ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

ΣΟΦΙΑΣ ΚΑΛΠΑΖΙΔΟΥ
Αναπληρώτριας Καθηγήτριας
Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1994

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις αποτελούν το αντικείμενο ερεύνης ξεχωριστού κλάδου της Θεωρίας Πιθανοτήτων που στόχος του είναι η συστηματική μελέτη των τυχαίων φαινομένων του φυσικού κόσμου. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τέσσερα στάδια στην ανάπτυξη της Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων. Το πρώτο στάδιο είναι η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων με βάση τις παρατηρήσεις. Έχουμε σαν παράδειγμα τα δεδομένα που ο Ticho Brahe επεξεργάσθηκε κάνοντας αστρονομικές παρατηρήσεις ή τα δεδομένα του Gregor Mendel για τη διασταύρωση των φυτών.

Το δεύτερο στάδιο αφορά την επεξεργασία ποσοτικών και εμπειρικών νόμων σαν μια διαδικασία αφαίρεσης μέσω απ' την οποία ο ερευνητής να βρίσκεται στο μισό δρόμο από το τυχαίο φαινόμενο που παρατηρεί προς την ακριβολογημένη εξήγησή του. Μετά από τη διαμόρφωση των εμπειρικών νόμων εμφανίζεται η αναγκαιότητα ορισμού μιας μαθηματικής δομής που να μπορεί να εξηγήσει αυτούς τους νόμους. Μια τέτοια δομή πλαισιομένη από μία συλλογή αντιστοιχιών μεταξύ των μαθηματικών συμβολισμών και των αντικειμένων του πραγματικού κόσμου είναι αυτό που ονομάζουμε μοντέλο. Ο όρος μοντέλο σαν παράγωγος της λατινικής λέξης modus (= μέτρο) συνεπάγεται μια αλλαγή στην κλίμακα της αναπαράστασης των πραγματικών καταστάσεων.

Επίσης, είναι γνωστό ότι τα τυχαία ενδεχόμενα χαρακτηρίζουν πολλά φαινόμενα που είναι αντικείμενο μελέτης της Φυσικής και των Βιολογικών, Τεχνικών, Οικονομικών και Κοινωνικών επιστημών. Είναι, πολύ φυσικό να χρησιμοποιηθούν οι πιθανοθεωρητικές μέθοδοι στη μελέτη των τυχαίων φαινομένων. Έτσι, τα αντίστοιχα μοντέλα θα είναι τα στοχαστικά μοντέλα.

Ο ορισμός των στοχαστικών μοντέλων καθώς και η συστηματική μελέτη τους αποτελεί το τρίτο στάδιο της ανάπτυξης της Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων, όπου η στοχαστική ανέλιξη εννοείται σαν το ευρύτερο στοχαστικό μοντέλο που περιγράφει πραγματικά φαινόμενα που εξελίσσονται με βάση τους νόμους του τυχαίου (Doob, "What is a stochastic process?" Amer. Math. Monthly 49, 648–653). Τέλος, το τέταρτο στάδιο είναι η χρησιμοποίηση των στοχαστικών μοντέλων στη γενική πρόοδο της γνώσης. Έχουμε σαν παράδειγμα τους νόμους του Mendel στη Γενετική που ώθησαν τις γνώσεις γύρω από το μηχανισμό της κληρονομικότητας.

Το βιβλίο αυτό περιέχει οκτώ κεφάλαια και αποτελεί μέρος των μαθημάτων που δίδαξα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης στα τελευταία χρόνια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η έννοια της στοχαστικής εξάρτησης με βάση την αξιωματική θεμελίωση του A.N. Kolmogorov. Κύρια μορφή στοχαστικής εξάρτησης που παρουσιάζεται σ' αυτό το βιβλίο είναι η Μαρκοβιανή εξάρτηση με όλες της τις πτυχές, σε διακριτό και συνεχή χώρο καταστάσεων. Συνέπεια αυτού είναι η διευκόλυνση στην κατανόηση των γενικεύσεών της όπως: οι ανελίξεις με πολυδιάστατο μήκος του παρελθόντος, η θεωρία διαχύσεως, η θεωρία ανανέωσης, η θεωρία δυναμικού κ.ά.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι οι πιθανοθεωρητικές, πλαισιομένες ιδίως από τις αλγεβρικές και γραφικές μεθόδους για τη διακριτή παράμετρο, και από τις αναλυτικές μεθόδους για τη συνεχή παράμετρο. Οι διδακτικές μέθοδοι παρουσίασης του κειμένου είναι κυρίως η ευρετική και η επαγωγική, όπου τα παραδείγματα παίζουν βοηθητικό ρόλο στην κατανόηση των αφηρημένων εννοιών.

Θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Τερζίδη Νικόλαο που ήταν ο πρώτος αναγνώστης αυτού του κειμένου. Στη συνεργάτιδά μου, Δεσποινίδα Γκανάτσιου Χρυσούλα οφείλω πολλές επεξεργασίες μαθηματικών όρων που εμφανίζονται στο βιβλίο αυτό. Την ευχαριστώ θερμά.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους καθηγητές κυρίους Iosifescu Marius Vincentiu και Kendall David George για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις γύρω από τις ιστορικές αναδρομές που αναφέρονται στο κείμενο αυτό, καθώς και για το πλούσιο διδακτικό υλικό που μου προσέφεραν.

Ευχαριστώ θερμά την κ. Ναταλία Γαβριηλίδου και τον κ. Φάκκα Χρίστο για την επιμέλεια και προσεκτική φροντίδα του κειμένου. Τέλος στο Τυπογραφείο Π. Ζήτη οφείλω την ευσυνειδησία και την εξαιρετική προσπάθεια που κατέβαλε στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 1991 *Σοφία Καλπαζίδου*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο V

Κεφάλαιο VI

Κεφάλαιο VII

Κεφάλαιο VIII

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗΣ

1. Εισαγωγή

Η Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων έχει ως αντικείμενο μελέτης τις οικογένειες τυχαίων μεταβλητών $\{\xi_t\}$, όπου t είναι μια παράμετρος ενός διαταγμένου συνόλου T, ενώ οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών ξ_t ανήκουν σ' ένα σύνολο K. Όλες οι τυχαίες μεταβλητές ξ_t, $t\in T$, θεωρούνται ορισμένες σ' ένα κοινό χώρο πιθανοτήτων $\{\Omega, F, P\}$.

Για παράδειγμα, εάν $T=\{1, 2, \dots\}$ τότε οι ξ_t, $t\in T$, μπορούν να ορίζονται από τα αποτελέσματα επαναλήψεων ενός πειράματος όπως η ρίψη ενός ζαριού οπότε το σύνολο K είναι το $\{1, 2, \dots, 6\}$. Γενικά, η ξ_t εκφράζει την κατάσταση ενός συστήματος (φυσικό, βιολογικό κ.λπ.) στη χρονική στιγμή t, $t\in T$, όπου $T\subseteq R$. Μας ενδιαφέρουν μόνον εκείνα τα συστήματα που εξελίσσονται στοχαστικά, δηλαδή στη θέση των διαδοχικών καταστάσεων $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$, όπου $t_1<t_2< \dots <t_n$, $n\geq 1$, $t_i\in T$ με $i=1, \dots, n$, γνωρίζουμε μόνο τις πεπερασμένες κοινές κατανομές

$$P(\xi_{t_1} = i_1, \dots, \xi_{t_n} = i_n) = p_{t_1,\dots,t_n}(i_1, \dots, i_n) \tag{1.1}$$

Η συλλογή των πιθανοτήτων (1.1) καλείται **νόμος της χρονικής εξέλιξης** του συστήματος (παρ' όλο που η παράμετρος t δεν ερμηνεύεται πάντοτε σαν χρονική στιγμή).

Παίρνοντας υπόψη ότι τα γεγονότα $\{\xi_{t_1}=i_1, \dots, \xi_{t_n} = i_n, \xi_{t_{n+1}} = i_{n+1}\}$, όπου $i_1, \dots, i_{n+1}\in K$, $n\geq 1$, είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους, όταν η κατάσταση i_{n+1} διατρέχει το K, είναι το γεγονός $\{\xi_{t_1} = i_1, \dots, \xi_{t_n}=i_n\}$, τότε επαληθεύονται οι εξής συνθήκες συμβιβαστικότητας:

$$\sum_{i_1} p_{t_1\dots t_n}(i_1, \dots i_n) = p_{t_2\dots t_n}(i_2, \dots, i_n), \tag{1.2}$$

....

