\varrho^2(\tau^2-\varrho\delta)+48\tau^2\varrho^2R^2 \equiv P$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει:

$\sum \alpha^6 = [\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha]^3-24(\tau-\alpha)^2\varrho_\alpha^2[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha]+48(\tau-\alpha)^2\varrho_\alpha^2R^2 \equiv P_\alpha$. Εξ αυτής έπεται

$$P = P_\alpha = P_\beta = P_\gamma$$

9ο. $\sum \beta\gamma\varrho_\alpha^2 = \varrho[\delta^3 - \tau^2(8R-\varrho)]$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει:

$-\beta\gamma\varrho^2 + \gamma\alpha\varrho_\gamma^2 + \alpha\beta\varrho_\beta^2 = \varrho_\alpha[(\tau-\alpha)^2(8R+\varrho_\alpha) - \delta_\alpha^3]$.

10ο. $\sum \beta^2\gamma^2\varrho_\alpha = \varrho[\tau^4 - 2\tau^2\varrho(2R-\varrho) + \varrho\delta^3]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\beta^2\gamma^2\varrho - \gamma^2\alpha^2\varrho_\alpha - \alpha^2\beta^2\varrho_\beta = \varrho_\alpha[(\tau-\alpha)^4 - 2(\tau-\alpha)^2\varrho_\alpha(2R+\varrho_\alpha) - \varrho_\alpha\delta_\alpha^3]$.

11ο. $\sum \varrho_\alpha^2 \dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} = \dfrac{1}{4\tau R}[\tau^2(16R+\varrho) - \delta^3]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\varrho^2 \dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \varrho_\gamma^2 \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \varrho_\beta^2 \dfrac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \dfrac{1}{4(\tau-\alpha)R}[\delta\varrho_\alpha^3 - (\tau-\alpha)^2(16R-\varrho_\alpha)]$.

12ο. $\sum \dfrac{\alpha(\varrho^2+\varrho_\alpha^2)}{\varrho_\alpha - \varrho} = 2\tau(2R+\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\dfrac{\alpha(\varrho_\alpha^2+\varrho^2)}{\varrho_\alpha-\varrho} + \dfrac{\beta(\varrho_\alpha^2+\varrho_\gamma^2)}{\varrho_\alpha+\varrho_\gamma} + \dfrac{\gamma(\varrho_\alpha^2+\varrho_\beta^2)}{\varrho_\alpha+\varrho_\beta} = 2(\tau-\alpha)(2R-\varrho_\alpha)$.

13ο. $\sum \alpha\varrho_\beta^2\varrho_\gamma^2\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{2\tau^3\varrho}{R}[2R^2 - 2R\varrho - \varrho^2]$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει:

$\alpha\varrho_\beta^2\varrho_\gamma^2\,\sigma\upsilon\nu A + \beta\varrho^2\varrho_\beta^2\,\sigma\upsilon\nu B + \gamma\varrho^2\varrho_\gamma^2\,\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{2(\tau-\alpha)^3\varrho}{R}[2R^2 + 2R\varrho_\alpha - \varrho_\alpha^2]$.

14ο. $\sum \beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2 A = \dfrac{1}{R}[\tau^2(R-2\varrho) + R\varrho\delta]$. ΟΣ.Μ στο Α δίνει:

$-\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2 A + \gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 B + \alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \dfrac{1}{R}[R\varrho_\alpha\delta_\alpha - (\tau-\alpha)^2(R+2\varrho_\alpha)]$.

15ο. $\sum \alpha\sigma\upsilon\nu^2 A = \dfrac{\tau}{2R^2}[2(2R+\varrho)(R+\varrho) + \varrho^2 - \tau^2]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha\sigma\upsilon\nu^2 A + \beta\sigma\upsilon\nu^2 B + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \dfrac{\tau-\alpha}{2R^2}[2(2R-\varrho_\alpha)(R-\varrho_\alpha) + \varrho_\alpha^2 - (\tau-\alpha)^2]$.

16ο. $\sum \alpha^4\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{\varrho}{R}[5\tau^4 - 2\tau^2(8R^2+15R\varrho+5\varrho^2) + \varrho\delta^2(2R+\varrho)]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha^4\,\sigma\upsilon\nu A + \beta^4\,\sigma\upsilon\nu B + \gamma^4\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\varrho_\alpha}{R}[5(\tau-\alpha)^4 - 2(\tau-\alpha)^2(8R^2 - 15R\varrho_\alpha + 5\varrho_\alpha^2) - \varrho_\alpha\delta_\alpha^2(2R-\varrho_\alpha)]$

17ο. $\sum \varrho_\alpha\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{1}{R}(\tau^2 - R\delta)$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει:

$-\varrho\sigma\upsilon\nu A + \varrho_\alpha\sigma\upsilon\nu B + \varrho_\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{1}{R}[(\tau-\alpha)^2 - R\delta_\alpha]$.

