Γεωργίου Α. Καπέτη

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ του ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Α ΤΟΜΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τον συγγραφέα

*Στη σύζυγό μου*

*Για κάθε πληροφορία*
*Καπέτης Γιώργος*
*Παντελή Χορν 31*
☎ *(031) 310 731*
*542 49 Θεσσαλονίκη*

ISBN set 960-431-386-X
ISBN Τ.Α' 960-431-385-1



***Φωτοστοιχειοθεσία - Εκτύπωση*** **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
Σόλωνος 79-81 ● ☎ (031) 825 453, 849 178
Θεσσαλονίκη 542 48 ● Fax (031) 825 453, 849 178

***Βιβλιοπωλείο*** **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 ● ☎ (031) 203 720
Θεσσαλονίκη 546 35 ● Fax (031) 211 305

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι ρίζες της Γεωμετρίας ξεκινούν από την Αίγυπτο και την Μεσοποταμία. Στην Ελλάδα δημιουργήθηκε η Ελληνική Επιστήμη της Γεωμετρίας (Θαλής - Πυθαγόρας). Τα «Στοιχεία», έργο του Ευκλείδη κατά την Αλεξανδρινή εποχή αποτελούμενα από δεκατρία (13) βιβλία, υπήρξαν πρότυπο μαθηματικής κομψότητας και αυστηρότητας.

Στην Δύση εμφανίσθηκε η Γεωμετρία κατά τον 12ο αιώνα από Άραβες και Ισπανούς - Εβραίους μετανάστες. Κατά τον 16ο αιώνα παρουσιάζονται τα πρώτα προβλήματα κατασκευών με κανόνα και διαβήτη.

Κατά το τέλος του περασμένου αιώνα εμφανίσθηκε η Γεωμετρία του Τριγώνου. Ιδρυταί της θεωρούνται οι BROCARD, LEMOINE, NEUBERG και κυρίως ο πρώτος.

Ήδη το 1889 ο ÉMILE VIGARIÉ σε μια ιστορική ανασκόπηση των μαθηματικών χρησιμοποίηση την έκφραση «η Γεωμετρία του τριγώνου είναι η πιο αξιόλογη πρόοδος που πραγματοποίησαν τα στοιχειώδη μαθηματικά τα τελευταία χρόνια».

Πάντοτε μελετήθηκαν αξιόλογα σημεία και ευθείες στο επίπεδο του τριγώνου, όμως από το 1873 κυρίως και μετά η μελέτη του τριγώνου απετέλεσε το αντικείμενο πολυαρίθμων και αποδοτικών ερευνών. Το σύνολο των αποτελεσμάτων που επετεύχθηκαν και συναρμόσθηκαν μεταξύ τους πήρε το όνομα Γεωμετρία του Τριγώνου ή Πρόσφατη Γεωμετρία (Géometrie du Triangle ή Géometrie recente).

Η **Γαλλική ένωση δια την πρόοδο των επιστημών** (L' Association Française pour l' avancement des sciences) έδωσε την ευκαιρία δια τις πρώτες εργασίες εκείνης της περιόδου και σχετικά επιστημονικά περιοδικά παρουσίασαν κατά καιρούς επιτεύγματα από διακεκριμένα μέλη τους.

1ο «Τα Νέα Μαθηματικά Χρονικά» (Les Neouvelles Annales Mathématiques) παρουσίασαν τα άρθρα των LEMOINE και BROCARD (1873 και 1875), τα αναφερόμενα στα σημεία και τους κύκλους που φέρουν σήμερα τ' ονομά τους, καθώς συνέβη και παλαιότερη μ' εκείνα του MATHIEU (1866), που φαίνεται ήταν ελάχιστα γνωστά εκείνα την εποχή, παρά την σπουδαιότητα της ισογωνίου αντιστροφής (inversion isogonale). Αργότερα (1883) έκανε γνωστές τις μελέτες του ο D'OCAGNE επί της συμμετροδιαμέσου (symédiane).

2ο «Το περιοδικό των στοιχειωδών και ειδικών μαθηματικών» (Le journal des mathématiques élémentaires et spéciales) των BOURGET και G. DE LONGCHAMPS υπήρξε το κύριο όργανο στη Γαλλία, της «Γεωμετρίας του Τριγώνου». Πρέπει να λεχθεί ότι και οι ερευνητές και το κοινό οφείλουν πολλά σ' αυτήν την αξιόλογη επιστημονική έκδοση.

3ο Στο Βέλγιο η «Μάθησις» (Mathésis) των MANSION και NEUBERG, συνέχισε από το 1881 την «Νέα Αλληλογραφία» (Nouvelle Correspondance) του CATALAN. Δια να γίνει κατανοητό το τι αποτελεί το βελγικό αυτό περιοδικό δια την πρόσφατη Γεωμετρία (Géométrie récente) αρκεί να λεχθεί ότι όταν θέλουν να μνημονεύσουν τους κύριους συγγραφείς της Γεωμετρίας του Τριγώνου αναφέρονται παγκοσμίως στους BROCARD, LEMOINE και NEUBERG.

Διάφορες αγγλικές και γερμανικές εκδόσεις, από την πλευρά τους κάνουν γνωστές μελέτες σχετιζόμενες με τον νέο κλάδο της Γεωμετρίας.

Με ενδιαφέρον διαβάζει κανείς την **«ιστορική μελέτη της πορείας της αναπτύξεως της Γεωμετρίας του Τριγώνου»**, του VIGARIÉ, 1889 (συμπλήρωμα στο Mathesis, 1890) και τα άρθρα του ιδίου για το ίδιο θέμα που δημοσιεύονται κάθε χρόνο από τότε στο **Περιοδικό των Μαθηματικών** (Journal de Mathématiques) του DE LONGCHAMPS.

Εκτός από τις περιοδικές αυτές εκδόσεις σπουδαία έργα είναι και τα εξής:

4ο Géométrie récente du triangle, του NEUBERG, εβδομήνα σελίδων στο 3ο κεφάλαιο του 1ου μέρους του Traité de Géométrie των ROUCHÉ και DE COMBEROUSSE, 6η έκδοση 1891.

5ο Μνημόνια επί του «**τετραέδρου**» 1884, περί των προβολών και αντιπροβολών ενός σταθερού τριγώνου και **επί του συστήματος τριών ευθέως ομοίων σχημάτων** από τον NEUBERG (Βρυξέλλες 1890).

6ο Ευθύγραμμη Τριγωνομετρία και Γεωμετρία του Τριγώνου του LALBALETTRIER (Παρίσι 1889).

7ο Στις περιοδικές εκδόσεις που αναφέρθηκαν καθώς και σε πολλές άλλες που αναφέρονται στο τέλος του βιβλίου (Βλ. Συντομογραφίες) τα άρθρα δια την Γεωμετρία του Τριγώνου συνεχίζονται ως τα μέσα του παρόντος αιώνος (GOORMATIGH, THEBAULD, DEAUX, LEEMANS και άλλοι). Μετά παρατηρείται κάποια στασιμότητα.

Σκοπός του γράφοντος είναι αφ' ενός να παρουσιάσει μία κατά το δυνατόν συγκροτημένη εικόνα της Γεωμετρίας του Τριγώνου με βάση αυτά που έχει υπ' όψη του, απ' όσα μέχρι τώρα εγράφησαν, προσθέτοντας και δικά του στοιχεία, αφ' ετέρου χρησιμοποιώντας τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων και με νέες προτάσεις (ή στοιχεία) να συντελέσει στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού της Γεωμετρίας που έφθασε ως τα μέσα σχεδόν του 20ου αιώνα.

Αυτό φαίνεται ήδη στον Α′ Τόμο, από την προσπάθεια να διατυπωθούν εκφράσεις διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών και αναλλοίωτων κωνικών από συστήματα συντεταγμένων της Αναλυτικής Γεωμετρίας σε συστήματα συντεταγμένων της Γεωμετρίας του Τριγώνου.

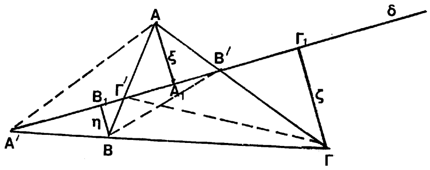
*Σεπτέμβριος 1996* *Ο συγγραφέας*

# ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ. ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

## Ι. Θεώρημα του Μενελάου

**1. «Α′, Β′, Γ′ είναι τρία σημεία κείμενα επί των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε τα σημεία αυτά νάναι ομοευθειακά, είναι**

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma B'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{A\Gamma'}}{\overline{\Gamma' B}} = -1^{*} \text{ ».} \qquad \textbf{(I.1)}$$



*Σχ. 1*

Η συνθήκη είναι αναγκαία. Πράγματι, αν Α′, Β′, Γ′ είναι τα σημεία τομής μιας διατέμνουσας δ με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και ονομάσουμε ξ, η, ζ τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}$ καθέτων στη δ θα είναι:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}} = -\frac{\eta}{\zeta}, \quad \frac{\overline{\Gamma B'}}{\overline{B'A}} = -\frac{\zeta}{\xi}, \quad \frac{\overline{A\Gamma'}}{\overline{\Gamma' B}} = -\frac{\xi}{\eta}.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει η (Ι.1).

***Παρατήρηση:***

Επειδή $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}}$ είναι ο μερικός λόγος στον οποίο διαιρείται το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ από το σημείο Α′, θέτουμε $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}} = (B\Gamma A')$ κ.λπ. οπότε η (Ι1) λαμβάνει την ευκολομνημόνευτη και συμμετρική έκφραση

$$(B\Gamma A')\,(\Gamma A B')\,(A B \Gamma') = -1 \qquad (I.1')$$

Αν τους τρεις μερικούς λόγους ονομάσουμε λ, μ, ν έχουμε την ακόμη απλούστερη έκφραση

$$\lambda\mu\nu = -1 \qquad (I.1'')$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι τρεις μερικοί λόγοι λ, μ, ν είναι δυνατόν και οι τρεις να είναι αρνητικοί ή δύο θετικοί και ένας αρνητικός· και οι τρεις όμως να είναι θετικοί αποκλείεται.

Η σχέση (Ι.1) του Μενελάου είναι επίσης και ικανή. Η απόδειξη είναι εύκολη με τη μέθοδο της ως άτοπο

* Με $\overline{BA'}$, $\overline{A'\Gamma}$ κ.λπ. συμβολίζονται οι αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{A'\Gamma}$ κ.λπ. Ως θετικές κατευθύνσεις επί των πλευρών θεωρούνται εκείνες των διανυσμάτων $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{AB}$.