$$\sum_{i_k} p_{t_1 \dots t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n} (i_{1,\dots,} i_{k-1}, i_k, i_{k+1,} \dots, i_n) =$$
$$= p_{t_1 \dots t_{k-1}, t_{k+1}, \dots t_n} (i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n)\,, \quad 1 < k \le n\,,$$
$$\sum_{i_n} p_{t_1 \dots t_n} (i_1, \dots, i_n) = p_{t_1 \dots t_{n-1}} (i_1, \dots, i_{n-1})\,.$$

Αντίστροφα, κάνοντας χρήση γνωστού θεωρήματος του Kolmogorov για την ύπαρξη χώρου πιθανότητας, αποδεικνύεται ότι η επαλήθευση του συστήματος (1.2) από μια οικογένεια πεπερασμένων κοινών κατανομών $p_{t_1 \dots t_n}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \ge 1$, έχει σαν επακόλουθο την ύπαρξη μιας συλλογής τυχαίων μεταβλητών, που ορίζουν μια στοχαστική ανέλιξη, έτσι ώστε οι πεπερασμένες κατανομές της να είναι οι αρχικά δεδομένες. Άρα, το θεώρημα του Kolmogorov θεμελιώνει αυστηρά την έννοια της στοχαστικής ανέλιξης.

Σημειώνουμε ότι, από το νόμο της χρονικής εξέλιξης ενός συστήματος έπεται ο λεγόμενος **υπό συνθήκη νόμος της χρονικής εξέλιξης** του συστήματος, δηλαδή οι υπό–συνθήκη κατανομές

$$P\,(\xi_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid \xi_{t_n} = i_n, \dots, \xi_{t_1} = i_1), \qquad i_{1, \dots,}\, i_{n+1} \in K.$$

Πράγματι, κάθε υπό–συνθήκη κατανομή γράφεται

$$\frac{P\,(\xi_{t_1} = i_{1, \dots,}\, \xi_{t_n} = i_{n,}\, \xi_{t_{n+1}} = i_{n+1})}{P(\xi_{t_1} = i_{1, \dots,}\, \xi_{t_n} = i_n)}\,,$$

όσες φορές ο παρονομαστής δε μηδενίζεται.

Αντίστροφα, η γνώση του υπό–συνθήκη χρονικού νόμου και της αρχικής κατανομής του συστήματος επιτρέπει να βρούμε το χρονικό νόμο της εξέλιξης του συστήματος διότι:

$$\begin{aligned} &P(\xi_{t_1} = i_{1, \dots,}\, \xi_{t_n} = i_n) \\ &\quad = P(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, \xi_{t_1} = i_1) \times \\ &\quad \times P(\xi_{t_{n-1}} = i_{n-1} \mid \xi_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, \xi_{t_1} = i_1) \times \dots \times \\ &\quad \times P\,(\xi_{t_2} = i_2 \mid \xi_{t_1} = i_1)\, P(\xi_{t_1} = i_1)\,. \end{aligned}$$

2. Ταξινόμηση των στοχαστικών ανελίξεων

Από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι τα κύρια στοιχεία που ορίζουν μια στοχαστική ανέλιξη $\{\xi_t, t \in T\}$ είναι:

(i) το σύνολο K των τιμών των τυχαίων μεταβλητών ξ_t, $t \in T$, που καλείται συνήθως **χώρος καταστάσεων**,

(ii) το σύνολο των τιμών της παραμέτρου t, που το συμβολίζουμε με T και ονομάζεται **παραμετρικός χώρος**,

(iii) οι **σχέσεις εξάρτησης** που συνδέουν τις μεταβλητές ξ_t, $t \in T$.

Όπως, έχουμε ήδη σημειώσει, ο χώρος καταστάσεων K είναι ο χώρος απ' όπου όλες οι τυχαίες μεταβλητές της ανέλιξης παίρνουν τιμές. Όταν το σύνολο K έχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων τότε η ανέλιξη καλείται ανέλιξη με πεπερασμένο ή διακριτό σύνολο καταστάσεων, αντίστοιχα. Όταν το σύνολο K είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών R, τότε έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη με πραγματικές τιμές ή συνεχή χώρο καταστάσεων. Επίσης, όταν το σύνολο K είναι ένας κ–διάστατος Ευκλείδειος χώρος ή ένας συμπαγής (τοπολογικός) χώρος, τότε έχουμε μία κ–διανυσματική ανέλιξη ή μια ανέλιξη με συμπαγή χώρο καταστάσεων, αντίστοιχα.