18ο. $\sum (\beta-\gamma)(3\alpha-2\tau)\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{\tau}{2R\varrho}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει:

$-(\beta-\gamma)(2\alpha+\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A + (\gamma+\alpha)(-\alpha-2\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu B - (\alpha+\beta)(-\alpha+\beta-2\gamma)\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\tau-\alpha}{2R\varrho_\alpha}(\beta-\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

19ο. $\sum \dfrac{(\beta^2-\gamma^2)^2}{\alpha} = \dfrac{2\tau(R-2\varrho)}{R}[\tau^2 + \varrho(2R+\varrho)]$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει

$-\dfrac{(\beta^2-\gamma^2)^2}{\alpha} + \dfrac{(\gamma^2-\alpha^2)}{\beta} + \dfrac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{\gamma} = \dfrac{2(\tau-\alpha)(R+2\varrho_\alpha)}{R}[(\tau-\alpha)^2 - \varrho_\alpha(2R-\varrho_\alpha)]$.

20ο. $\sum \beta\gamma = \tau^2 + \varrho\delta$. Ο Σ.Μ στο Α δίνει

$-\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = -(\tau-\alpha)^2 + \varrho_\alpha\delta_\alpha$.

21ο. $\alpha^2+\beta^2\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma^2\sigma\upsilon\nu B = 2\alpha\tau-\beta\gamma(\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)$.

Ο Σ.Μ. στο Α δίνει: $\alpha^2-\beta^2\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma^2\sigma\upsilon\nu B = \beta\gamma(\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)-2\alpha(\tau-\alpha)$.

Ο Σ.Μ. στο Β δίνει: $\alpha^2-\beta^2\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma^2\sigma\upsilon\nu B = 2\alpha(\tau-\beta)+\beta\gamma(\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma)$.

22ο. $\alpha(\beta+\gamma) = (\varrho+\varrho_\alpha)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει το ίδιο. Στο Β δίνει:

$\alpha(\beta-\gamma) = (\varrho_\alpha-\varrho)(\varrho_\beta-\varrho_\gamma)$.

23ο. $\varrho_\alpha^4+\varrho_\beta^4+\varrho_\gamma^4 = (\delta^2-2\tau^2)^2$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\varrho^4+\varrho_\beta^4+\varrho_\gamma^4 = [\delta_\alpha^2-2(\tau-\alpha)^2]^2$.

24ο. $\sum\varrho_\alpha\sigma\upsilon\nu^2 A = \delta-\dfrac{\tau^2(R-\varrho)}{R^2}$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\varrho\sigma\upsilon\nu^2 A+\varrho_\gamma\sigma\upsilon\nu^2 B+\varrho_\beta\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \dfrac{(\tau-\alpha)^2(R+\varrho_\alpha)}{R^2}$.

25ο. $\sum\alpha(\varrho_\beta+\varrho_\gamma-\varrho) = \sum\alpha(4R-\varrho_\gamma) = 2\tau(2R+\varrho)$ (διότι $\varrho_\alpha+\varrho_\beta+\varrho_\gamma = \delta = 4R+\varrho$). Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\alpha(\varrho_\alpha+\varrho_\beta+\varrho_\gamma)+\beta(\varrho_\alpha+\varrho_\beta-\varrho)+\gamma(\varrho_\alpha+\varrho_\gamma-\varrho) = 2(\tau-\alpha)(2R-\varrho_\alpha)$.

26ο. $\sum\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma-2\varrho) = 2\tau(\tau^2+\varrho^2-10R\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma-2\varrho_\alpha)+\beta(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(2\varrho_\alpha+\varrho_\beta-\varrho)+\gamma(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(2\varrho_\alpha+\varrho_\gamma-\varrho) = 2(\tau-\alpha)[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha^2+10R\varrho_\alpha]$.

