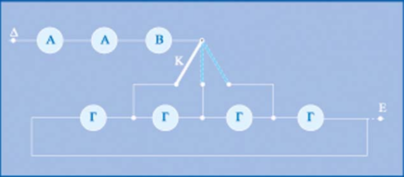
Λεωνίδας Π. Καμαρινόπουλος
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Στοιχεία Πιθανοθεωρίας



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: **Βασικές αρχές**

1.1. Αιτιοκρατικά και πιθανοκρατικά φαινόμενα.............................. 7
1.2. Πειράματα τύχης, Δειγματοχώροι και Γεγονότα......................... 8-13
1.3. Η έννοια της πιθανότητας 13-15
1.4. Αξιώματα της πιθανότητας 15-19
1.5. Δεσμευμένη πιθανότητα ή πιθανότητα υπό συνθήκη................... 19-23
1.6. Ολική πιθανότητα... 23-26
1.7. Θεώρημα του Bayes.. 26-29
1.8. Ανεξάρτητα γεγονότα 29-33
1.9. Συνδυαστική ανάλυση.. 34-41
Ασκήσεις.. 42-49

Κεφάλαιο 2: **Μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές**

2.1. Τυχαίες μεταβλητές 53-54
2.2. Συναρτήσεις κατανομής.. 55-59
2.3. Συναρτήσεις πυκνότητας... 60-68
Ασκήσεις.. 68-72

Κεφάλαιο 3: **Χαρακτηριστικά μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών**

3.1. Μαθηματική ελπίδα ή μέση (προσδοκώμενη) τιμή 75-80
3.2. Διασπορά και τυπική απόκλιση.. 81-84
3.3. Ροπές και λοιπές παράμετροι 84-87
3.4. Ανισότητα του Tchebycheff... 88-89
Ασκήσεις.. 90-93

Κεφάλαιο 4: **Χρήσιμες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας**

4.1. Κατανομές τυχαίων μεταβλητών διακριτού τύπου..................... 97-105
- 4.1.1. Διαδικασία Bernoulli και συναφείς κατανομές 97-101
- 4.1.2. Κατανομή Poisson 101-105

4.2. Κατανομές τυχαίων μεταβλητών συνεχούς τύπου...................... 105-115
- 4.2.1. Ομοιόμορφη κατανομή.. 105-107
- 4.2.2. Εκθετική κατανομή 107-108
- 4.2.3. Κανονική κατανομή.. 109-113

4.2.4. Λοιπές κατανομές συνεχών μεταβλητών...................................... 113-115
4.3. Εμπειρικές συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής 115-122
Ασκήσεις.. 123-128

***Κεφάλαιο 5:* Συναρτήσεις τυχαίας μεταβλητής**

5.1. Η τυχαία μεταβλητή Y = h(X) 131-132
5.2. Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y=h(X) 132-138
5.3. Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y=h(X)...... 139-143
Ασκήσεις.. 143-146

***Κεφάλαιο 6:* Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές**

6.1. Από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής........................... 149-152
6.2. Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας 152-161
6.3. Ανεξαρτησία πολυδιάστατης μεταβλητής................................... 161-163
6.4. Χαρακτηριστικά πολυδιάστατης μεταβλητής.............................. 163-169
Ασκήσεις.. 169-170

Λύσεις Ασκήσεων.. 171-176
Ελληνική Βιβλιογραφία... 177
Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία.. 178
Ευρετήριο 179

Κεφάλαιο 1
Βασικές αρχές

1.1. ***Αιτιοκρατικά και πιθανοκρατικά φαινόμενα***
1.2. ***Πειράματα τύχης, Δειγματοχώροι και Γεγονότα***
1.3. ***Η έννοια της πιθανότητας***
1.4. ***Αξιώματα της πιθανότητας***
1.5. ***Δεσμευμένη πιθανότητα ή πιθανότητα υπό συνθήκη***
1.6. ***Ολική πιθανότητα***
1.7. ***Θεώρημα του Bayes***
1.8. ***Ανεξάρτητα γεγονότα***
1.9. ***Συνδυαστική ανάλυση***

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

1.1. Αιτιοκρατικά και πιθανοκρατικά φαινόμενα

Μία θεώρηση του τύπου των φαινομένων από τη σκοπιά της στατιστικής επιστήμης και πιθανοθεωρίας τα χωρίζει στις εξής δύο κατηγορίες:

– αιτιοκρατικά (ντετερμινιστικά) φαινόμενα
– πιθανοκρατικά (στοχαστικά ή τυχαία) φαινόμενα.