Ο χώρος T των παραμέτρων μπορεί να είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο ή ένα υποσύνολο του R. Στην πρώτη περίπτωση η συλλογή $\{\xi_t, t \in T\}$ καλείται ανέλιξη με διακριτό χρόνο ή αλυσίδα, οπότε προτιμούμε το συμβολισμό $\{\xi_n, n=0, 1, \ldots\}$. Στη δεύτερη περίπτωση ο χώρος T είναι είτε το σύνολο $[0, +\infty)$ είτε ένα οποιοδήποτε συναφές υποσύνολο του R και η ανέλιξη καλείται ανέλιξη με συνεχή χρόνο.

Υπάρχουν ενδιαφέρουσες κλάσεις στοχαστικών ανελίξεων, όπου το σύνολο T δεν είναι σύνολο πραγματικών αριθμών, οπότε η ερμηνεία της παραμέτρου $t \in T$, σαν χρονική στιγμή δεν ισχύει (βλέπε Karlin [37])

Παράδειγμα 1. 1. Θέτοντας $T=\{1, 2, \ldots\}$ και ξ_n = το αποτέλεσμα της n–στής ρίψης ενός ζαριού, έχουμε $K=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Μια τυπική πραγματοποίηση της ανέλιξης (η μια συγκεκριμένη συμπεριφορά της ανέλιξης) (μπορεί να είναι η ακολουθία $\{4, 1, 5, 6, 6, 3, 2, 4, \ldots\}$ όπως εμφανίζεται στο Σχήμα 1.

Εδώ οι τυχαίες μεταβλητές ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σχήμα 1

Παράδειγμα 1. 2. Ένα παράδειγμα στοχαστικής ανέλιξης, με συνεχή χρόνο $t \in [0, +\infty)$, είναι η **ανέλιξη Poisson**. Οι τυχαίες μεταβλητές της ανέλιξης αυτής ορίζονται ως εξής:

$\xi_t =$ ο αριθμός πραγματοποιήσεων ενός συγκεκριμένου γεγονότος σε ορισμένο χρονικό διάστημα (για παράδειγμα από τη στιγμή 0 μέχρι τη στιγμή t).

Για παράδειγμα, η ξ_t μπορεί να είναι ο αριθμός των ατυχημάτων στο χρονικό διάστημα $(0, t)$, που συμβαίνουν σ' ένα κόμβο κυκλοφορίας. Επίσης η ξ_t μπορεί να είναι ο αριθμός των σωματιδίων, που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή στο διάστημα $(0, t)$ ή ο αριθμός των τηλεφωνικών συνδιαλέξεων, που πραγματοποιούνται σε μια πόλη σ' ένα χρονικό διάστημα κ.λπ.

Τα στοιχεία της ανέλιξης Poisson είναι ο χώρος καταστάσεων $K = = \{0, 1, 2, \dots\}$, ο χώρος των παραμέτρων $T=[0, +\infty)$, ενώ οι συναρτήσεις $\xi_{(.)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, είναι αύξουσες και σκαλωτές όπως στο Σχήμα 2.

Τα παραπάνω παραδείγματα ανελίξεων Poisson επαληθεύουν την αρχή των "αραιών γεγονότων", δηλαδή, έχουμε την περίπτωση πολλών πειραμάτων Bernoulli με μικρή πιθανότητα επιτυχίας, όπου ο αναμενόμενος αριθμός των επιτυχιών είναι σταθερός. Μ' αυτές τις προϋποθέσεις, Σχήμα 2

από γνωστό θεώρημα, προκύπτει ότι ο αριθμός των πραγματοποιήσεων του αναζητούμενου γεγονότος ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Υποθέτουμε ότι:

α) οι αριθμοί πραγματοποιήσεων του συγκεκριμένου γεγονότος σε δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι,

β) η τυχαία μεταβλητή $\xi_{t_0+t}-\xi_{t_0}$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική στιγμή t (όχι από τη t_0 ή την τιμή ξ_{t_0}),

γ) αποκλείουμε τις περιπτώσεις όπου δύο ή περισσότερα γεγονότα συμβαίνουν συγχρόνως.