απαγωγής. Αν δηλαδή $\Gamma''$ το σημείο τομής των $AB$, $A'B'$ θα ισχύει η σχέση $(B\Gamma A')(\Gamma AB')(AB\Gamma'') = -1$ . Από αυτήν και την (Ι.1′) προκύπτει $(AB\Gamma') = (AB\Gamma'')$ και $\Gamma' \equiv \Gamma''$.

***Ορισμοί:*** Τα σημεία $A'$, $B'$, $\Gamma'$ ονομάζονται **μενελαϊκά** της ευθείας δ. Οι ευθείες $AA'$, $BB'$, $\Gamma\Gamma'$ **μενελαϊκές** της δ, και το τρίγωνο το σχηματιζόμενο από τις μενελαϊκές ευθείες, όταν προεκταθούν, **μενελαϊκό** της δ.

## *2. Γενίκευση στο τετράπλευρο*

**«Αν η ευθεία δ τέμνει τις πλευρές $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_1$ τετραπλεύρου $A_1A_2A_3A_4$ στα σημεία $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ θα είναι**

$$(A_1A_2X_1)(A_2A_3X_2)(A_3A_4X_3)(A_4A_1X_4) = 1 \text{ » .} \qquad \textbf{(I.2)}$$

Αν τεθεί $(A_1A_2X_1) = \lambda$ , $(A_2A_3X_2) = \mu$ , $(A_3A_4X_3) = \nu$ , $(A_4A_1X_4) = \varrho$ η σχέση γράφεται

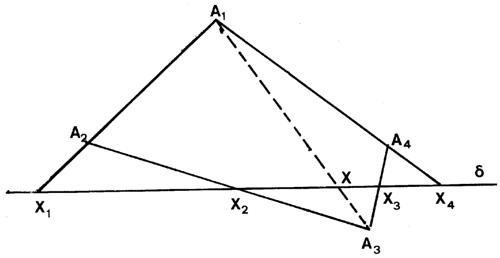
$$\lambda\mu\nu\varrho = 1 \qquad (\text{I}.2') \ .$$

Έστω $X$ η τομή των δ και $A_1A_3$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου εις τα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_3A_4$ με διατέμνουσα τη δ, οπότε είναι:

$$(A_1A_2X_1)(A_2A_3X_2)(A_3A_1X) = -1 \ ,$$

$$(A_1A_3X)(A_3A_4X_3)(A_4A_1X_4) = -1 \ .$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές κατά μέλη και έχοντας υπόψη, ότι $(A_3A_1X)(A_1A_3X) = 1$ (ιδιότητα) γνωστή του μερικού λόγου), προκύπτει η (Ι.2).




*Σχ. 2*

### **ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**α)** Εάν λμ=1 από την (Ι.2′) προκύπτει νϱ=1. Αν δε λν=1 προκύπτει μϱ=1. Συνεπώς:
«**Αν ευθεία τέμνει δύο πλευρές τετραπλεύρου (διαδοχικές ή μη) κατ' αντιστρόφους μερικούς λόγους τότε θα τέμνει και τις άλλες δύο πλευρές επίσης κατ' αντιστρόφους μερικούς λόγους**».

**β)** Εάν λ=μ=1 τότε νϱ=1. Ομοίως αν λ=ν=1 προκύπτει μϱ=1. Επομένως
«**Η ευθεία η οποία ορίζεται από τα μέσα δύο πλευρών τετραπλεύρου (διαδοχικών ή μη) τέμνει τις άλλες δύο κατ' αντιστρόφους μερικούς λόγους**».

**γ)** Έστω λμ=–1. Τότε νϱ=–1. Το ίδιο συμβαίνει όταν λν=–1, τότε μϱ=–1. Δηλαδή
«**Αν ευθεία τέμνει δύο πλευρές τετραπλεύρου κατ' αντιστροφοαντιθέτους μερικούς λόγους, θα τέμνει και τις δύο άλλες πλευρές επίσης κατ' αντιστροφοαντιθέτους μερικούς λόγους**».

**δ)** Αν λ=1 και μ=–1 προκύπτει νϱ=1. Επίσης αν λ=1, ν=–1 πρκύπτει μϱ=–1. Όθεν
«**Η από το μέσο μιας πλευράς τετραπλεύρου παράλληλος προς μία άλλη πλευρά αυτού τέμνει τις υπόλοιπες δύο πλευρές του κατ' αντιστροφοαντιθέτους μερικούς λόγους**».

**ε)** Αν $Y$ το σημείο τομής των $A_1A_2$, $A_3A_4$ και $X_1 \equiv X_3 \equiv Y$ , η (Ι.2) δίνει τη σχέση

$$(A_2A_3X_2)(A_4A_1X_4) = (A_2A_1Y)(A_4A_3Y) \ .$$

«**Κάθε ευθεία διερχομένη από το σημείο τομής δύο απέναντι πλευρών τετραπλεύρου, διαιρεί τις άλλες δύο πλευρές του κατά μερικούς λόγους, των οποίων το γινόμενο είναι σταθερό**».

Αν δε Z είναι το σημείο τομής των δύο άλλων πλευρών $A_2A_3$, $A_4A_1$ και είναι $X_2 \equiv X_4 \equiv Z$ η (I.2) δίνει:

$$\frac{\overline{YA_1}\cdot\overline{YA_3}}{\overline{YA_2}\cdot\overline{YA_4}} = \frac{\overline{ZA_1}\cdot\overline{ZA_3}}{\overline{ZA_2}\cdot\overline{ZA_4}} \quad .$$

## 3. *Γενίκευση στο ν-πλευρο*

«**Αν η ευθεία δ τέμνει τις πλευρές $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_\nu A_1$ του ν-πλεύρου $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ αντιστοίχως στα σημεία $X_1$, $X_2$, ..., $X_\nu$ τότε το γινόμενο των μερικών λόγων των πλευρών ισούται προς $(-1)^\nu$ ήτοι:**

$$(A_1A_2X_1)\,(A_2A_3X_2)\ \ldots\ (A_\nu A_1X_\nu) = (-1)^\nu \text{ »} . \qquad \textbf{(I.3)}$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και γίνεται με την επαγωγική μέθοδο. Φέρουμε τη διαγώνιο $A_1A_\nu$. Υποθέτοντας ότι το θεώρημα ισχύει δια ν, έχουμε

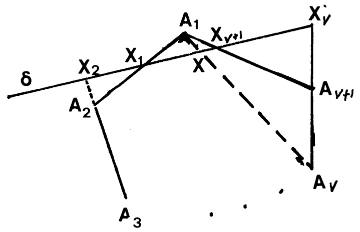
$$(A_1A_2X_1)\,(A_2A_3X_2)\ \ldots\ (A_\nu A_1X) = (-1)^\nu \ .$$

Από το τρίγωνο $A_1A_\nu A_{\nu+1}$ με διατέμνουσα τη δ, έχουμε

$$(A_1A_\nu X)\,(A_\nu A_{\nu+1}X_\nu)\ (A_{\nu+1}A_1X_{\nu+1}) = -1 \ .$$

Δια πολλαπλασιασμού των δύο αυτών σχέσεων και έχοντας υπόψη ότι $(A_\nu A_1X)\,(A_1A_\nu X) = 1$ , προκύπτει

$$(A_1A_2X_1)\,(A_2A_3X_2)\ \ldots\ (A_{\nu+1}A_1X_{\nu+1}) = (-1)^{\nu+1} \ .$$




*Σχ. 3*

Επειδή το θεώρημα ισχύει δια ν=3, ν=4 έπεται ότι ισχύει δια κάθε ν≥3 .

***Παρατήρηση:***

Το θεώρημα ισχύει ανεξάρτητα από το γεγονός, αν το ν-πλευρο είναι κυρτό ή μη.

## 4. *Γενίκευση στο χώρο*

«**Αν επίπεδο Π τέμνει τις πλευρές $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_1$ στρεβλού τετραπλεύρου $A_1A_2A_3A_4$ στα σημεία $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ αντιστοίχως τότε θα είναι:**

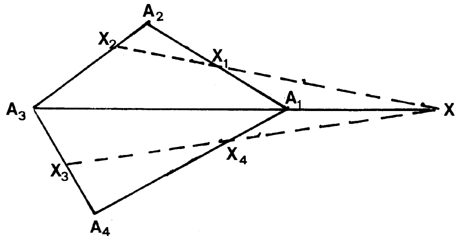
$$(A_1A_2X_1)\,(A_2A_3X_2)\,(A_3A_4X_3)\,(A_4A_1X_4) = 1 \quad \text{ή} \quad \lambda\mu\nu\varrho = 1 \text{ »} . \qquad \textbf{(I.4)}$$

Αν X το σημείο τομής του Π με την $A_1A_3$, οι $X_1X_2$ και $X_3X_4$ διέρχονται από το X.

Από τα τρίγωνα $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$ και με διατέμνουσες τις $XX_1X_2$, $XX_3X_4$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$(A_1A_2X_1)\,(A_2A_3X_2)\,(A_3A_1X) = -1 \ ,$$

$$(A_3A_4X_3)\,(A_4A_1X_4)\,(A_1A_3X) = -1 \ .$$




*Σχ. 4*

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει η (Ι.4) .

Η απόδειξη δια στρεβλό ν-πλευρο γίνεται όπως και στην §3.

***Παρατήρηση:***

Εύκολα αποδεικνύεται και το αντίστροφο του θεωρήματος δια το στρεβλό τετράπλευρο. Αν δηλαδή ισχύει η (Ι.4) τότε τα σημεία $X_1, X_2, X_3, X_4$ είναι συνεπίπεδα.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**α)** Εάν $\lambda=1, \mu=\nu=-1$ τότε $\rho=1$. Ομοίως αν $\lambda=1, \mu=\rho=-1$ τότε $\nu=1$. Επομένως:

«**Το επίπεδο το οποίο φέρουμε από το μέσο μιας πλευράς, παραλλήλως προς δύο άλλες πλευρές στρεβλού τετραπλεύρου, διέρχεται από το μέσο της τετάρτης πλευράς του**».

**β)** Αν $X_1', X_2', X_3', X_4'$ τα συζυγή αρμονικά των $X_1, X_2, X_3, X_4$ αντιστοίχως προς τα $(A_1, A_2), \ldots, (A_4, A_1)$ και $(A_1A_2X'_1) = \lambda', \ldots$ θα είναι $\lambda'=-\lambda, \ldots, \rho'=-\rho$ και άρα $\lambda'\mu'\nu'\rho' = 1$. Επίσης είναι και $\lambda\mu\nu'\rho' = 1$, $\lambda\mu'\nu\rho' = 1$ . Επομένως

«**Αν επίπεδο τέμνει τις πλευρές στρεβλού τετραπλεύρου στα σημεία $X_1, X_2, X_3, X_4$, τα συζυγή αρμονικά αυτών $X_1', X_2', X_3', X_4'$ είναι συνεπίπεδα. Επίσης δύο από τα σημεία της τετράδας $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ με τα δύο μη αντίστοιχα σημεία της τετράδας $(X_1', X_2', X_3', X_4')$ είναι συνεπίπεδα**».