Για τα φαινόμενα της πρώτης κατηγορίας ισχύει ο νόμος του αίτιου - αιτιατού, δηλ. οι συνθήκες διεξαγωγής καθορίζουν πλήρως το αποτέλεσμα. Επαναλήψεις ενός αιτιοκρατικού φαινομένου οδηγούν έτσι πάντα στο αυτό αποτέλεσμα, εφ' όσον οι συνθήκες διεξαγωγής του παραμένουν αμετάβλητες. Ο νόμος της βαρύτητας, η κίνηση των πλανητών, το σημείο βρασμού ενός υγρού, ο νόμος του Ohm κ.ά. αναφέρονται σαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αιτιοκρατικών φαινομένων. Για τη μελέτη τους η πιθανοθεωρία δεν έχει ουσιαστική προσφορά. Τα πιθανοκρατικά φαινόμενα αντίθετα περιέχουν στοιχεία τύχης, πράγμα που εκφράζεται στο γεγονός, ότι αν παρατηρήσουμε επαναλήψεις του φαινομένου, π.χ. στα πλαίσια ενός πειράματος, τα αποτελέσματα θα διαφέρουν από φορά σε φορά, ακόμη και αν οι συνθήκες διεξαγωγής παραμένουν ίδιες. Έτσι ανεξάρτητα από το πλήθος των πληροφοριών και γνώσεων μας σχετικά με προϊστορία ενός στοχαστικού φαινομένου, δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε επακριβώς την μελλοντική του εξέλιξη.

Πέραν των αναφερθέντων στοιχείων τύχης που ενδογενώς επηρρεάζουν την εξέλιξη και έκβαση ενός φαινομένου οδηγόντας έτσι στον στοχαστικό του χαρακτήρα, θα πρέπει να αναφερθεί και μία άλλη πηγή αβεβαιότητας διαφορετικής υφής. Βασικά εργαλεία του σημερινού επιστήμονα είναι ποσοτικές μέθοδοι για ανάλυση, ανάπτυξη και αξιολόγηση ομοιωμάτων (μοντέλλων). Τα μοντέλλα αυτά πολλές φορές π.χ. λόγω ελλειπών στοιχείων, αποτελούν εξιδανίκευση της πραγματικότητας και επομένως όχι ακριβή έκφραση της. Υπολογισμοί που βασίζονται στα μοντέλλα αυτά περιέχουν κατά συνθήκη αβεβαιότητες.

Όλες οι αβεβαιότητες, άσχετα με τα αίτια που τις προκαλούν, μπορεί να μελετηθούν και εκτιμηθούν με έννοιες και μεθοδολογίες της θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής.

1.2. Πειράματα τύχης, Δειγματοχώροι και Γεγονότα

Βασικό ρόλο στη μελέτη στοχαστικών φαινομένων και στην ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας γενικότερα παίζει η έννοια του **τυχαίου πειράματος**. Με τον όρο τυχαίο πείραμα θα εννοούμε μια ενέργεια διεξαγωγής του στοχαστικού φαινομένου υπό συζήτηση, όπου

- δίνεται η δυνατότητα πολλαπλών επαναλήψεων με τις ίδιες βασικές συνθήκες διεξαγωγής
- ενώ δεν είναι δυνατή η εκ των προτέρων προδίκαση του αποτελέσματος μίας συγκεκριμμένης επανάληψης, είναι γνωστό το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

Το σύνολο αυτό όλων των δυνατών αποτελεσμάτων καλείται **δειγματοχώρος** και θα συμβολίζεται με S. Το κάθε δυνατό αποτέλεσμα $s \in S$ καλείται **δειγματοσημείο**. Στη συνέχεια αναφέρονται παραδείγματα πειραμάτων τύχης E με τους αντίστοιχους δειγματοχώρους S.

Παράδειγμα 1.1.

E_1: Ρίχνουμε ένα ζάρι και παρατηρούμε τον αριθμό που εμφανίζεται	$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Παράδειγμα 1.2.

E_2: Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές και παρατηρούμε τη διαδοχή "κορώνα" (Κ), "γράμματα" (Γ)	$S_2 =$ {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΓ}

Παράδειγμα 1.3.

E_3: Παράγουμε ένα προϊόν και μετρούμε τον αριθμό των ελαττωματικών κομματιών της παραγωγής μίας μέρας	$S_3 = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ όπου N η παραγωγή

Παράδειγμα 1.4.

E_4: Ο αριθμός σωματιδίων που εκπέμπει ένα ραδιενεργό υλικό σε διάστημα μιας ώρας	$S_4 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = σύνολο μη αρνητικών ακεραίων

Παράδειγμα 1.5.

E_5: Μετρούμε τη διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρικής λάμπας έχοντάς την συνεχώς αναμμένη	$S_5 = \{x: x \in R,\ x \geq 0\} =$ = σύνολο των πραγματικών μη αρνητικών αριθμών

Παράδειγμα 1.6.

E_6: Η καταγραφή ενός σεισμογράφου σε διάστημα μιας μέρας	$S_6 =$ σύνολο συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 24]$

Είναι προφανές, ότι ο δειγματοχώρος διαφέρει από πείραμα σε πείραμα, ακόμα δε το ίδιο πείραμα μπορεί να περιγραφεί με περισσότερους δειγματοχώρους. Έτσι στο Πείραμα E_1 ένας άλλος δειγματοχώρος είναι ο $S'_1 = \{$μονός, ζυγός$\}$. Στην περίπτωση του S'_1 δεν μπορεί να προσδιοριστεί, αν π.χ. το αποτέλεσμα διαιρείται με 3.