27ο. $\sum\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)[(\varrho_\beta-\varrho_\gamma)^2+(\varrho_\gamma-\varrho)^2] = 4R\tau(\tau^2+\varrho^2-12R\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)[(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)^2+(\varrho_\alpha+\varrho_\gamma)^2]+\beta(\varrho_\alpha+\varrho_\gamma)[(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)^2+(\varrho_\alpha-\varrho)^2]+\gamma(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)[(\varrho_\alpha+\varrho_\gamma)^2+(\varrho_\alpha-\varrho)^2] =$

$= 4R(\tau-\alpha)[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha^2+12R\varrho_\alpha]$

28ο. $\sum\alpha^2\varrho_\beta\varrho_\gamma = 4\tau E(R+\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha^2\varrho_\beta\varrho_\gamma+\beta^2\varrho\varrho_\beta+\gamma^2\varrho\varrho_\gamma = 4(\tau-\alpha)E(R-\varrho_\alpha)$.

29ο. $\sum\varrho_\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 A = \delta-\dfrac{\tau^2(R-\varrho)}{R^2}$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\varrho\,\sigma\upsilon\nu^2 A+\varrho_\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2 B+\varrho_\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \delta_\alpha-\dfrac{(\tau-\alpha)^2(R+\varrho_\alpha)}{R^2}$.

30ο. $\sum\beta\gamma\varrho_\alpha\,\sigma\upsilon\nu A = \varrho(5\tau^2-\delta^2)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\beta\gamma\varrho\,\sigma\upsilon\nu A-\gamma\alpha\varrho_\gamma\,\sigma\upsilon\nu B-\alpha\beta\varrho_\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varrho_\alpha[5(\tau-\alpha)^2-\delta_\alpha^2]$.

31ο. $\sum\alpha\varrho_\beta\varrho_\gamma = 2E\delta$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει:

$\alpha\varrho_\beta\varrho_\gamma+\beta\varrho\varrho_\beta+\gamma\varrho\varrho_\gamma = 2E\delta_\alpha$, $\alpha\varrho\varrho_\alpha+\beta\varrho_\gamma\varrho_\alpha+\gamma\varrho\varrho_\gamma = 2E\delta_\beta$, $\alpha\varrho\varrho_\alpha+\beta\varrho\varrho_\beta+\gamma\varrho_\alpha\varrho_\beta = 2E\delta_\alpha$.

32ο. $\sum\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 A = \dfrac{\tau}{2R^2}[3(R+\varrho)^2+R^2-\tau^2]$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha\sigma\upsilon\nu^2 A+\beta\sigma\upsilon\nu^2 B+\gamma\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \dfrac{\tau-\alpha}{2R^2}[3(R-\varrho_\alpha)^2+R^2-(\tau-\alpha)^2]$.

33ο. $\sum\alpha\delta_\alpha = 2\tau(2R+\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha\delta_\alpha+\beta\delta_\gamma+\gamma\delta_\beta = 2(\tau-\alpha)(2R-\varrho_\alpha)$

34ο. $\sum \alpha(\varrho_\alpha-\varrho)(\delta_\alpha-\varrho) = 2\tau(\tau^2+\varrho^2-10R\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)(\delta+\varrho_\alpha)+\beta(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\delta_\gamma+\varrho_\alpha)+\gamma(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\delta_\beta+\varrho_\alpha) = 2(\tau-\alpha)[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha^2+10R\varrho_\alpha]$.

35ο. $\sum \alpha(\varrho_\alpha-\varrho)[(\varrho_\beta-\varrho)^2+(\varrho_\gamma-\varrho)^2] = 4R\tau(\tau^2+\varrho^2-12R\varrho)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$$-\alpha(\varrho_\alpha-\varrho)[(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)^2+(\varrho_\beta+\varrho_\alpha)^2]+\beta(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)[(\varrho_\beta+\varrho_\alpha)^2+(\varrho_\alpha-\varrho)^2]+\gamma(\varrho_\beta+\varrho_\alpha)[(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)^2+(\varrho_\alpha-\varrho)^2] =$$
$$= 4R(\tau-\alpha)[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha^2+12R\varrho_\alpha]$$

36ο. $\sum \varrho_\alpha \sigma\upsilon\nu^2 A = \delta - \frac{\tau^2(R-\varrho)}{R^2}$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$-\varrho\,\sigma\upsilon\nu^2 A+\varrho_\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2 B+\varrho_\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = \delta_\alpha + \frac{(\tau-\alpha)^2(R+\varrho_\alpha)}{R^2}$.

37ο. $\sum \beta\gamma\varrho_\alpha\,\sigma\upsilon\nu A = \varrho(5\tau^2-\delta^2)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\beta\gamma\varrho\,\sigma\upsilon\nu A-\gamma\alpha\varrho_\alpha\,\sigma\upsilon\nu B-\alpha\beta\varrho_\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varrho_\alpha[5(\tau-\alpha)^2-\delta_\alpha^2]$.