**γ)** Ένα επίπεδο Ρ διερχόμενο από τα σημεία $X_1, X_2$ τέμνει τις πλευρές $A_3A_4, A_4A_1$ στα σημεία $X_3'', X_4''$ . Άλλο επίπεδο Σ διερχόμενο από τα σημεία $X_3, X_4$ τέμνει τις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3$ στα σημεία $X_1'', X_2''$ . Αν τεθεί $(A_1A_2X_1'') = \lambda''$ κ.λπ. Θα έχουμε τις σχέσεις: $\lambda\mu\nu''\rho'' = 1$ και $\lambda''\mu''\nu\rho = 1$, από τις οποίες προκύπτει η $\lambda\mu\nu\rho\cdot\lambda''\mu''\nu''\rho'' = 1$ . Και επειδή $\lambda\mu\nu\rho = 1$, θα είναι και $\lambda''\mu''\nu''\rho'' = 1$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν το Ρ διέρχεται από τα σημεία $X_1, X_3$ και το Σ από τα $X_2, X_4$. Δηλαδή έχουμε την πρόταση:

«**Ένα επίπεδο Π τέμνει τις πλευρές του στρεβλού τετραπλεύρου $A_1A_2A_3A_4$ στα σημεία $X_1, X_2, X_3, X_4$ . Έστω $(\zeta, \eta, \theta, \xi)$ μία μετάθεση των δεικτών 1, 2, 3, 4 . Αν επίπεδο Ρ διερχόμενο από τα $X_\zeta, X_\eta$ τέμνει τις δύο άλλες πλευρές του τετραπλεύρου στα $X_\theta'', X_\xi''$ και επίπεδο Σ διερχόμενο από τα $X_\theta, X_\xi$ τέμνει τις δύο άλλες πλευρές του τετραπλεύρου στα $X_\zeta'', X_\eta''$ τότε τα σημεία $X_\zeta'', X_\eta''$, $X_\theta'', X_\xi''$ είναι συνεπίπεδα**».

Υποθέτοντας μερικά από τα $X_1, X_2, X_3, X_4$ ως μέσα ή επάπειρο σημεία των πλευρών επί των οποίων κείνται, προκύπτουν πολλές προτάσεις δια το στρεβλό τετράπλευρο οι οποίες δεν κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν εδώ.

## ΙΙ. Θεώρημα του Géva

**1.** «**Α′, Β′, Γ′ είναι τρία σημεία κείμενα αντιστοίχως επί των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ να συγκλίνουν στο αυτό σημείο είναι:**

$$(\mathrm{B\Gamma A'})(\mathrm{\Gamma AB'})(\mathrm{AB\Gamma'}) = 1 \text{ ».} \qquad \text{(II.1)}$$

Αν, ως συνήθως, τεθεί $(\text{ΒΓΑ}')=\lambda$ , $(\text{ΓΑΒ}')=\mu$ , $(\text{ΑΒΓ}') = \nu$ η (ΙΙ. 1) γράφεται

$$\lambda\mu\nu = 1 \quad (\text{ΙΙ}.1') \; .$$

Η σχέση είναι αναγκαία. Πράγματι· είναι

$$\lambda = (\text{ΒΓΑ}') = \frac{\overline{\text{ΒΑ}'}}{\overline{\text{Α}'\text{Γ}}} = \frac{\overline{\text{ΒΑ}'}\cdot\overline{\text{ΑΑ}''}}{\overline{\text{Α}'\text{Γ}}\cdot\overline{\text{ΑΑ}''}} = \frac{(\overline{\text{ΑΒΑ}'})}{(\overline{\text{ΑΑ}'\text{Γ}})} \; ,$$

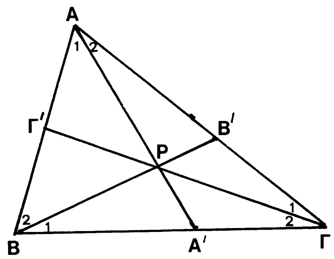
όπου ΑΑ″ το ύψος του τριγώνου από το Α στην ΒΓ και $(\overline{\text{ΑΒΑ}'})$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΑ′ με πρόσημο θετικό αν έχει φορά εκείνη του ΑΒΓ και αρνητικό αν έχει φορά αντίθετη. Ακόμη επειδή

$$\frac{(\overline{\text{ΑΒΑ}'})}{(\overline{\text{ΑΑ}'\text{Γ}})} = \frac{(\overline{\text{ΒΡΑ}'})}{(\overline{\text{ΡΑ}'\text{Γ}})} = \frac{(\overline{\text{ΑΒΑ}'})-(\overline{\text{ΒΡΑ}'})}{(\overline{\text{ΑΑ}'\text{Γ}})-(\overline{\text{ΡΑ}'\text{Γ}})} = \frac{(\overline{\text{ΑΒΡ}})}{(\overline{\text{ΓΑΡ}})}$$

η σχέση γράφεται:

$$\lambda = \frac{(\overline{\text{ΑΒΡ}})}{(\overline{\text{ΓΑΡ}})} \; .$$

Ομοίως είναι και $\mu = \dfrac{(\overline{\text{ΒΓΡ}})}{(\overline{\text{ΑΒΡ}})}$ , $\nu = \dfrac{(\overline{\text{ΓΑΡ}})}{(\overline{\text{ΒΓΡ}})}$ .



*Σχ. 5*

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει $\lambda\mu\nu=1$.

Η σχέση (ΙΙ. 1′) είναι και ικανή. Έστω Ρ το σημείο τομής των ΒΒ′, ΓΓ′ και Α″ το σημείο τομής των ΑΡ και ΒΓ. Θα έχουμε τότε

$$(\text{ΒΓΑ}'')(\text{ΓΑΒ}')(\text{ΑΒΓ}') = 1 \; .$$

Από την τελευταία αυτή σχέση και την (ΙΙ. 1) προκύπτει $(\text{ΒΓΑ}'') = (\text{ΒΓΑ}')$ και άρα $\text{Α}''\equiv\text{Α}'$ .

Το θεώρημα ισχύει και όταν το Ρ είναι επάπειρο σημείο του επιπέδου, οπότε οι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ είναι παράλληλες. Η απόδειξη είναι εύκολη.

## 2. *Τριγωνομετρική μορφή του θεωρήματος του Géva*

Επειδή είναι $(\overline{\text{ΑΒΑ}'}) = \frac{1}{2}\gamma\cdot\text{ΑΑ}'\cdot\eta\mu\text{Α}_1$ , $(\overline{\text{ΑΑ}'\text{Γ}}) = \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\text{ΑΑ}'\cdot\eta\mu\text{Α}_2$, όπου α, β, γ τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ, θα έχουμε $\lambda = \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\eta\mu\text{Α}_1}{\eta\mu\text{Α}_2}$. Αναλόγως $\mu = \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\eta\mu\text{Β}_1}{\eta\mu\text{Β}_2}$ , $\nu = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu\Gamma_2}$ και επομένως η (ΙΙ.1) λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{\eta\mu\text{Α}_1}{\eta\mu\text{Α}_2}\cdot\frac{\eta\mu\text{Β}_1}{\eta\mu\text{Β}_2}\cdot\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu\Gamma_2} = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\text{Α}_1\,\eta\mu\text{Β}_1\,\eta\mu\Gamma_1 = \eta\mu\text{Α}_2\,\eta\mu\text{Β}_2\,\eta\mu\Gamma_2 \quad (\text{ΙΙ}.2) \; .$$

***Ορισμοί:*** Κάθε ευθεία διερχόμενη από μία κορυφή του τριγώνου ονομάζεται **σεβιανή** και ορίζεται από την κορυφή, από την οποία διέρχεται, και από το ίχνος της στην απέναντι πλευρά. Αν Ρ οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου οι ευθείες ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ λέγονται **σεβιανές του σημείου Ρ**. Τα σημεία τομής Α′, Β′, Γ′ των ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ αντιστοίχως με τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ λέγονται **σεβιανά του Ρ**, και το τρίγωνο Α′Β′Γ′ **σεβιανό του Ρ**.

Η (ΙΙ.1) γράφεται και ως εξής:

$$(\overline{\mathrm{BA'}})(\overline{\Gamma\mathrm{B'}})(\overline{\mathrm{A}\Gamma'}) = (\overline{\mathrm{A'}\Gamma})(\overline{\mathrm{B'A}})(\overline{\Gamma'\mathrm{B}}) \qquad (\mathrm{II}.2')\ .$$

Δηλαδή «το γινόμενο τριων ευθυγράμμων τμημάτων μη διαδοχικών, είναι ίσο με το γινόμενο των άλλων τριων", και είναι μία διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**α)** Αν $\mathrm{A'}, \mathrm{B'}, \Gamma'$ είναι τα ίχνη των διαμέσων τότε $\lambda=\mu=\nu=1$ και η (ΙΙ.1′) επαληθεύεται. Επομένως:

«**Οι διάμεσοι τριγώνου συγκλίνουν στο αυτό σημείο Μ, βαρύκεντρο του τριγώνου».**

**β)** Αν $\mathrm{A'}, \mathrm{B'}, \Gamma'$ τα ίχνη των διχοτόμων, θα είναι, ως γνωστό, $\lambda = \dfrac{\overline{\mathrm{BA'}}}{\overline{\mathrm{A'}\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$, $\mu = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\nu = \dfrac{\beta}{\alpha}$

οπότε $\lambda\mu\nu=1$. Επομένως «**Οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών τριγώνου συγκλίνουν στο αυτό σημείο Ι**», **έγκεντρο** του τριγώνου.

**γ)** Αν $\mathrm{A'}, \mathrm{B'}, \Gamma'$ είναι τα ίχνη των υψών, θα είναι $\lambda = \dfrac{\overline{\mathrm{BA'}}}{\overline{\mathrm{A'}\Gamma}} = \dfrac{(\mathrm{AA'})\sigma\varphi\mathrm{B}}{(\mathrm{AA'})\sigma\varphi\Gamma} = \dfrac{\sigma\varphi\mathrm{B}}{\sigma\varphi\Gamma}$ .

Αναλόγως και $\mu = \dfrac{\sigma\varphi\Gamma}{\sigma\varphi\mathrm{A}}$, $\nu = \dfrac{\sigma\varphi\mathrm{A}}{\sigma\varphi\mathrm{B}}$, οπότε $\lambda\mu\nu=1$. Επομένως «**Τα ύψη κάθε τριγώνου συγκλίνουν στο αυτό σημείο Η», ορθόκεντρο** του τριγώνου.