Εάν ένας δειγματοχώρος έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων (όπως στα Παραδείγματα 1.1, 1.2 και 1.3) καλείται **πεπερασμένος δειγματοχώρος**. Εάν τα σημεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν με τους φυσικούς αριθμούς ένα προς ένα, καλείται **άπειρος αριθμήσιμος δειγματοχώρος**. Εάν τα σημεία του τέλος μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα σημεία ενός διαστήματος του άξονα x (π.χ. $0 \leq x \leq 1$) ένα προς ένα, τότε ο δειγματοχώρος καλείται **άπειρος μη αριθμήσιμος**. Ένας πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος δειγματοχώρος καλείται επίσης και **διακριτός**. Ένας άπειρος μη αριθμήσιμος καλείται και **μη διακριτός** ή **συνεχής**.

Συχνά σε ένα τυχαίο πείραμα δεν ενδιαφέρουν μόνο τα ίδια τα αποτελέσματα, δηλαδή τα δειγματοσημεία, αλλά και ορισμένοι συνδυασμοί τους. Π.χ. στο πείραμα E_1 μπορεί να ενδιαφέρει αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 3 ή όχι, δηλαδή αν ανήκει στο υποσύνολο $A = \{4, 5, 6\}$ ή όχι. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι συνέβει (ή δεν συνέβει) το **γεγονός** A. Γενικότερα ονομάζουμε **γεγονότα** τα υποσύνολα ενός δειγματοχώρου S.

***Παρατήρηση* 1.1.** Στη περίπτωση πεπερασμένων δειγματοχώρων κάθε υποσύνολο S είναι και γεγονός και αντίστροφα. Σε συνεχείς δειγματοχώρους, ενώ κάθε γεγονός είναι υποσύνολο του S, κάθε υποσύνολο του S δεν είναι κατ' ανάγκη γεγονός. Τέτοια υποσύνολα που δεν αντιστοιχούν σε γεγονότα δεν παρουσιάζονται στις εφαρμογές και δεν θα μας απασχολήσουν στα πλαίσια αυτής της παράδοσης.

Έτσι το ίδιο το σύνολο S καθώς και το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι γεγονότα. Ένα γεγονός που περιλαμβάνει ένα μόνο δειγματοσημείο καλείται **απλό γεγονός**. Επειδή προφανώς ένα από τα δειγματοσημεία θα πραγματοποιηθεί, το ίδιο το S καλείται **βέβαιο γεγονός**. Το κενό σύνολο $\varnothing$ καλείται **αδύνατο γεγονός**, επειδή δε μπορεί να πραγματοποιηθεί κανένα στοιχείο του.

Ένα γεγονός μπορεί να οριστεί είτε απαριθμώντας τα δειγματοσημεία που το απαρτίζουν (Μέθοδος της αναγραφής) είτε δίνοντας μια χαρακτηριστική ιδιότητα του (Μέθοδος της περιγραφής). Π.χ. στο πείραμα E_2 μπορούμε να ορίσουμε το γεγονός

A = {περισσότερες φορές "κορώνα" από γράμματα} (Μέθοδος περιγραφής)
= (ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ} (Μέθοδος αναγραφής)

Το σύνολο των υποσυνόλων του S, δηλαδή το σύνολο των γεγονότων, θα συμβολίζεται στο εξής με S*. Εάν ο δειγματοχώρος S είναι πεπερασμένος και περιέχει n στοιχεία, τότε το σύνολο S* περιέχει 2^n γεγονότα. Πράγματι, παίρνοντας τα n δειγματοσημεία ανά 0, ένα, δύο, …, n έχουμε

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{το αδύνατο γεγονός}}+\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{τα n απλά γεγονότα}}+\binom{n}{2}+\dots+\underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{ο δειγματοχώρος S}}=(1+1)^n=2^n$$

Παράδειγμα 1.7.

Έστω $S = (s_1, s_2, s_3)$. Τότε το:

$$S^* = (\varnothing, s_1, s_2, s_3, (s_1, s_2), \ (s_1, s_3), \ (s_2, s_3), \ (s_1, s_2, s_3))$$

περιέχει $2^3=8$ γεγονότα.

Επειδή τα γεγονότα είναι σύνολα, ισχύουν οι γνωστές πράξεις και σχέσεις της συνολοθεωρίας, δηλαδή έχουμε μία άλγεβρα γεγονότων αντίστοιχη με την άλγεβρα συνόλων.

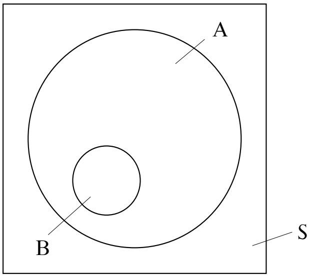
Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικότερες πράξεις με γεγονότα και διασαφηνίζονται με τα αντίστοιχα **διαγράμματα Venn**. Σε ένα διάγραμμα Venn ο δειγματοχώρος S δείχνεται σαν ένα παραλληλόγραμμο ενώ ένα γεγονός A συμβολίζεται με μια κλειστή περιοχή (επιφάνεια) μέσα στο παραλληλόγραμμο.

Ισότης

Δύο γεγονότα A και B είναι ίσα, A=B, εάν περιέχουν τα αυτά δειγματοσημεία (απλά γεγονότα). Είναι προφανές, ότι στην εκτέλεση ενός τυχαίου πειράματος, δύο ίσα γεγονότα συμβαίνουν ή δε συμβαίνουν ταυτόχρονα.