Έτσι, οδηγούμαστε στο να θεωρήσουμε τα εξής αξιώματα για τον ορισμό μιας ανέλιξης Poisson $\{\xi_t\}$:

(i) Η πιθανότητα να συμβαίνει το γεγονός (όπως ένα ατύχημα ή η εκπομπή ενός σωματιδίου από μια ραδιενεργό πηγή ή μια τηλεφωνική συνδιάλεξη σε μια πόλη κ.λπ.) τουλάχιστον μία φορά στο χρονικό διάστημα μήκους h είναι $p(h) = ah+O(h)$, $a > 0$, $h \to 0$ $\Big($γενικά ο συμβολισμός $g(t)=0(t)$, $t \to 0$, σημαίνει μια ισοδύναμη γραφή της σχέσης $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{g(t)}{t} = 0\Big)$.

(ii) Η πιθανότητα να συμβαίνουν δύο ή περισσότερα γεγονότα σ' ένα διάστημα μήκους h είναι O(h).

Έστω $P_m(t)$ = η πιθανότητα ακριβώς m ενδεχόμενα συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα (0, t), δηλαδή

$$P_m(t) = \Pi\iota\theta\ (\xi_t{=}m), \quad m=0, 1, 2, \ldots$$

Τότε

$$P_m(t) = \frac{a^m t^m}{m!} e^{-at}.$$

Άρα, για κάθε t, η τυχαία μεταβλητή ξ_t ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο at. Επίσης, ο αναμενόμενος αριθμός πραγματοποιήσεων του γεγονότος στο χρονικό διάστημα (0, t) είναι at.

Παρατήρηση. Στην περίπτωση που η $\xi_.$=ο αριθμός των ερυθρών κυττάρων σε μία δεδομένη ποσότητα (cm^3) αίματος, η χρονική παράμετρος αντικαθίσταται από μία παράμετρο χώρου. Τυπικά, έχουμε την περίπτωση ενός αριθμού (πεπερασμένου ή άπειρου) σημείων, που είναι τοποθετημένα σ' έναν Ευκλείδειο χώρο E πεπερασμένης διάστασης. Εάν η ξ_R συμβολίζει τον αριθμό των σημείων, που υπάρχουν σε μία περιοχή $R \subset E$ υποθέτουμε αξιωματικά ότι η ξ_R είναι τυχαία μεταβλητή. Τότε, η συλλογή $\{\xi_R\}$ τυχαίων μεταβλητών, όπου R είναι στοιχείο της κλάσης υποσυνόλων του E, καλείται ανέλιξη Poisson, όταν επαληθεύονται τα εξής αξιώματα:

(1) Ο αριθμός των σημείων σε μη–τεμνόμενες περιοχές ορίζει ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(2) Για κάθε περιοχή R πεπερασμένου όγκου V(R), η ξ_R ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda V(R)$, όπου λ είναι σταθερά ανεξάρτητη από το μέγεθος και τη μορφή της R.

Τέτοιου είδους ανελίξεις Poisson χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που σχετίζονται με την κατανομή των άστρων ή γαλαξιών στο διάστημα, του φυτικού ή ζωϊκού κόσμου πάνω στον πλανήτη μας, των βακτηριδίων σ' ένα δείγμα κ.λπ.

Παράδειγμα 1.3. Ένα παράδειγμα στοχαστικής ανέλιξης με συνεχή χρόνο και συνεχή χώρο των καταστάσεων είναι η ανέλιξη της **κίνησης Brown** (ή ανέλιξη Wiener–Bachelier ή Wiener–Einstein). Αυτή η ανέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Εάν $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $t_i \in R$, $i=1, 2, \ldots , n$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \ldots , \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

(ii) Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}$, $t_2 > t_1$, εξαρτάται μόνο από τη διαφορά t_2-t_1, $t_2 > t_1$.

(iii) Πιθ $(\xi_t - \xi_s \leq x) = [2c\pi(t-s)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2c(t-s))\,du$,

όπου $t > s$ και c είναι μία θετική σταθερά.
Εάν υποθέσουμε ότι $\xi_0=0$, τότε η μέση τιμή $E(\xi_t)=0$ και η διασπορά $\sigma^2(\xi_t)=ct$. Αποδεικνύεται ότι ο υπό–συνθήκη νόμος της ανέλιξης είναι:

$$\text{Πιθ}\,(\xi_t \leq x \mid \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_n} = x_n) =$$
$$= [2c\pi(t-t_n)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{x-x_n} \exp(-u^2/2c(t-t_n))\,du,$$

όπου $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$.