## ΙΙΙ. Το Θεώρημα του Désarques

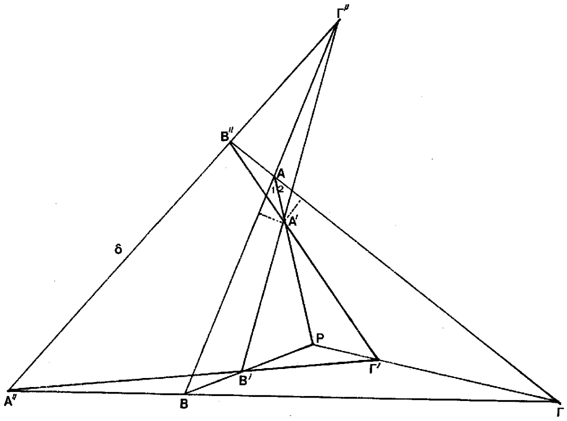
«**Οι αντίστοιχες πλευρές δύο προοπτικών τριγώνων τέμνονται σε σημεία ομοευθειακά».**

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, $\mathrm{A'B'}\Gamma'$ λέγονται προοπτικά αν οι ευθείες $\mathrm{AA'}$, $\mathrm{BB'}$, $\Gamma\Gamma'$, οι οριζόμενες από τις ομόλογες κορυφές τους συγκλίνουν σε σημείο Ρ.

Αν $\mathrm{A''}, \mathrm{B''}, \Gamma''$ είναι τα σημεία τομής των ευθειών των ζευγών $(\mathrm{B}\Gamma, \mathrm{B'}\Gamma')$, $(\Gamma\mathrm{A}, \Gamma'\mathrm{A'})$, $(\mathrm{AB}, \mathrm{A'B'})$, και με (Ρ, ε) συμβολίσουμε την απόσταση του σημείου Ρ από την ευθεία ε, θα έχουμε

$$\frac{\overline{\mathrm{A''B'}}}{\overline{\mathrm{A''}\Gamma'}} = \frac{(\mathrm{B'}, \mathrm{B}\Gamma)}{(\Gamma', \mathrm{B}\Gamma)}$$

$$\text{ή} \quad (\mathrm{B'}\Gamma'\mathrm{A''}) = -\frac{(\mathrm{B'}, \mathrm{B}\Gamma)}{(\Gamma', \mathrm{B}\Gamma)}\ .$$



*Σχ. 6*

Αναλόγως $\quad (\Gamma'\mathrm{A'B''}) = -\dfrac{(\Gamma', \Gamma\mathrm{A})}{(\mathrm{A'}, \Gamma\mathrm{A})}\ , \quad (\mathrm{A'B'}\Gamma'') = -\dfrac{(\mathrm{A'}, \mathrm{AB})}{(\mathrm{B'}, \mathrm{AB})}\ .$

Επομένως: $$(B'\Gamma'A'')\,(\Gamma'A'B'')\,(A'B'\Gamma'') = -\frac{(A',AB)}{(A',\Gamma A)}\cdot\frac{(B',B\Gamma)}{(B',AB)}\cdot\frac{(\Gamma',\Gamma A)}{(\Gamma',B\Gamma)}\,.$$

Είναι όμως: $$\frac{(A',AB)}{(A',\Gamma A)} = \frac{AA'\cdot\eta\mu A_1}{AA'\cdot\eta\mu A_2}\,,\quad \frac{(B',B\Gamma)}{(B',AB)} = \frac{BB'\cdot\eta\mu B_1}{BB'\cdot\eta\mu B_2}\,,\quad \frac{(\Gamma',\Gamma A)}{(\Gamma',B\Gamma)} = \frac{\Gamma\Gamma'\eta\mu\Gamma_1}{\Gamma\Gamma'\eta\mu\Gamma_2}\,.$$

Έχοντας υπόψη τη σχέση (ΙΙ.2), προκύπτει:

$$(B'\Gamma'A'')\,(\Gamma'A'B'')\,(A'B'\Gamma'') = -1$$

η οποία αποδεικνύει, κατά το θεώρημα του Μενελάου, εφαρμοζόμενο στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, ότι τα σημεία $A''$, $B''$, $\Gamma''$ είναι ομοευθειακά.

***Αντιστρόφως.*** **«Αν οι ομόλογες πλευρές δύο τριγώνων τέμνονται σε σημεία ομοευθειακά τα τρίγωνα είναι προοπτικά».**

Έχοντας, από τα προηγούμενα, υπόψη ότι:

$$(B'\Gamma'A'')\,(\Gamma'A'B'')\,(A'B'\Gamma'') = -\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2}\cdot\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2}\cdot\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu\Gamma_2}$$

συμπεραίνουμε ότι: αν τα $A''$, $B''$, $\Gamma''$ είναι ομοευθειακά, θα είναι

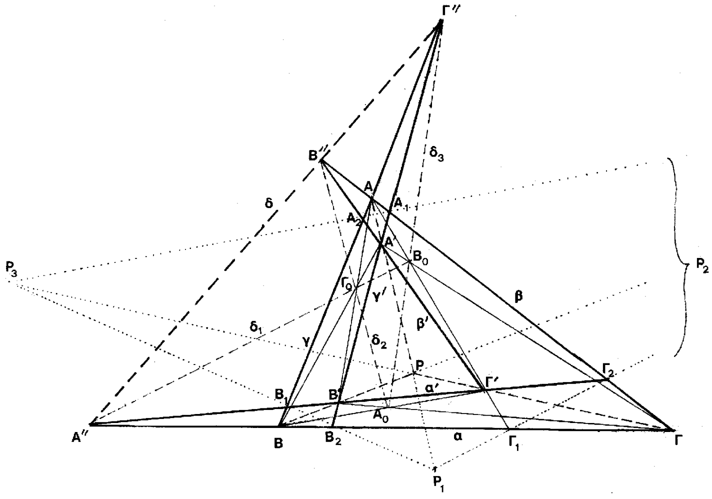
$$(B'\Gamma'A'')\,(\Gamma'A'B'')\,(A'B'\Gamma'') = -1 \text{ και άρα } \frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2}\cdot\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2}\cdot\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu\Gamma_2} = 1$$

δηλαδή τα τρίγωνα είναι προοπτικά.

***Ορισμοί:*** Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι τέτοια ώστε οι $AA'$, $BB'$, $\Gamma\Gamma'$ να συγκλίνουν στο σημείο $P$, τότε τα τρίγωνα αυτά λέγονται **ομολογικά** (ή και προοπτικά). Το $P$ λέγεται ***ομολογικό κέντρο*** και η ευθεία **δ** ***ομολογικός άξονας***.

### *Παρατηρήσεις:*

**1η** Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι ομολογικά οι ευθείες $AA'$, $BB'$, $\Gamma\Gamma'$ συγκλίνουν στο $P$. Κατά το θεώρημα του Désarques επειδή οι ευθείες $A'A$, $BB'$, $\Gamma\Gamma'$ συγκλίνουν στο $P$, οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων $A'B\Gamma$, $AB'\Gamma'$ θα τέ μνονται σε σημεία $A''$, $B_0$, $\Gamma_0$ επίσης ομοευθειακά κείμενα επί της $\delta_1$. Ομοίως σκεπτόμενοι συμπεραίνουμε ότι και τα ζεύγη των τριγώνων $(AB'\Gamma, A'B\Gamma')$, $(AB\Gamma', A'B'\Gamma)$ είναι ομολογικά και τα σημεία τομής των ομολόγων πλευρών αντιστοίχως $A_0$, $B''$, $\Gamma_0$ και $A_0$, $B_0$, $\Gamma''$ είναι επίσης ομοευθειακά ορίζοντα τις ευθείες $\delta_2 \equiv A_0B''\Gamma_0$, $\delta_3 \equiv A_0B_0\Gamma''$.




*Σχ. 6α*

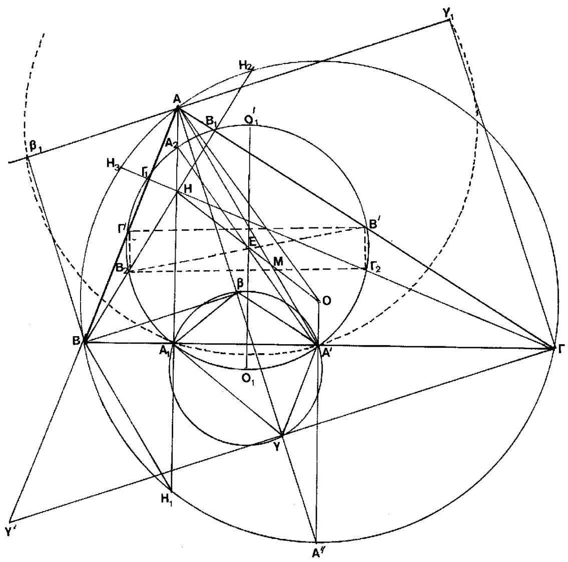
**2η** Εάν τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ θεωρηθούν ως τρίπλευρα αβγ, α′β′γ′, όπου α≡ΒΓ, α′≡Β′Γ′ , … και είναι ομολογικά, τα σημεία τομής των ομολόγων πλευρών (α, α′)≡Α″, (β, β′)≡Β″ , (γ, γ′)≡Γ″ κείνται στην αυτή ευθεία δ. Επειδή εάν θεωρηθούν τα (α′, α)≡Α″, (β, β′)≡Β″, (γ, γ′)≡Γ″ που είναι τα ίδια, κατά το αντίστροφο του θεωρήματος έπεται ότι και τα τρίπλευρα α′βγ, αβ′γ′ είναι ομολογικά. Αν τεθεί: (β, γ′)≡$Α_1$, (γ, α′)≡$Β_1$, (α, β′)≡$Γ_1$, (β′, γ)≡$Α_2$, (γ′, α)≡$Β_2$, (α′, β)≡$Γ_2$, θα έχουμε ως αποτέλεσμα ότι οι ευθείες ΑΑ′, $Β_1Β_2$, $Γ_2Γ_1$ συγκλίνουν στο σημείο $P_1$. Αναλόγως προκύπτει ότι και τα ζεύγη των τριπλεύρων (αβ′γ, α′βγ′), (αβγ′, α′β′γ) είναι ομολογικά και οι ευθείες των τριάδων, ΒΒ′, $Γ_1Γ_2$, $Α_2Α_1$ και ΓΓ′, $Α_1Α_2$, $Β_2Β_1$ συγκλίνουν αντιστοίχως στα σημεία $P_2$ και $P_3$.