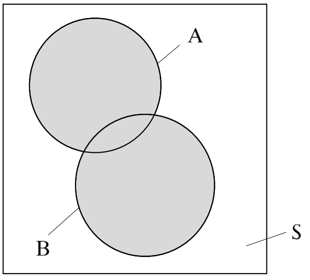
Περιεκτικότητα

Το γεγονός A περιέχει το B, $B \subset A$, εάν για κάθε $s \in B$ ισχύει και $s \in A$. Εάν $A \subset B$ και $B \subset A$ τότε προφανώς A=B.



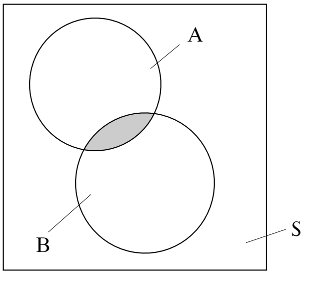
Ένωση

Το σύνολο όλων των απλών γεγονότων που ανήκουν στα γεγονότα A και B καλείται ένωση των A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$. Η ένωση $A \cup B$ συμβαίνει αν συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A, B.



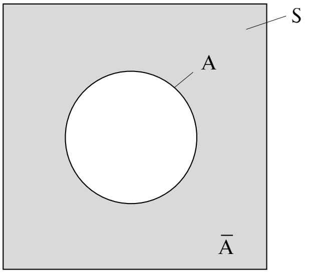
Τομή

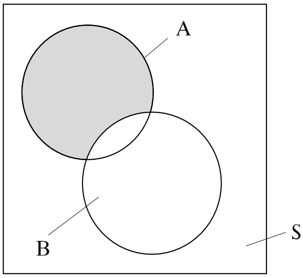
Το σύνολο των απλών γεγονότων που ανήκουν και στο A και στο B καλείται τομή του A και B, και συμβολίζεται με $A \cap B$. Η τομή $A \cap B$ συμβαίνει, αν συμβούν και το A και το B.



Συμπλήρωμα

Το γεγονός που περιέχει όλα τα απλά γεγονότα του S που δεν ανήκουν στο A καλείται συμπλήρωμα του A και συμβολίζεται με $\bar{A}$. Δηλαδή το $\bar{A}$ συμβαίνει εάν δεν συμβεί το A.

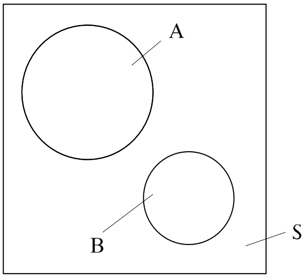




Διαφορά

Η διαφορά $A–B$ των γεγονότων A, B περιέχει τα απλά γεγονότα του A που δεν περιέχονται στο B. Η διαφορά $A–B$ συμβαίνει εάν συμβεί το A χωρίς να συμβεί το B, δηλαδή ισχύει $A–B = A\cap\overline{B}$.

***Παρατήρηση* 1.2.** Οι κανόνες της αριθμητικής διαφοράς (αφαίρεσης) δεν ισχύουν για γεγονότα. Έτσι ενώ για αριθμούς x, y έχουμε $(x–y)+y = x$, για δύο γεγονότα A, B ισχύει $(A–B)\cup B = A\cup B$.



Δύο γεγονότα A, B λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** ή **χωριστά** αν $A\cap B = \varnothing$.

Αναφέρονται τέλος οι γνωστές ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{array}\right\} \text{αντιμεταθετικές ιδιότητες}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cup(B\cup\Gamma) = (A\cup B)\cup\Gamma \\ A\cap(B\cap\Gamma) = (A\cap B)\cap\Gamma \end{array}\right\} \text{προσεταιριστικές ιδιότητες}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma) \\ A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma) \end{array}\right\} \text{επιμεριστικές ιδιότητες}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B} \\ \overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B} \end{array}\right\} \text{Νόμοι De Morgan}$$

Τέλος λόγω της από την συνολοθεωρία γνωστής **αρχής του δυϊσμού** κάθε σχέση μεταξύ γεγονότων εξακολουθεί να ισχύει, εάν οι ενώσεις αντικατασταθούν με τομές, οι τομές με ενώσεις, τα γεγονότα με τα συμπληρωματικά τους και αντιστραφούν τα σύμβολα περιεκτικότητας $\subset$ και $\supset$.

Παράδειγμα 1.8.

Σε τυχαίο πείραμα ρίχνεται νόμισμα δύο φορές και ορίζεται A: "τουλάχιστον μία φορά κεφάλι" και B το γεγονός "γράμματα στη δεύτερη ρίψη". Ισχύει $A = \{К\Gamma, \Gamma К, КК\}$, $B = \{К\Gamma, \Gamma\Gamma\}$ και άρα

$A \cup B = \{ΚΓ, ΓΚ, ΚΚ, ΓΓ\} = S$, $\quad A \cap B = \{ΚΓ\}$, $\quad \overline{A} = \{ΓΓ\}$,

$A - B = \{ΓΚ, ΚΚ\}$, $\quad B - A = \{ΓΓ\}$.

Παράδειγμα 1.9.

S είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών x. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{x: 2 \le x \le 5\}$ και $B = \{x: 3 \le x \le 6\}$. Να βρεθούν τα γεγονότα $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $A - B$. Έχουμε

$A \cup B = \{x: 2 \le x \le 6\}$, $A \cap B = \{x: 3 \le x \le 5\}$, $\overline{A} = \{x: x<2 \text{ ή } x>5\}$,

$A - B = \{x: 2 \le x < 3\}$.