3. Η στοχαστική εξάρτηση

Όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 2, οι σχέσεις εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών που αποτελούν μια στοχαστική ανέλιξη προσδιορίζουν ένα τρίτο κριτήριο, που είναι το κυριότερο, για την ταξινόμηση των στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι, η απλούστερη περίπτωση είναι οι ανελίξεις $\{\xi_n, n\in \mathbb{N}\}$, όπου οι τυχαίες μεταβλητές ξ_n, $n\in \mathbb{N}$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Αυτού του είδους οι ανελίξεις αποτελούν το αντικείμενο των κλασσικών οριακών θεωρημάτων της Θεωρίας Πιθανοτήτων (βλέπε Κουνιάς & Καλπαζίδου [45]).
Ενδιαφέρον είναι να σημειώσουμε ότι, ξεκινώντας από ανελίξεις $\{\xi_n, n\in \mathbb{N}\}$, όπου η στοχαστική εξάρτηση είναι απούσα, δηλαδή, οι τυχαίες μεταβλητές ξ_n, $n\in \mathbb{N}$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, μπορούμε να κατασκευάσουμε ανελίξεις όπου οι σχέσεις εξάρτησης είναι πιο σύνθετες. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\{S_n, n\in \mathbb{N}\}$, όπου

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

τότε διαπιστώνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές S_n, $n\in \mathbb{N}$, δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Το είδος εξάρτησης των τυχαίων μεταβλητών S_n, $n\in \mathbb{N}$, είναι η αμέσως επόμενη περίπτωση στη σειρά της συνθετότητας και ονομάζεται **Μαρκοβιανή εξάρτηση**.

Η Μαρκοβιανή εξάρτηση χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις:

$$\text{Πιθ}\,(S_{n+1} < x \mid S_i, 1 \leq i \leq n) = \text{Πιθ}\,(S_{n+1} < x \mid S_n),$$

όπου $x\in R$, n=1, 2, …. Με άλλα λόγια, όλο το παρελθόν της εξέλιξης του συστήματος ανάγεται στην κατάσταση της τελευταίας χρονικής στιγμής, που παρατηρήθηκε. Γι' αυτό το λόγο λέγεται ότι το σύστημα είναι χωρίς μνήμη. Γενικότερα, στην περίπτωση των στοχαστικών ανελίξεων με συνεχή παράμετρο $t \in T \subset \mathbb{R}$, οι Μαρκοβιανές εξισώσεις μεταφράζονται τυπικά στις σχέσεις:

$$\text{Πιθ}\,(S_t \in B \mid S_{t_1} = x_1, S_{t_2} = x_2, \ldots, S_{t_n} = x_n) = \text{Πιθ}\,(S_t \in B \mid S_{t_n} = x_n), \tag{1.4}$$

όπου $t_1 < \ldots < t_n < t$ και το B είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα της πραγματικής ευθείας (σύνολο Borel).

Η ανέλιξη Poisson και η ανέλιξη της κίνησης του Brown αποτελούν δύο παραδείγματα Μαρκοβιανών ανελίξεων, δηλαδή ανελίξεων που ικανοποιούν τις σχέσεις (1.4). Εδώ, μπορούμε να σημειώσουμε ότι η Μαρκοβιανή εξάρτηση, παρ' όλο που έχει ορισθεί από τον Markov το 1906, έχει καθιερωθεί στα Μαθηματικά σαν μια από τις πιο παραγωγικές έννοιες. Έτσι η Μαρκοβιανή εξάρτηση έχει αναπτυχθεί σ' όλη την πληρότητά της στα πλαίσια των Στοχαστικών Μαθηματικών (Στοχαστική Ανάλυση, Θεωρία Δυναμικού, Θεωρία αριθμών κ.λπ.). Στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά χρησιμοποιείται στη Δημογραφία, στο δειγματοσκοπικό έλεγχο ποιότητας των βιομηχανικών προϊόντων, στο Marketing, στην Κοινωνιολογία, στη Βιολογία και στις Ιατρικές Επιστήμες, στα ασφαλιστικά προβλήματα, στις Επιχειρησιακές Έρευνες, στη Γεωφυσική, στη Θερμοδυναμική, στη Γεωγραφία κ.λπ.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην ακολουθία $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, που ορίσθηκε στις σχέσεις (1.3). Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές S_n, $n \in \mathbb{N}$, ικανοποιούν μία δεύτερη ιδιότητα: οι αυξήσεις S_1, $S_2 - S_1$, …, $S_{n+1} - S_n$, … είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Έτσι λοιπόν, είναι φυσικό η ακολουθία $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ να ονομαστεί **ανέλιξη με ανεξάρτητες αυξήσεις**.