Επομένως από ένα ζεύγος ομολογικών τριγώνων ΑΒΓ≡αβγ, Α′Β′Γ′≡α′β′γ′ με ομολογικό κέντρο το P και ομολογικό άξονα τη δ προκύπτουν άλλα έξι ζεύγη ομολογικών τριγώνων. Τα (Α′ΒΓ, ΑΒ′Γ′), (ΑΒ′Γ, Α′ΒΓ′), (ΑΒΓ′, Α′Β′Γ) με κοινό ομολογικό κέντρο το P και ομολογικούς άξονες $δ_1$, $δ_2$, $δ_3$. Και τα (α′βγ, αβ′γ′), (αβ′γ, α′βγ′), (αβγ′, α′β′γ) με κοινό ομολογικό άξονα την δ και ομολογικά κέντρα $P_1$, $P_2$, $P_3$ .

Εάν στο καθένα από τα έξι αυτά ζεύγη ομολογικών τριγώνων εφαρμοσθούν οι διαδικασίες των 1 και 2 παρατηρήσεων θα προκύψουν άλλα $6{\cdot}6 = 6^2$ νέα ζεύγη ομολογικών τριγώνων κ.ο.κ.

## IV. Ευθεία και κύκλος του Euler

**1. «Τα μέσα Α′, Β′, Γ′ των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, τα ίχνη $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ των υψών του και τα μέσα $Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$ των ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία συνδέουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές, κείνται επί του αυτού κύκλου».**




*Σχ. 7*

Οι $Β′Γ_2$, $Γ′Β_2$ είναι παράλληλες προς την ΑΗ και ίσες προς το ήμισυ αυτής. Επομένως είναι και μεταξύ τους παράλληλες και ίσες. Ομοίως οι Β′Γ′, $Β_2Γ_2$ είναι παράλληλες προς την ΒΓ και ίσες προς το ήμισυ αυτής. Είναι άρα και μεταξύ τους ίσες και παράλληλες.

Επειδή η $\widehat{Β′Γ_2Β_2} = 1$ ορθή, το $Β′Γ′Β_2Γ_2$ είναι ορθογώνιο και τα σημεία Β′, Γ′, $Β_2$, $Γ_2$ κείνται επί του κύκλου διαμέτρου $Β′Β_2$. Ομοίως και το $Α′Β′Α_2Β_2$ είναι ορθογώνιο και τα Α′, Β′, $Α_2$, $Β_2$ κείνται επί του κύκλου διαμέτρου $Β′Β_2$, η οποία από το $Β_1$ φαίνεται υπ’ ορθή γωνία. Ομοίως και οι $Γ′Γ_2$, $Α′Α_2$ φαίνονται από τα $Γ_1$, $Α_1$ υπ’ ορθή γωνία. Τα εννέα λοιπόν σημεία Α′, Β′, Γ′, $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, $Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$ κείνται επί του αυτού κύκλου, ο οποίος λέγεται **κύκλος του Euler**. Επίσης λέγεται και **κύκλος των εννέα σημείων** ή και **διάμεσος κύκλος** (ως περιγεγραμμένος του **διαμέσου** τριγώνου Α′Β′Γ′). Τα $Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$ λέγονται **σημεία του Euler**.

**2. «Κάθε σημείο του Euler είναι αντιδιαμετρικό με το μέσο της αντίστοιχης πλευράς».**

**3. «Το κέντρο Ε του διαμέσου κύκλου είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΗ».**

Πράγματι, οι μεσοκάθετες στις χορδές $A'A_1$, $B'B_1$, $\Gamma'\Gamma_1$, διέρχονται από το μέσο της ΟΗ.

**4. «Η απόσταση του Ο από μία πλευρά του τριγώνου (μήκος μεσοκαθέτων), ισούται με το ήμισυ της απόστασης του ορθοκέντρου από την αντίστοιχη κορυφή».**

Επειδή η $A_2A'$ είναι διάμετρος και Ε μέσο της ΟΗ προκύπτει $OA' = A_2H = \frac{1}{2}AH$ .

**5. «Το βαρύκεντρο Μ κείται επί της ΟΗ και είναι ΗΜ=2ΜΟ».**

Επειδή οι $AH$, $OA'$ είναι παράλληλες, τα τρίγωνα $MAH$, $MA'O$ είναι όμοια, ο δε λόγος ομοιότητας είναι ίσος με $HA : OA' = 2$. Συνεπώς και ΗΜ=2ΜΟ. **Η ΟΜΕΗ λέγεται ευθεία του Euler**. Τα σημεία **Ο, Ε, Μ, Η αποτελούν αρμονική τετράδα** διότι

$$(OEMH) = \frac{\overline{OM}}{\overline{ME}} : \frac{\overline{OH}}{\overline{HE}} = 2 : (-2) = -1 .$$

**6. «Η ακτίνα του διαμέσου κύκλου είναι ίση με το ήμισυ της ακτίνας του περιγεγραμμένου».**

Επειδή τα ευθύγραμμα τμήματα $AA_2$, $OA'$ είναι ίσα και παράλληλα, το $AA_2A'O$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως $A'A_2=OA$ δηλαδή $r = \frac{R}{2}$ .

**7. «Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τις πλευρές κείνται επί του περιγεγραμμένου κύκλου».**

Αρκεί να παρατηρηθεί ότι $\widehat{B_1B\Gamma} = \frac{\pi}{2} - \Gamma = \widehat{\Gamma AA_1} = \widehat{\Gamma BH_1}$ , οπότε η $BA_1$ στο τρίγωνο $BHH_1$ είναι ύψος και διχοτόμος. Άρα είναι και διάμεσος.

**8. «Οι κύκλοι ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ είναι ίσοι με τον περιγεγραμμένο».**

Η γωνία $\widehat{BH\Gamma} = \pi - A$. Επομένως η διάμετρος $2R_1$ του περιγεγραμμένου του ΗΒΓ θα είναι

$$2R_1 = \frac{\alpha}{\eta\mu(\widehat{BH\Gamma})} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R .$$

**9. «Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ έχουν τον ίδιο διάμεσο κύκλο».** (Θεώρημα Hamilton).

Επειδή ο διάμεσος κύκλος του ΑΒΓ διέρχεται από τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ (σημεία του Euler).

**10. «Τα σημεία Α, Β, Γ, Η έχουν την αξιόλογη ιδιότητα ότι, το καθένα τους είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου το οποίο σχηματίζουν τα τρία άλλα».** Δι' αυτό τέσσερα τέτοια σημεία λέμε ότι αποτελούν **ορθοκεντρική τετράδα**.

**11. «Τα σημεία Η, Μ είναι τα κέντρα ομοιότητας του περιγεγραμμένου κύκλου (Ο, R) και του διαμέσου κύκλου».**

Διότι είναι $\overline{HO} : \overline{HE} = R : R' = 2$ και $\overline{MO} : \overline{ME} = -R : R' = -2$ .

**12. «Η ευθεία η οποία συνδέει ένα σημείο Euler με το μέσο μιας πλευράς μη αντίστοιχης, είναι ίση και παράλληλη με την απόσταση του περικέντρου από την άλλη μη αντίστοιχη πλευρά».**

Δηλαδή $\Gamma_2 B' = A'O$. Διότι η $\Gamma_2 B' = \frac{1}{2} HA$ (Βλ. και Νο 4).

**13. «Ο διάμεσος κύκλος τέμνει τις πλευρές του τριγώνου κατά γωνίες ίσες με $B-\Gamma$, $\Gamma-A$, $A-B$».**

Η γωνία τομής με την $B\Gamma$ είναι η εγγεγραμμένη στο τόξο $A_1A'$ δηλαδή

$$A_1\widehat{B'}A' = A_1\widehat{B'}\Gamma - A'\widehat{B'}\Gamma = 2\left(\frac{\pi}{2}-\Gamma\right)-A = \pi-2\Gamma-A = B-\Gamma .$$

**14. «Η εφαπτομένη του διαμέσου κύκλου στο μέσο μιας πλευράς του τριγώνου είναι αντιπαράλληλος της πλευράς αυτής ως προς τις άλλες δύο».**

***Ορισμός:*** Δύο ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$ λέγονται **αντιπαράλληλες μεταξύ τους ως προς δύο ευθείες** $\delta, \delta'$ αν το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι τέσσερες ευθείες $\delta, \delta', \varepsilon, \varepsilon'$ είναι εγγράψιμο. Συνεπώς και κάθε ευθεία $\varepsilon''$ παράλληλη προς την $\varepsilon'$, θα είναι αντιπαράλληλη της $\varepsilon'$ ως προς $\delta, \delta'$.

Η ιδιότητα αυτή (§14) προκύπτει από την προηγούμενη (η εφαπτομένη $\perp A'A_2 // OA$ κ.λπ.).

**15. «Η διχοτόμος από το $A$ διχοτομεί την γωνία $A_1\widehat{A}O$, την οποία σχηματίζει το ύψος με την ακτίνα $OA$».**

Είναι $H_1\widehat{A}A'' = A\widehat{A''}O = A''\widehat{A}O$.

**16. «Η γωνία $H\widehat{A}O = B-\Gamma$».**

Διότι $H\widehat{A}O = A-2\cdot B\widehat{A}A_1 = A-2\left(\frac{\pi}{2}-B\right) = A+2B-\pi = B-\Gamma$ .

**17. «Η γωνία $B\widehat{O}\Gamma = 2A$».**

Διότι είναι επίκεντρη και βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμένη $B\widehat{A}\Gamma$ .

**18. «Η ακτίνα $EA'$ είναι κάθετος στην κατεύθυνση την αντιπαράλληλο προς τη $B\Gamma$».**

Διότι η $OA'$ είναι κάθετος στην εφαπτομένη στο $A'$ (Βλ. Νο 14).

**19. «Οι προβολές $\beta, \gamma$ των κορυφών $B, \Gamma$ επί της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $A$, το μέσο $A'$ της $B\Gamma$ και το ίχνος $A_1$ του ύψους $AA_1$ είναι σημεία ομοκυκλικά. Το κέντρο αυτού του κύκλου $O_1$ είναι το μέσο του τόξου $A_1A'$ του διαμέσου κύκλου».**

Τα τετράπλευρα $ABA_1\beta$, $A\Gamma A_1\gamma$ είναι εγγράψιμα και συνεπώς $\beta\widehat{A_1}A' = \gamma\widehat{A_1}A' = \frac{A}{2}$ . Αν $\gamma'$ η τομή των $AB$, $\Gamma\gamma$, το $\gamma$ θα είναι μέσο της $\gamma'\Gamma$ και η $\gamma A'$ παράλληλος προς την $AB$. Επομένως $\beta\widehat{\gamma}A' = \frac{A}{2}$ . Το τετράπλευρο λοιπόν $A'\beta A_1\gamma$ είναι εγγράψιμο και το τρίγωνο $A'\beta\gamma$ είναι ισοσκελές. Η γωνία $A_1\widehat{\beta}A' = A_1\widehat{\beta}\gamma + \gamma\widehat{\beta}A' = B+\frac{A}{2}$ , οπότε η $A_1\widehat{\gamma}A' = \pi-\left(B+\frac{A}{2}\right) = \frac{A}{2}+\Gamma$ . Η επίκεντρος $A_1\widehat{O_1}A' = 2\left(\frac{A}{2}+\Gamma\right) = A+2\Gamma$ .