Παράδειγμα 1.10.

Α, Β, Γ είναι τρία γεγονότα κάποιου δειγματοχώρου S. Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων τα γεγονότα που αντιστοιχούν στις παρακάτω προτάσεις,

1. Τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα.
2. Ακριβώς ένα από τα γεγονότα.
3. Ακριβώς δύο από τα γεγονότα.
4. Όχι περισσότερα από δύο γεγονότα.

Λύση:

1. $A \cup B \cup Γ$

2. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{Γ}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{Γ}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap Γ)$

3. $(A \cap B \cap \overline{Γ}) \cup (A \cap \overline{B} \cap Γ) \cup (\overline{A} \cap B \cap Γ)$

4. $\overline{A \cap B \cap Γ} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{Γ}$, δηλαδή όχι και τα τρία.

1.3. Η έννοια της πιθανότητας

Σε ένα πείραμα τύχης υπάρχει εξ ορισμού πάντα η αβεβαιότητα για το αν θα συμβεί ένα ορισμένο γεγονός ή όχι. Το βασικό πρόβλημα στη διενέργεια ενός τυχαίου πειράματος είναι λοιπόν η δυνατότητα αντιστοιχίας ενός αριθμού σε κάθε γεγονός έτσι ώστε ο αριθμός αυτός να εκφράζει την "πιθανότητα" εμφάνισης του αντίστοιχου γεγονότος κατά την εκάστοτε διεξαγωγή του τυχαίου πειράματος. Σαν ένα μέτρο της πιθανότητας να συμβεί ένα γεγονός ορίζουμε "κατάλληλα" έναν αριθμό μεταξύ 0 και 1. Για το βέβαιο γεγονός, λέμε ότι η πιθανότητα είναι 1 ή 100%. Για το αδύνατο γεγονός λέμε ότι η πιθανότητα είναι μηδέν. Προφανώς η πιθανότητα $\frac{1}{4}$ σημαίνει, ότι 75% προς 25% ή 3 προς 1 το γεγονός δεν θα συμβεί.

Υπάρχουν δύο αξιοσημείωτες μέθοδοι για την εκτίμηση της πιθανότητας ενός γεγονότος, που αρχικά χρησιμοποιήθηκαν και για τον ορισμό της.

α) Κλασσική μέθοδος του Laplace ή εκ των προτέρων ορισμός

Εάν ο δειγματοχώρος S του τυχαίου πειράματος περιέχει n **ισοπίθανα** σημεία, από τα οποία h είναι ευνοϊκά, δηλαδή εάν συμβεί ένα από αυτά, τότε μόνο συμβαίνει το γεγονός υπό συζήτηση, η πιθανότητα του γεγονότος είναι $\frac{h}{n}$. Έτσι στο πείραμα E_1 όπου υπάρχουν 6 ισοπίθανα απλά γεγονότα, η πιθανότητα να έρθει το 2 είναι $\frac{1}{6}$, δεδομένου ότι $h=1$, ενώ η πιθανότητα να έρθει μονό νούμερο είναι $\frac{3}{6}$, δεδομένου ότι τώρα $h=3$. Δεχτήκαμε βέβαια ότι η ρίψη γίνεται τίμια και το ζάρι είναι κανονικό.

β) Μέθοδος της σχετικής συχνότητας του von Mises ή εκ των υστέρων ορισμός

Θεωρούμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματοχώρο S και A κάποιο γεγονός $A \in S^*$. Σε N δοκιμές του πειράματος μετρούμε πόσες φορές εμφανίστηκε (συνέβει) το A και έστω $N(A)$ αυτός ο αριθμός. Ο λόγος

$$f(A) = \frac{N(A)}{N}$$

καλείται **σχετική συχνότητα** του γεγονότος A στις N δοκιμές και έχει τις παρακάτω βασικές και προφανείς ιδιότητες.

1. $0 \leq f(A) \leq 1$
2. Αν A, B δύο ασυμβίβαστα γεγονότα, δηλ. $A \cap B = \varnothing$ τότε $f(A \cup B) = f(A)+f(B)$.

Η επιστήμη της Στατιστικής και η ερμηνεία της μέσω της πιθανοθεωρίας βασίζονται στην πειραματική διαπίστωση, ότι για κάθε συγκεκριμένο A οι αριθμοί $f(A)$ παρουσιάζουν κάποια κανονικότητα, η οποία μαθηματικά εκφράζεται με τη σύγκλιση της ακολουθίας $\frac{N(A)}{N}$, όταν $N \to \infty$ σε κάποιο αριθμό $P(A)$, τον ίδιο κάθε φορά, που ονομάζεται και πιθανότητα να εμφανιστεί το A σε μία δοκιμή.