38ο. $\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varrho+\varrho_\alpha}{2R}$. Ο Σ.Μ. στο Β ή Γ δίνει:

$\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varrho_\gamma-\varrho_\beta}{2R}$.

39ο. $\gamma\varrho_\beta-\beta\varrho_\gamma = \frac{(\beta-\gamma)(\tau-\alpha)^2}{\varrho} = \frac{(\beta-\gamma)\varrho_\beta\varrho_\gamma}{\varrho_\alpha}$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\gamma\varrho_\gamma-\beta\varrho_\beta = \frac{(\beta-\gamma)\tau^2}{\varrho_\alpha} = \frac{(\beta-\gamma)\varrho_\beta\varrho_\gamma}{\varrho}$.

40ο. $\gamma\varrho_\beta+\beta\varrho_\gamma = \frac{\tau\varrho}{\varrho_\alpha}(\delta+\varrho_\alpha) = (\tau-\alpha)(\delta+\varrho_\alpha)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\beta\varrho_\beta+\gamma\varrho_\gamma = \frac{(\tau-\alpha)\varrho_\alpha}{\varrho}(\varrho-\delta_\alpha) = \tau(\varrho-\delta_\alpha)$.

41ο. $\beta\gamma+2\tau\alpha = (\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$. Ο Σ.Μ. στο Α δίνει:

$\beta\gamma-2(\tau-\alpha)\alpha = (\gamma-\beta)(\alpha-\beta)$. Ενώ ο Σ.Μ στο Β ή στο Γ δίνει:

$\beta\gamma-2(\tau-\gamma)\alpha = (\gamma-\alpha)(\alpha+\beta)$.

42ο. $\tau(2\alpha-\tau) = \varrho_\alpha\varrho_\beta-\varrho_\beta\varrho_\gamma+\varrho_\gamma\varrho_\alpha$.
Ο Σ.Μ στο Α δίνει: $\tau^2-\alpha^2 = \varrho\varrho_\beta+\varrho\varrho_\gamma+\varrho_\beta\varrho_\gamma$
Ο Σ.Μ στο Β δίνει: $(\tau-\beta)(\tau+\alpha-\gamma) = \varrho_\gamma\varrho_\alpha+\varrho\varrho_\alpha-\varrho\varrho_\gamma$
Ο Σ.Μ στο Γ δίνει: $(\tau-\gamma)(\tau+\alpha-\beta) = \varrho_\alpha\varrho_\beta+\varrho\varrho_\alpha-\varrho\varrho_\beta$.

43ο. $\alpha^2\varrho_\alpha+\beta^2\varrho_\beta-\gamma^2\varrho_\gamma = 4R\tau[(\tau-\gamma)-\gamma\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B]$. Ο Σ.Μ. στ Α δίνει:

$\alpha^2\varrho-\beta^2\varrho_\gamma+\gamma^2\varrho_\beta = 4R(\tau-\alpha)[\tau-\beta)-\gamma\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B]$.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν ο Σ.Μ. εφαρμοζόμενος στα Α, Β, Γ δεν δίνει νέους τύπους, αλλά το αποτέλεσμα μένει το ίδιο. Συνέπεια αυτού είναι, αρκετές φορές να προκύπτουν διάφορες ταυτότητες μεταξύ των στοιχείων του τριγώνου.

44ο. $\sum \alpha^2 = 2(\tau^2-\varrho\delta)$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει:

$\sum \alpha^2 = 2(\tau^2-\varrho\delta) = 2(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha] = 2[(\tau-\beta)^2+\varrho_\beta\delta_\beta] = 2[(\tau-\gamma)^2+\varrho_\gamma\delta_\gamma]$

45ο. $\sum \alpha^3 \text{συν}A = \frac{4\tau\varrho}{R}(\tau^2-\varrho\delta-3R^2)$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει:

$$\sum \alpha^3 \text{συν}A = \frac{4\tau\varrho}{R}(\tau^2-\varrho\delta-3R^2) = \frac{4(\tau-\alpha)\varrho_\alpha}{R}[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha-3R^2] =$$

$$= \frac{4(\tau-\beta)\varrho_\beta}{R}[(\tau-\beta)^2+\varrho_\beta\delta_\beta-3R^2] = \frac{4(\tau-\gamma)\varrho_\gamma}{R}[(\tau-\gamma)^2+\varrho_\gamma\delta_\gamma-3R^2]$$

46ο. $\beta\gamma = \varrho\varrho_\alpha+\varrho_\beta\varrho_\gamma$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει τον ίδιο τύπο.