Επειδή η $\widehat{A_1B'A'} = B-\Gamma$ (Νο 13) θα είναι $\widehat{A_1OA'}+\widehat{A_1B'A'} = A+2\Gamma+B-\Gamma = \pi$ και το $O_1$ κείται επί του διαμέσου κύκλου. Τέλος από την $O_1A_1 = O_1A'$ προκύπτει ότι το $O_1$ κείται επί της μεσοκαθέτου $EO_1$ στην $A_1A'$ και άρα το $O_1$ είναι το μέσο του τόξου $A_1A_1'$.

**20. «Οι προβολές $\beta_1, \gamma_1$ των κορυφών Β, Γ επί της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α, το μέσο $A'$ της ΒΓ και το ίχνος $A_1$ του ύψους $AA_1$ είναι σημεία ομοκυκλικά. Το κέντρο $O_1'$ αυτού του κύκλου είναι το αντιδιαμετρικό του $O_1$ ως προς τον διάμεσο κύκλο».**

Η απόδειξη ανάλογη με την προηγούμενη.

Υπάρχουν επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ τρεις κύκλοι όπως ο $(O_1)$ και άλλοι τρεις όπως ο $(O_1')$· συνολικά έξι κύκλοι έχουν τα κέντρα τους επί του διαμέσου κύκλου.

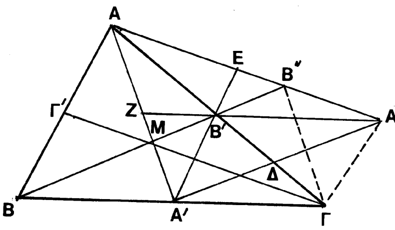
Αν λάβουμε υπόψη ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ, έχουν τον αυτό διάμεσο κύκλο, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν συνολικά είκοσι τέσσερες κύκλοι, αμέσως κατασκευαζόμενοι, οι οποίοι έχουν τα κέντρα τους επί του διαμέσου κύκλου.

**21. «Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OH}$».**

Είναι $2\overline{OA'} = \overline{AH} \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$. Άρα … .

**22. Διαμεσικό τρίγωνο.** Έτσι ονομάζεται το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ το οποίο έχει μήκη πλευρών ίσα προς τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου αναφοράς ΑΒΓ.

**«Το διαμεσικό τρίγωνο του $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο αναφοράς ΑΒΓ, ο δε λόγος ομοιότητας είναι ίσος με $\frac{3}{4}$».**




*Σχ. 8*

Προεκτείνοντας την ΜΒ′, κατά μήκος Β′Β″=ΜΒ′, προκύπτει το τρίγωνο ΑΜΒ″ δια το οποίο $AM = \frac{2}{3}AA'$, $MB'' = \frac{2}{3}BB''$ και $AB'' = \Gamma M = \frac{2}{3}\Gamma\Gamma'$. Το ομοιόθετο του ΑΜΒ″ στην ομοιοθεσία $\left(A, \frac{3}{2}\right)$ είναι το ΑΑ′Α″ με μήκη πλευρών ΑΑ′, Α′Α″=ΒΒ″, Α″Α=ΓΓ′ και άρα είναι το διαμεσικό του ΑΒΓ. Επειδή Α′Α″//ΜΒ″, θα είναι Α′Δ=ΔΑ″ και Β′Δ=ΔΓ. Επομένως η ΑΔ είναι διάμεσος του ΑΑ′Α″ και $AB' = \frac{2}{3}A\Delta$, δηλαδή το Β′ είναι το βαρύκεντρο του ΑΑ′Α″. Από τις $AB' = B'\Gamma$, $B'\Delta = \Delta\Gamma$ προκύπτει $A\Delta = \frac{3}{4}A\Gamma$. Είναι ακόμη:

$$A'E = \frac{3}{2}A'B' = \frac{3}{2}\cdot\frac{AB}{2} = \frac{3}{4}AB \quad \text{και} \quad A''Z = \frac{3}{2}A''B' = \frac{3}{2}A'\Gamma = \frac{3}{2}\cdot\frac{B\Gamma}{2} = \frac{3}{4}B\Gamma$$

διότι από το παραλληλόγραμμο Α′ΓΑ″Β (ΔΒ′=ΔΓ, Α′Δ=ΔΑ″) έχουμε Α″Β′=ΓΑ′.

**23. «Οι γωνίες του διαμεσικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των γωνιών των διαμέσων του τριγώνου αναφοράς».**

Τα τρίγωνα ΑΑ′Α″, ΑΜΒ″ είναι όμοια ως ομοιόθετα. Η $\widehat{AMB''} = \pi-\widehat{AMB}$.
Η $\widehat{MAB''} = \widehat{A'M\Gamma} = \pi-\widehat{\Gamma MA}$, οπότε κατ' ανάγκη $\widehat{AA''\Gamma} = \pi-\widehat{BM\Gamma}$.

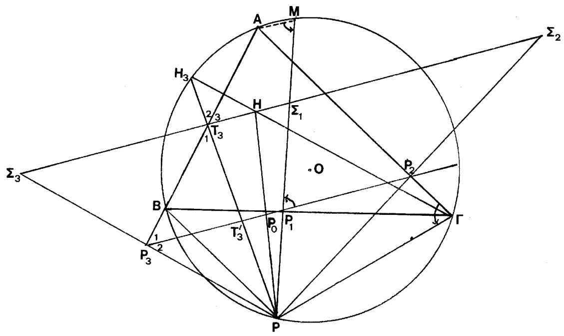
## V. Ευθεία του Simson. Ευθεία του Steiner

**1. ΘΕΩΡΗΜΑ του Simson. «Οι προβολές ενός σημείου P, του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, στις πλευρές του, είναι σημεία ομοευθειακά και αντιστρόφως».**

Αν $P_1, P_2, P_3$ οι προβολές (ορθές) του P στις πλευρές του τριγώνου, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $PP_1BP_3$, $PP_1P_2\Gamma$ έχουμε

$$\widehat{P_3PB} = \widehat{P_3P_1B}\ ,\quad \widehat{P_2P\Gamma} = \widehat{\Gamma P_1P_2}\ .$$

Επειδή οι γωνίες $\widehat{P_3PP_2}$, $\widehat{BP\Gamma}$ είναι ίσες, ως παραπληρωματικές της A, θα είναι $\widehat{P_3PB} = \widehat{P_2P\Gamma}$, και επομένως $\widehat{P_3P_1B} = \widehat{\Gamma P_1P_2}$ , που σημαίνει ότι τα σημεία $P_1, P_2, P_3$ είναι ομοευθειακά.




*Σχ. 9*

**Αντιστρόφως.** Σκεπτόμενοι όπως προηγουμένως θα έχουμε $\widehat{P_3PB} = \widehat{P_3P_1B}$, $\widehat{P_2P\Gamma} = \widehat{\Gamma P_1P_2}$, επειδή $\widehat{P_3P_1B} = \widehat{\Gamma P_1P_2}$ .

Άρα $\widehat{P_3PB} = \widehat{P_2P\Gamma}$ , από την οποία προκύπτει $\widehat{BP\Gamma} = \widehat{P_3PP_2} = \pi - A$, και συνεπώς το τετράπλευρο ABPΓ είναι εγγράψιμο.

Η ευθεία $S(P) \equiv P_1P_2P_3$ **λέγεται ευθεία Simson του P σε σχέση με το τρίγωνο ΑΒΓ.**

**2. «Αν $H_1$, $H_2$, $H_3$ τα δεύτερα σημεία τομής των υψών τριγώνου με τον περιγεγραμμένο κύκλο, οι ευθείες S(P), $PH_3$ είναι ισοκλινείς προς την πλευρά AB».**

Έστω $T_3$ (Σχ. 9) η τομή των $PH_3$, AB. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AP_3PP_2$, έχουμε $\hat{P}_{32} = \widehat{PA\Gamma} = \hat{H}_3$. Επομένως και οι συμπληρωματικές των $\hat{P}_{32}$, $\hat{H}_3$, δηλαδή οι $\hat{P}_{31}$, $\hat{T}_{32} = \hat{T}_{31}$ θα είναι ίσες. Ακόμη, επειδή τα H, $H_3$ είναι συμμετρικά ως προς την AB, θα είναι $\hat{T}_{32} = \hat{T}_{33}$, δηλαδή $\hat{P}_{32} = \hat{T}_{33}$, το οποίο σημαίνει ότι η S(P) είναι παράλληλη προς την $HT_3$.

**3. «Η ευθεία Simson S(P) διαιρεί σε δύο ίσα μέρη την HP».**

Επειδή το τρίγωνο $T_3P_3P$ είναι ορθογώνιο και $\hat{P}_{31} = \hat{T}_{31}$, η $P_3T_3'$ , είναι διάμεσος. Επειδή όμως η $P_3P_1$ είναι παράλληλος προς την $T_3H$ και διχοτομεί την $PT_3$ στο $T_3'$, θα διχοτομεί και την PH στο $P_0$.

**4. «Τα συμμετρικά ενός σημείου P, του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του κείνται επ' ευθείας, η οποία διέρχεται από το ορθόκεντρο H».**

Τα συμμετρικά αυτά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ του P (Σχ. 9) καθώς και τα H, $T_3$ είναι τα ομοιόθετα των $P_1, P_2, P_3, P_0, T_3'$ στην ομοιοθεσία (P, 2). Η ευθεία $T(P) \equiv \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ λέγεται ευθεία του **Steiner**. Διέρχεται δε αυτή και από τα σημεία $T_1, T_2, T_3$.

**5. «Η γωνία δύο ευθειών Simson S(P), S(P′) ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία του περιγεγραμμένου κύκλου, η οποία βαίνει στο τόξο PP′».**

Πράγματι, όπως είδαμε στην ιδιότητα 3, η γωνία $\hat{P}_{31}$ την οποία σχηματίζει η $S(P)$ με την $AB$ είναι $\hat{P}_{31} = \widehat{PH_3\Gamma}$. Ομοίως θα είναι και δια το $P'$, $\hat{P}'_{31} = \widehat{P'H\Gamma}$. Η γωνία των $S(P)$, $S(P')$ ισούται με τη διαφορά $\hat{P}_{31} - \hat{P}'_{31} = \widehat{PH_3\Gamma} - \widehat{P'H_3\Gamma} = \widehat{PH_3P'}$.