Η κλασσική μέθοδος και η μέθοδος της σχετικής συχνότητας έχουν σοβαρές αδυναμίες γιατί οι όροι "ισοπίθανα γεγονότα" και "N πολύ μεγάλο ($N \to \infty$)" είναι ασαφείς και ανεπαρκείς για να στηρίξουν μία μαθηματική θεωρία. Επιπλέον η κλασσική μέθοδος αστοχεί στις περιπτώσεις δειγματοχώρων αποτελουμένων από μη ισοπίθανα δειγματοσημεία, περιπτώσεις σύνηθεις στις μοντέρνες εφαρμογές. Οι ασάφειες και ατέλειες αυτές εξέλιψαν μετά την παρουσίαση μιας αξιωματικής μεθόδου θεμελίωσης της πιθανοθεωρίας από τον Ρώσσο μαθηματικό A.N. Kolmogorov το 1933, που έγινε έκτοτε ευρύτατα αποδεκτή. Στην αξιωματική θεώρηση των εννοιών της πιθανοθεωρίας που θα αναπτύξουμε παρακάτω θα πρέπει όμως κανείς, να έχει πάντα υπόψη την πρακτική (εμπειρική) ερμηνεία τους μέσω της έννοιας της σχετικής συχνότητας.

1.4. Αξιώματα της πιθανότητας

Θεωρούμε ένα δειγματοχώρο S και τα υποσύνολα του (γεγονότα) $S^* = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Σε κάθε γεγονός $A_i \in S^*$ αντιστοιχούμε έναν αριθμό $P(A_i)$ μέσω μιας συνάρτησης (συνολοσυνάρτησης) P ορισμένης στο S^*. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση πιθανότητας** ενώ η τιμή $P(A_i)$ καλείται **πιθανότητα** του γεγονότος A_i και δεχόμαστε ότι ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:

ΑΞΙΩΜΑ 1. **Για κάθε $A_i \in S^*$ ισχύει $0 \le P(A_i) \le 1$.**

ΑΞΙΩΜΑ 2. **Για το βέβαιο γεγονός S ισχύει $P(S)=1$.**

ΑΞΙΩΜΑ 3. **Εάν τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots \in S^*$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$$

Ειδικότερα, για δύο ασυμβίβαστα γεγονότα A_1, A_2 έχουμε

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1)+P(A_2).$$

Η τριάδα (S, S^*, P) λέγεται **χώρος πιθανοτήτων**. Προφανώς το τρίτο αξίωμα, που επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας της ένωσης δύο ασυμβίβαστων γεγονότων γνωστής πιθανότητας, είναι και το πλουσιότερο σε περιεκτικότητα.

Παράδειγμα 1.11.

Από μία τράπουλα τραβάμε ένα χαρτί. Ποια η πιθανότητα να είναι καρό ή σπαθί. Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι $S = \{ΚΑ, ΚΟ, ΣΠ, ΠΙ\}$

όπου, ΚΑ: "τραβάμε καρό", ΚΟ: "τραβάμε κούπα", ΣΠ: "τραβάμε σπαθί", ΠΙ: "τραβάμε πίκα". Λόγω της συμμετρίας έχουμε

$$P(\text{ΚΑ}) = P(\text{ΚΟ}) = P(\text{ΣΠ}) = P(\text{ΠΙ}) = \frac{1}{4}.$$

Ζητούμε την πιθανότητα του γεγονότος $\text{ΚΑ}\cup\text{ΣΠ}$. Βάσει του 3 αξιώματος έχουμε $P(\text{ΚΑ}\cup\text{ΣΠ}) = P(\text{ΚΑ})+ P(\text{ΣΠ}) = \frac{1}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αξιώματα εύκολα αποδεικνύονται τα εξής θεωρήματα, που είναι χρήσιμα σε προβλήματα πιθανότητων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1: $\mathbf{P(\bar{A}) = 1-P(A)}$.

Απόδειξη: $A\cup\bar{A} = S \Rightarrow P(A\cup\bar{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. αξίωμα}}}{=} P(A)+P(\bar{A}) = P(S) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. αξίωμα}}}{=} 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2: $\mathbf{P(\varnothing)=0}$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα 1.1 για $\bar{A} = \varnothing$ έχουμε

$$P(\varnothing) = 1-P(\bar{\varnothing}) = 1-P(S) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αξίωμα 2}}}{=} 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3: **Εάν $\mathbf{A\subset B}$ τότε $\mathbf{P(A)\leq P(B)}$.**

Απόδειξη: Ανάλυση του γεγονότος B στα ασυμβίβαστα γεγονότα A και $B-A$ δίνει

$$B = A\cup(B-A) \Rightarrow P(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. αξίωμα}}}{=} P(A)+ \underbrace{P(B-A)}_{\geq 0} \geq P(A)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4: **Για οποιαδήποτε γεγονότα $\mathbf{A, B\in S^*}$ έχουμε**

$$\mathbf{P(A-B) = P(A)-P(A\cap B)}$$

Απόδειξη: Είναι $A = (A-B)\cup(A\cap B)$, όπου $A-B$ και $A\cap B$ ασυμβίβαστα γεγονότα. Από το 3. αξίωμα έχουμε $P(A) = P(A-B)+P(A\cap B)$ και άρα το θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5: (Προσθετικό θεώρημα): **Εάν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι δύο οποιαδήποτε γεγονότα, όχι αναγκαία ασυμβίβαστα, τότε**

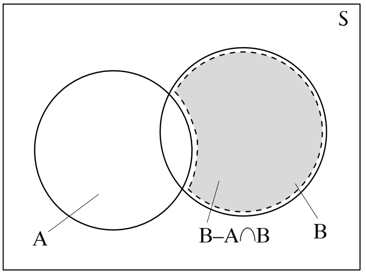
$$\mathbf{P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στην ανάλυση του γεγονότος $A \cup B$ στα ασυμβίβαστα γεγονότα A και $B - A \cap B$

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$$

και του γεγονότος B στα ασυμβίβαστα γεγονότα $A \cap B$ και $B - (A \cap B)$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$$



Η ανάλυση απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα Venn.