47ο. $\alpha^2 = (\varrho_\alpha-\varrho)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει τον ίδιο τύπο.

48ο. $\varrho_\beta\varrho_\gamma-\varrho\varrho_\alpha = \beta\gamma\,\text{συν}A$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει τον ίδιο τύπο.

49ο. $\alpha^2-4\beta\gamma\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma = \left(\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}\right)^2$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει τον ίδιο τύπο.

50ο. $\sum \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}\text{συν}A = 3$.

51ο. $\beta^3\text{συν}\Gamma+\gamma^3\text{συν}B-\alpha^3 = 4ER(\text{συν}A-2\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma)$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει τον ίδιο τύπο.

52ο. $\sum \alpha(\varrho_\beta-\varrho)(\varrho_\gamma-\varrho) = 4ER$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει:

$$\alpha(\varrho-\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\gamma)+\beta(\varrho-\varrho_\gamma)(\varrho-\varrho_\alpha)+\gamma(\varrho-\varrho_\alpha)(\varrho-\varrho_\beta) =$$

$$= \alpha(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)+\beta(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\alpha)+\gamma(\varrho-\varrho_\alpha)(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha) =$$

$$= \alpha(\varrho-\varrho_\beta)(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)+\beta(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)+\gamma(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)(\varrho-\varrho_\beta) =$$

$$= \alpha(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\varrho-\varrho_\gamma)+\beta(\varrho-\varrho_\gamma)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)+\gamma(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha) = 4ER$$

53ο. $\sum \alpha\,\text{συν}^3A = \frac{E}{R^3}[(2R+\varrho)^2+R^2-\tau^2]$. Ο Σ.Τ. στα Α, Β, Γ δίνει ότι η παράσταση είναι ίση με

$$\frac{E}{R^3}[(2R-\varrho_\alpha)^2+R^2-(\tau-\alpha)^2] = \frac{E}{R^3}[2R-\varrho_\beta)^2+R^2-(\tau-\beta)^2] = \frac{E}{R^3}[(2R-\varrho_\gamma)^2+R^2-(\tau-\gamma)^2].$$

54ο. $\sum \alpha^6 = 2(\tau^2-\varrho\delta)^3+24E^2[2R^2-(\tau^2-\varrho\delta)] = m^6-3m^2n^4+3\alpha^2\beta^2\gamma^2$

όπου $m^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $n^4 = \beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει ότι η παράσταση είναι ίση με:

$$2[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha]^3+24E^2\{2R^2-[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha]\} = 2[(\tau-\beta)^2+\varrho_\beta\delta_\beta]^3+24E^2\{2R^2-[(\tau-\beta)^2+\varrho_\beta\delta_\beta]\}=$$

$$= 2[(\tau-\gamma)^2+\varrho_\gamma\delta_\gamma)]^3+24E^2\{2R^2-[(\tau-\gamma)^2+\varrho_\gamma\delta_\gamma]\}.$$

55ο. $\beta^2\gamma^2 = (\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\gamma)$. Ο Σ.Μ. στα Α, Β, Γ δίνει:

$$\beta^2\gamma^2 = (\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\beta)(\varrho-\varrho_\gamma) = (\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)(\varrho-\varrho_\gamma)(\varrho-\varrho_\alpha) = (\varrho_\beta+\varrho_\gamma)(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)(\varrho-\varrho_\alpha)(\varrho-\varrho_\beta)$$

56ο. $\sum \alpha^2\text{συν}^2A = m^2-\frac{m^4-2n^4}{4R^2} = 8R^2\cdot\frac{1-s\pi}{(s-\pi)^2} = \frac{1}{2R^2}[\tau^2\varrho^2+4R^4-(\tau^2-\varrho\delta-2R^2)^2] =$

$$= \frac{1}{2R^2}\{(\tau-\alpha)^2\varrho_\alpha^2+4R^4-[(\tau-\alpha)^2+\varrho_\alpha\delta_\alpha-2R^2]^2\} = \ldots$$

57ο. $\beta^3\text{συν}B-\gamma^3\text{συν}\Gamma = \frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\beta\gamma}[\beta^4+\gamma^4-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)] = \frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha}n^2\text{συν}(A+\omega)$ όπου ω η γωνία του