**6. «Οι ευθείες Simson $S(P)$, $S(P')$ δύο σημείων $P$, $P'$ αντιδιαμετρικών, είναι κάθετες σε σημείο $\Delta$ του διαμέσου κύκλου».**

Επειδή $\overset{\frown}{PP'} = \pi$, η γωνία των $S(P)$, $S(P')$ είναι ορθή. Επειδή το $H$ είναι εξωτερικό κέντρο ομοιότητας του περιγεγραμμένου κύκλου και του διαμέσου, τα $P_0$, $P'_0$, μέσα των $HP$, $HP'$ θα είναι επίσης αντιδιαμετρικά του διαμέσου κύκλου. Η γωνία λοιπόν $P_0\Delta P'_0$ θα είναι ορθή και το $\Delta$ θα κείται επί του διαμέσου κύκλου.

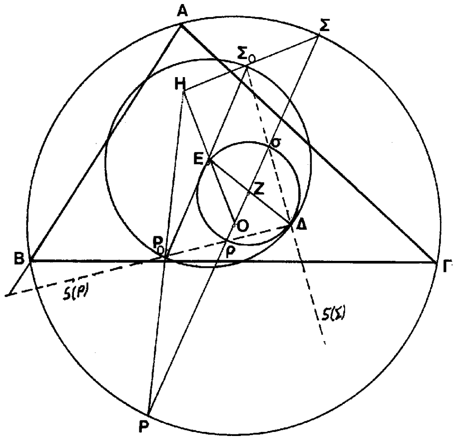
***Παρατηρήση***

Αν το τόξο $\overset{\frown}{PP'} \neq \pi$ η προηγούμενη απόδειξη, ότι δηλαδή το $P_0P'_0$ φαίνεται από το $\Delta$ υπό γωνία $\widehat{P_0\Delta P'_0}$, της οποίας το μέτρο είναι το μισό του τόξου $\overset{\frown}{PP'}$, εξακολουθεί να είναι ισχυρή. Όμως το σημείο $\Delta$ δεν κείται επί του διαμέσου κύκλου, αλλά επί του συμμετρικού του ως προς την $P_0P'_0$. Και τούτο εξαιτίας της διαφορετικής κλίσης των ευθειών Simson.

**7. «Αν $P$, $\Sigma$ σημεία αντιδιαμετρικά και $\rho$, $\sigma$ τα σημεία τομής της διαμέτρου $P\Sigma$ με τις ευθείες Simson $S(P)$, $S(\Sigma)$, ο κύκλος διαμέτρου $\rho\sigma$ εφάπτεται του διαμέσου κύκλου».**

Επειδή η $P\Sigma$ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου, η $P_0\Sigma_0$ θα είναι διάμετρος του διαμέσου κύκλου, δηλαδή το $E$ είναι μέσο της $P_0\Sigma_0$. Η $P_0\Sigma_0 // P\Sigma$ και η $\widehat{P_0\Delta\Sigma_0} = 1$ ορθή.

Επομένως η $\Delta E$ όντας διάμεσος στο $\Delta P_0\Sigma$ θα είναι διάμεσος και στο $\rho\Delta\sigma$. Αν επομένως $Z$ η τομή των $\Delta E$, $\rho\sigma$, ο κύκλος διαμέτρου $\rho\sigma$ έχει κέντρο το $Z$ και εφάπτεται του διαμέσου κύκλου.



*Σχ. 10*

**8. «Να βρεθεί η περιβάλλουσα των ευθειών $\varepsilon$ ώστε οι συμμετρικές αυτής $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_\beta$, $\varepsilon_\gamma$ ως προς τις πλευρές του τριγώνου αναφοράς να συγκλίνουν».**

Αν $P$ το σημείο σύγκλισης τότε τα συμμετρικά των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ ως προς τις πλευρές του τριγώνου θα κείνται επί της ευθείας $\varepsilon$. Επομένως και οι προβολές $P_1$, $P_2$, $P_3$ του $P$ επί των πλευρών του τριγώνου είναι σημεία ομοευθειακά. Άρα το μεν σημείο $P$ κείται επί του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, η δε ευθεία $\varepsilon$ είναι η ευθεία $T(P)$, Steiner του $P$, και διέρχεται από το ορθόκεντρο $H$. Το σύνολο επομένως των ευθειών οι οποίες έχουν την εν λόγω ιδιότητα είναι η επίπεδη δέσμη ευθειών κέντρου $H$. Στο σύνολο αυτό πρέπει να προστεθεί και η επάπειρο ευθεία $\varepsilon_\infty$ του επιπέδου, διότι οι συμμετρικές της συμπίπτουν μ' αυτή. Ο πλήρης τόπος του σημείου σύγκλισης είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος και η $\varepsilon_\infty$.

**9. «Επί του περιγεγραμμένου κύκλου $(O, R)$ τριγώνου $AB\Gamma$ να βρεθεί σημείο $P$ ώστε η ευθεία Simson $S(P)$ να είναι παράλληλος προς ορισμένη διεύθυνση $\varepsilon$».**

Αν $M$ η τομή των $PP_1$ και $(O, R)$ (Σχ. 9), από το εγγράψιμο τετράπλευρο $PP_1P_2\Gamma$ έχουμε

$P_2\widehat{P_1}M = P_2\widehat{Γ}P = \widehat{AMP}$ και η ΑΜ θα είναι παράλληλος προς την S(P). Συνεπώς δια τη λύση του προβλήματος αρκεί να φέρουμε την από το Α παράλληλο προς την ε και από το σημείο τομής της με την (O, R), M την κάθετο στην ΒΓ. Η τομή αυτής P με την (O, R) είναι το ζητούμενο σημείο, το οποίο λόγω της κατασκευής του είναι και το μοναδικό.

**10. «Επί του (O, R) να βρεθεί σημείο P′ ώστε η ευθεία Simson αυτού S(P)′ να είναι κάθετος προς ορισμένη διεύθυνση ε».**

Αρκεί να εκλεγεί ως P′ το αντιδιαμετρικό του P.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**11. «Η ευθεία Simson S(A) της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι το ύψος $AA_1$ αυτού».**

Διότι τα ίχνη των καθέτων από το Α στις ΑΒ, ΑΓ συμπίπτουν με το Α.

**12. «Η ευθεία Simson του σημείου α, αντιδιαμετρικού του Α, είναι η πλευρά ΒΓ».**

Διότι οι γωνίες $α\widehat{B}A$, $α\widehat{Γ}A$ είναι ορθές.

**13. «Η ευθεία Simson του $H_1$, ίχνους του ύψους $AA_1$ επί της (O, R), είναι η από το $A_1$ παράλληλος προς την εφαπτομένη του (O, R) στο Α».**

Διότι η $AA_1$ είναι κάθετος στη ΒΓ. Αν δε στο σχ. 9 θεωρηθεί το Μ μεταβλητό επί του τόξου ΜΑ ώστε να συμπέσει με το Α, τότε το σημείο P συμπίπτει με το $H_1$ και η οριακή θέση της ΑΜ είναι η εφαπτομένη του (O, R) στο Α, παράλληλη προς την $B_1Γ_1$. Συνεπώς οι S(A), S(B), S(Γ) σχηματίζουν τρίγωνο το οποίο είναι το αντιδιάμεσο του ορθικού.

**14. «Η ευθεία Simson S(α′) του α′, ίχνους της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α επί του (O, R), είναι η από το μέσο Α′ της ΒΓ κάθετος στη διχοτόμο».**

Διότι το α′ είναι μέσο του τόξου ΒΓ και η κάθετος απ’ αυτό στη ΒΓ είναι η α′Α′. Εξάλλου επειδή το α′ κείται επί της διχοτόμου, η ευθεία η οποία ενώνει τις προβολές του επί των ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετος σ’ αυτήν. Επειδή η Αα′ είναι παράλληλος προς την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας Α′ του διαμέσου τριγώνου έπεται ότι η S(α′) είναι η εξωτερική διχοτόμος της Α′. Οι S(α′), S(β′), S(γ′) λοιπόν είναι οι εξωτερικές διχοτόμοι του διαμέσου τριγώνου Α′Β′Γ′ .

**15. «Οι ευθείες Simson των α″, β″, γ″, ιχνών επί του (O, R) των εξωτερικών διχοτόμων, είναι οι εσωτερικές διχοτόμοι του διαμέσου τριγώνου».**

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την προηγούμενη.

**16. «Θεωρούμε δύο τρίγωνα Τ≡ΑΒΓ, τ≡αβγ εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O, R) και σημείο P αυτού. Οι ευθείες Simson S(P, T), S(P, τ) ως προς τα δύο τρίγωνα τέμνονται κατά σταθερή γωνία, όταν το P γράφει τον (O, R)» (Droz - Farny) .**

Αν Μ και μ είναι οι τομές των από το P καθέτων επί των ΒΓ, βγ τότε οι S(P, T), S(P, τ) θα είναι παράλληλες αντιστοίχως προς τις ΑΜ, αμ (Βλ. απόδ. 9, Σχ. 9). Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{MPμ}$ είναι σταθερή διότι οι πλευρές της είναι κάθετες στις ΒΓ, Βγ και άρα το τόξο Μμ έχει μέτρο σταθερό· όπως επίσης και το τόξο Αα. Αναλόγως τώρα των θέσεων των σημείων Α, Μ, α, μ επί του (Ο, R) η γωνία των ευθειών ΑΜ, αμ, επομένως και των S(P, T), S(P, τ), θα έχει μία από τις εκφράσεις $\frac{1}{2}|\overset{\frown}{\mathrm{A\alpha}}\pm\overset{\frown}{\mathrm{M\mu}}|$ ή $\left|\pi-\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\mathrm{A\alpha}}+\overset{\frown}{\mathrm{M\mu}})\right|$ δηλαδή έχει μέγεθος σταθερό.

**17. «Οι ευθείες Simson ενός σημείου Ρ της (Ο, R), ως προς δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ εγγεγραμμένα στον (Ο, R) και αντιδιαμετρικά, είναι κάθετες».**

Οι ΒΓ, βγ είναι παράλληλες, και οι κάθετες επ' αυτών ΡΜ, Ρμ συμπίπτουν, δηλαδή Μ≡μ άρα $\overset{\frown}{\mathrm{M\mu}}=0$. Αφετέρου $\overset{\frown}{\mathrm{A\alpha}}=\pi$ και επομένως η γωνία των ευθειών Simson του Ρ ως προς τα δύο τρίγωνα είναι $\frac{\pi}{2}$.

**18. «Αν $A_1B_1\Gamma_1$ είναι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από τα ίχνη των υψών επί του (Ο, R), οι ευθείες Simson ενός σημείου Ρ ως προς τα τρίγωνα ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ είναι κάθετες».**

Έχοντας υπόψη τη γενική περίπτωση Νο 16 αρκεί ν' αποδείξουμε ότι είναι κάθετες οι ευθείες Simson του Ρ δια μία συγκεκριμένη θέση αυτού π.χ. Ρ≡Α. Η $S(A, T) \equiv AA_1$, ύψος του ΑΒΓ (Βλ. Νο 11).