Εφαρμογή τώρα του 3. αξιώματος στις παραπάνω σχέσεις δίνει

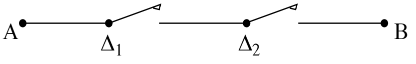
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B) \quad \text{και} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B - A \cap B)$$

που συνεπάγουν το προσθετικό θεώρημα.

Το θεώρημα 1.5 αποτελεί σημαντική γενικοποίηση του 3. αξιώματος δεδομένου, ότι επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας της ένωσης δύο όχι κατ' ανάγκην ασυμβίβαστων γεγονότων, δηλαδή ακόμα και αν $A \cap B \neq \emptyset$.

Παράδειγμα 1.12.

Για το παρακάτω κύκλωμα που αποτελείται από δύο διακόπτες Δ_1, Δ_2 σε σειρά



δίνονται οι πιθανότητες $P(\omega_1) = 0{,}5$, $P(\omega_2) = 0{,}3$, $P(\omega_1 \cap \omega_2) = 0{,}1$, όπου ω_i = "Διακόπτης Δ_i ανοικτός". Να υπολογιστεί η πιθανότητα διακοπής μεταξύ των σημείων A και B και να δοθεί ο δειγματοχώρος του πειράματος.

Συμβολίζοντας με Δ: "διακοπή μεταξύ A και B" έχουμε

$$\Delta = \omega_1 \cup \omega_2 \Rightarrow P(\Delta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{προσθετικό θεώρημα}}}{=} P(\omega_1) + P(\omega_2) - P(\omega_1 \cap \omega_2) = 0{,}7$$

Ο δειγματοχώρος είναι $S = (\overline{\omega}_1 \cap \overline{\omega}_2,\ \overline{\omega}_1 \cap \omega_2,\ \omega_1 \cap \overline{\omega}_2,\ \omega_1 \cap \omega_2)$. Ας σημειωθεί, ότι ο καθορισμός ενός αποτελέσματος του πειράματος, δηλ. ο καθορισμός ενός δειγματοσημείου, απαιτεί εδώ τον προσδιορισμό της κατάστασης –ανοικτός, κλειστός– και των δύο διακοπτών.

Τέλος το προσθετικό θεώρημα εύκολα γενικεύεται για n γεγονότα, π.χ. για $n=3$ έχουμε

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

Παράδειγμα 1.13.

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των γεγονότων που σχηματίστηκαν στο Παράδειγμα 1.10, αν γνωρίζουμε ότι:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = P(A \cap \Gamma) = P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{5}$$

και

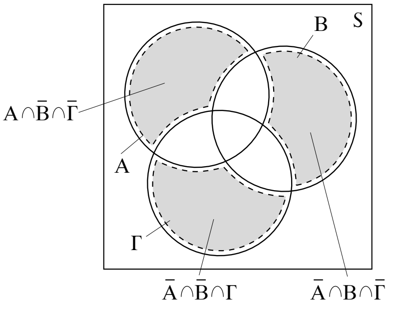
$$P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{10}.$$

Λύση:

1. Από τον προηγούμενο τύπο έχουμε:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{6}$$

2. Έχουμε την ένωση τριων ασυμβίβαστων γεγονότων και επομένως αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα του καθενός και στη συνέχεια να τις αθροίσουμε σύμφωνα με το αξίωμα 3. Για το καθένα από τα γεγονότα έχουμε με την βοήθεια του αντίστοιχου διαγράμματος Venn που παρατίθεται



$$A \cap \overline{B} \cap \overline{\Gamma} = [A - A \cap B] - A \cap \Gamma$$

Εφαρμογή του θεωρήματος 1.4 δίνει

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B} \cap \overline{\Gamma}) &= P(A - A \cap B) - P([A - A \cap B] \cap A \cap \Gamma) \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma - A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Ανάλογα έχουμε

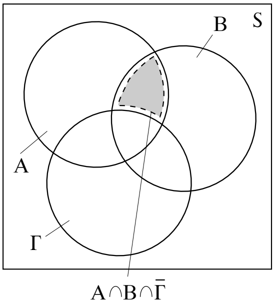
$$P(\overline{A} \cap B \cap \overline{\Gamma}) = P(B) - P(B \cap A) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \Gamma) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{5}$$

Επομένως η συνολική πιθανότητα να εμφανισθεί ένα ακριβώς από τα γεγονόταν είναι $\frac{1}{30} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$.