Θεωρούμε την κάθετο από το Α στην $B_1\Gamma_1$. Επειδή $\overset{\frown}{AB_1} = \overset{\frown}{A\Gamma_1}$ το Α είναι μέσο του τόξου $B_1\Gamma_1$ και συνεπώς η κάθετος είναι η ΑΟ. Αν α η τομή της με τον (Ο, R) η ευθεία Simson S(A, T) θα έχει την διεύθυνση της $A_1\alpha$ (Βλ. Νο 14) η οποία είναι κάθετος στην $AA_1$, διότι η τελευταία είναι διάμετρος.

**19. «Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και αβγ εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (Ο, R). Ν' αποδειχθεί ότι:**

**α) Οι ευθείες Simson S(α), S(β), S(γ) ως προς το ΑΒΓ σχηματίζουν τρίγωνο α′β′γ′ όμοιο με το αβγ και οι ευθείες Simson S(A), S(B), S(Γ) ως προς το αβγ σχηματίζουν τρίγωνο Α′Β′Γ′ όμοιο με το ΑΒΓ.**

**β) Τα τρίγωνα α′β′γ′ και Α′Β′Γ′ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, του οποίου το κέντρο είναι το μέσο μ της απόστασης των ορθοκέντρων Η, η των τριγώνων ΑΒΓ και αβγ».**

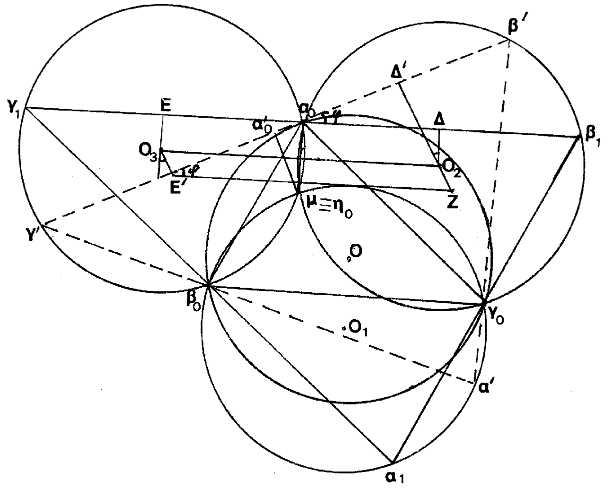
**α)** Η γωνία των S(β), S(γ) είναι ίση με την εγγεγραμμένη στο $\overset{\frown}{\beta\gamma}$ (Βλ. Ν°5) δηλαδή $\alpha'=\alpha$ ή $\alpha' = \pi-\alpha$.

Ομοίως $\beta'=\beta$ ή $\beta' = \pi-\beta$ και $\gamma'=\gamma$ ή $\gamma' = \pi-\gamma$. Επειδή πρέπει $\alpha'+\beta'+\gamma' = \pi$, απ' όλες τις περιπτώσεις η μόνη δυνατή είναι η $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$.

**β)** Αν $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ τα μέσα των Ηα, Ηβ, Ηγ το τρίγωνο $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ στην ομοιοθεσία $\left(H, \frac{1}{2}\right)$. Συνεπώς και το ορθόκεντρο $\eta_0$ του $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ θα είναι το ομοιόθετο του η, είναι δηλαδή το μέσο της Ηη και άρα $\eta_0\equiv\mu$. Οι S(α), S(β), S(γ) διέρχονται αντιστοίχως από τα $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ (Βλ. Νο 3) και άρα το τρίγωνο α′β′γ′ είναι περιγεγραμμένο στο $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ και όμοιο μ' αυτό. Συνεπώς τα σημεία α′, β′, γ′ θα κείνται επί των ίσων κύκλων, ο καθένας των οποίων διέρχεται από δύο κορυφές του $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ και από το ορθόκεντρο αυτού μ. Το μ είναι περίκεντρο του α′β′γ′. Πράγματι: έστω $\beta_1\alpha_0\gamma_1$ παράλληλος προς την $O_2O_3$ και $O_2\Delta$, $O_3E$ κάθετες στην $\beta_1\gamma_1$· $O_2\Delta'$ και $O_3E'$ κάθετες στην β′γ′· Ε′Ζ παράλληλος προς την $O_2O_3$ (Σχ. 11).

Η $\mu\alpha_0$, επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι, είναι μεσοπαράλληλος προς τις $O_2\Delta$, $O_3E$. Αν $\varphi=\sphericalangle\ (\beta_1\gamma_1, \beta'\gamma')$ η $\mu\alpha_0'$ παράλληλος προς τις $O_2\Delta'$, $O_3E'$ θα είναι και μεσοπαράλληλος αυτών και συνεπώς $\alpha_0'\Delta' = \alpha_0'E'$ και $\alpha_0\beta' = \alpha\gamma'$.

Δηλαδή η $\mu\alpha_0'$ είναι μεσοκάθετος στην $\beta'\gamma'$ κ.λπ. Είναι λοιπόν το $\mu$ περίκεντρο του $\alpha'\beta'\gamma'$. Από το ίδιο σχήμα έχουμε $\beta'\gamma' = 2\Delta'E' = 2E'Z\sigma\upsilon\nu\varphi = 2(O_2O_3)\sigma\upsilon\nu\varphi = \beta_1\gamma_1\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$. Το $\beta_1\gamma_1 = 2\beta_0\gamma_0 = \beta\gamma$, διότι το $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ είναι αντιδιάμεσο του $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ και τα $\beta_0$, $\gamma_0$ είναι τα μέσα των $H\beta$, $H\gamma$. Συνεπώς $\beta'\gamma' = \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi$ και η ακτίνα $r_1$ του περιγεγραμμένου κύκλου $(\alpha'\beta'\gamma')$



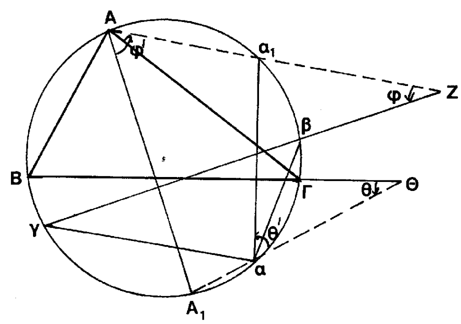
*Σχ. 11*

θα είναι $r_1 = \dfrac{\beta'\gamma'}{2\eta\mu\alpha'} = \dfrac{\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi}{2\eta\mu\alpha} = R\sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου $\varphi=\sphericalangle\ (\beta_1\gamma_1, \beta'\gamma') = \sphericalangle\ (\beta_0\gamma_0, \beta'\gamma') = \sphericalangle\ [\beta\gamma, S(\alpha)]$.

Διότι $\beta_0\gamma_0$ παράλληλος στη $\beta\gamma$ και $\beta'\gamma'\equiv S(\alpha)$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\varphi=\sphericalangle\ [\beta\gamma, S(\alpha)] = \sphericalangle\ [\gamma\alpha, S(\beta)] = \sphericalangle\ [\alpha\beta, S(\gamma)]$ και συνεπώς τα τρίγωνα $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ είναι ευθέως όμοια. Ομοίως βρίσκουμε ότι: $\sphericalangle\ [B\Gamma, S(A)] = \sphericalangle\ [\Gamma A, S(B)] = \sphericalangle\ [AB, S(\Gamma)] = \theta$ και $r_2 = R\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου $r_2$ η ακτίνα του κύκλου $(A'B'\Gamma')$. Μένει ν' αποδειχθεί ότι $\varphi=\theta$.

Αν $\alpha_1$ το ίχνος επί του $(O, R)$ της καθέτου από το $\alpha$ στη $\beta\gamma$, η $S(\alpha)$ είναι παράλληλος προς την $A\alpha_1$ και η $\varphi=\sphericalangle\ [\beta\gamma, S(\alpha)] = \widehat{AZ\gamma}$. Ομοίως αν $A_1$ το ίχνος επί του $(O, R)$ της καθέτου από το $A$ στη $\beta\gamma$ η $S(A)$ είναι παράλληλος προς την $\alpha A_1$ και η γωνία $\theta=\sphericalangle\ [B\Gamma, S(A)] = \widehat{B\Theta\alpha}$.

Οι εγγεγραμένες γωνίες $\varphi'$, $\theta'$ βαίνουν στο αυτό τόξο $A_1\alpha\beta\alpha_1$, και είναι ίσες. Επομένως και οι συμπληρωματικές τους $\varphi$, $\theta$ είναι ίσες οπότε $r_1=r_2$. Και επειδή οι κύκλοι $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(A'B'\Gamma')$ έχουν το αυτό κέντρο $\mu$, θα ταυτίζονται.



*Σχ. 12*

**Η κλίση φ.** Αν θεωρηθούν όλα τα λαμβανόμενα τόξα δεξιόστροφα θα έχουμε:

$$\overset{\frown}{A\alpha} = \overset{\frown}{A\beta}+\overset{\frown}{\beta\alpha}\ ,\quad \overset{\frown}{B\beta} = \overset{\frown}{B\alpha_1}+\overset{\frown}{\alpha_1\beta},\quad \overset{\frown}{\Gamma\gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\alpha}+\overset{\frown}{\alpha\gamma}\ .$$

Επειδή οι $AA_1$, $\beta\gamma$ είναι κάθετες καθώς και οι $\alpha\alpha_1$, $B\Gamma$, θα είναι $\overset{\frown}{A\beta}+\overset{\frown}{A_1\gamma} = -\pi$, $\overset{\frown}{\Gamma\alpha}+\overset{\frown}{B\alpha_1} = -\pi$ από τις οποίες $\overset{\frown}{A\beta} = -\pi-\overset{\frown}{A_1\gamma}$ , $\overset{\frown}{B\alpha_1} = -\pi-\overset{\frown}{\Gamma\alpha}$ . Θα είναι επομένως

$$\overset{\frown}{A\alpha} = -\pi-\overset{\frown}{A_1\gamma}+\overset{\frown}{\beta\alpha},\quad \overset{\frown}{B\beta} = -\pi-\overset{\frown}{\Gamma\alpha}+\overset{\frown}{\alpha_1\beta}$$

και θα έχουμε

$$\overset{\frown}{A\alpha}+\overset{\frown}{B\beta}+\overset{\frown}{\Gamma\gamma} = -2\pi+\overset{\frown}{\beta\alpha}+\overset{\frown}{\alpha\gamma}+\overset{\frown}{\alpha_1\beta}-\overset{\frown}{A_1\gamma} = -2\pi+\overset{\frown}{\beta\gamma}+\overset{\frown}{\alpha_1\beta}-\overset{\frown}{A_1\gamma} = -2\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\gamma}-\overset{\frown}{A_1\gamma} = -2\pi+\overset{\frown}{\alpha_1A_1}\ .$$