3. Πρόκειται πάλι για την ένωση τριων ασυμβίβαστων γεγονότων.
Για το πρώτο εξ' αυτών ισχύει:

$$A\cap B\cap \overline{\Gamma} = A\cap B - A\cap B\cap \Gamma$$



Εφαρμογή του θεωρήματος 1.4 δίνει

$$P(A\cap B\cap \overline{\Gamma}) = P(A\cap B) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

Ανάλογα έχουμε

$$P(A\cap \overline{B}\cap \Gamma) = P(A\cap \Gamma) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A}\cap B\cap \Gamma) = P(B\cap \Gamma) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

Επομένως η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς δύο από τα γεγονότα

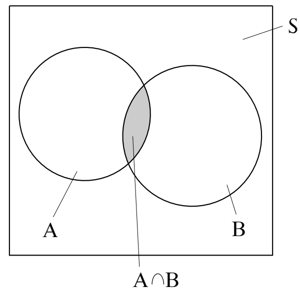
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

4. Από το θεώρημα 1.1 έχουμε $P(\overline{A\cap B\cap \Gamma}) = 1 - P(A\cap B\cap \Gamma) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.
Άρα η πιθανότητα να μην εμφανιστούν στην ίδια δοκιμή και τα τρία γεγονότα είναι $\frac{9}{10}$.

1.5. Δεσμευμένη πιθανότητα ή πιθανότητα υπό συνθήκη

Στη μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου συχνά παρουσιάζεται η ανάγκη του υπολογισμού της πιθανότητας της τομής δύο ή και περισσοτέρων γεγονότων. Ήδη στο προσθετικό θεώρημα για 2 γεγονότα A, B παρουσιάστηκε η πιθανότητα $P(A\cap B)$, ενώ σε γενικεύσεις του για $n > 2$ απαιτείται ο υπολογισμός της πιθανότητας της τομής περισσοτέρων γεγονότων. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα στις περιπτώσεις αυτές είναι το κατά πόσον η πιθανότητα της τομής μπορεί να υπολογιστεί από τις δεδομένες πιθανότητες των γεγονότων που την αποτελούν, π.χ. κατά πόσον το $P(A\cap B)$ μπορεί να υπολογιστεί από το $P(A)$ και $P(B)$. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ένα φαινομενικά διαφορετικό πρόβλημα, του οποίου όμως η λύση θα μας απαντήσει και το παραπάνω ερώτημα.

Δοθέντων ενός χώρου πιθανοτήτων (S, S^*, P) και δύο γεγονότων $A, B \in S^*$ ποια η πιθανότητα εμφάνισης του A, εάν γνωρίζουμε ότι το γεγονός B έχει ήδη συμβεί; Την ζητούμενη πιθανότητα εμφάνισης του A υπό την δέσμευση, συνθήκη, ότι το B έχει ήδη συμβεί, θα συμβολίζουμε με $P(A|B)$ και θα ονομάζουμε **δεσμευμένη πιθανότητα ή πιθανότητα υπό συνθήκη**, σε αντίθεση με την μέχρι τώρα μελετηθείσα αδέσμευτη πιθανότητα $P(A)$. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα Venn που δίνεται πιο κάτω, η δέσμευση "συνέβη το B" οδηγεί σε μία μεταβολή, συγκεκριμένα σε μία συρρίκνωση, του αρχικού δειγματοχώρου S στον νέο δειγματοχώρο B. Είναι τώρα προφανές, ότι το γεγονός A μπορεί τότε μόνον να συμβεί, αν το γεγονός B συνέβει λόγω εμφάνισης κάποιου δειγματοσημείου από την επιφάνεια (γεγονός) $A \cap B$.



Παράδειγμα 1.14.

Αν ρίξουμε δύο ζάρια, ποια είναι η πιθανότητα να έρθει ένα 2, όταν

a) δεν δίνεται άλλη πληροφορία,

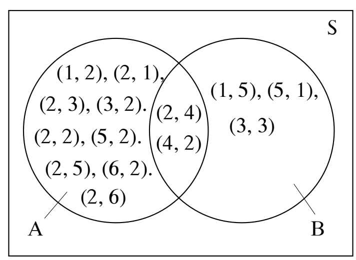
b) είναι γνωστό ότι η ρίψη έφερε άθροισμα 6;

Ο αρχικός δειγματοχώρος είναι

$$S = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

Έχουμε $A = \{$έρχεται 2$\}$

και $B = \{$έρχεται άθροισμα 6$\}$.



a) Από τα 36 ισοπίθανα δειγματοσημεία του S, 11 οδηγούν στο A, άρα η αδέσμευτη πιθανότητα $P(A) = \frac{11}{36}$.

b) Τα δειγματοσημεία που πληρούν το B είναι 5, άρα $P(B) = \frac{5}{36}$. Μόνο δύο από αυτά, τα $(2, 4)$ και $(4, 2)$, οδηγούν ταυτόχρονα και στο A, δηλαδή $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$. Τέλος η πιθανότητα εμφάνισης του A αν γνωρίζουμε ότι συνέβη το B, δηλαδή το μέγεθος $P(A|B)$ υπολογίζεται ως εξής: η πληροφορία ότι συνέβει το B περιορίζει τον αρχικό δειγματοχώρο S των 36 δειγματοσημείων στον υπόχωρο B των 5 δειγματοσημείων. Για να συμβεί το A δοθέντος του B, το B πρέπει να έχει πραγματοποιηθεί μέσω ενός των 2 δειγματοσημείων $(2, 4)$ ή $(4, 2)$, δηλ. 2 ευνοϊκές περιπτώσεις σε σύνολο 5, άρα