Αντίστροφα, προκύπτει αμέσως ότι κάθε ανέλιξη $(\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ με ανεξάρτητες αυξήσεις είναι ακολουθία μερικών αθροισμάτων μιας ακολουθίας ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών.

Γενικότερα, στην περίπτωση της συνεχούς παραμέτρου $t \in T \subset R$, ορίζουμε την ανέλιξη με ανεξάρτητες αυξήσεις $\{S_t, t \in T\}$ από την ιδιότητα ότι οι διαφορές

$$S_{t_2} - S_{t_1},\ S_{t_3} - S_{t_2}, \ldots,\ S_{t_n} - S_{t_{n-1}},$$

είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, για όλες τις δυνατές πεπερασμένες ακολουθίες $(t_1, \ldots, t_n)$, που επαληθεύουν τις ανισότητες $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Η ανέλιξη Poisson και η ανέλιξη της κίνησης Brown είναι παραδείγματα ανελίξεων με ανεξάρτητες αυξήσεις.

Μια άλλη κλάση στοχαστικών ανελίξεων $\{\xi_t, t\in T\}$, όπου $T\subseteq R$, ορίζεται από την ιδιότητα: ο νόμος της χρονικής εξέλιξης να μένει αναλλοίωτος στις μεταθέσεις του χρόνου t, δηλαδή οι πεπερασμένες κοινές κατανομές των διανυσμάτων $(\xi_{t_1+h}, \ldots, \xi_{t_n+h})$ και $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ είναι ίδιες για όλες τις τιμές του $h>0$ και των $t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$. Αυτές οι ανελίξεις καλούνται **αυστηρά στάσιμες**. Η αυστηρή στασιμότητα σημαίνει ότι η ανέλιξη βρίσκεται σε στοχαστική ισορροπία δηλαδή δεν έχουν σημασία οι χρονικές στιγμές που παρατηρείται η ανέλιξη. Ειδικότερα, προκύπτει ότι οι τυχαίες μεταβλητές ξ_t, $t\in T$, είναι ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή). Ένα απλό παράδειγμα αυστηρά στάσιμης ανέλιξης είναι οι εργοδικές Μαρκοβιανές ανελίξεις οι οποίες θα μελετηθούν στο Κεφάλαιο 3.

4. Martingales

Έστω $\{\xi_n, n\in \mathbb{N}\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε οι μέσες τιμές $E(\xi_n)=0$, για κάθε $n\in \mathbb{N}$.
Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$S_n = \xi_1+ \ldots +\xi_n , \quad n\in \mathbb{N}.$$

Τότε, οι σ–άλγεβρες με γεννήτριες $\xi_1, \ldots, \xi_n$ και, αντίστοιχα, $S_1, \ldots, S_n$, είναι ίδιες, ενώ η τυχαία μεταβλητή ξ_{n+1} είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $S_1, \ldots, S_n$, οπότε οι δεσμευμένες μέσες τιμές (σχετικά βλέπε τον ορισμό τους στο σύγγραμμα Κουνιά & Καλπαζίδου [45]) $E(\xi_{n+1} | S_1, \ldots, S_n)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$E(\xi_{n+1} | S_1, \ldots, S_n) = E(\xi_{n+1}) = 0, \qquad \text{σχεδόν παντού,}$$
$$E(\xi_i | S_1, \ldots, S_n) = \xi_i, \quad i=1, \ldots, n, \qquad \text{σχεδόν παντού.} \tag{1.5}$$

Προσθέτοντας τις ισότητες (1.5), προκύπτει ότι:

$$E(S_{n+1} | S_1, \ldots, S_n) = S_n , \quad \text{σχεδόν παντού,}$$

για όλες τις τιμές του $n\in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία $\{S_n, n\in \mathbb{N}\}$ καλείται martingale. Αυτού του είδους οι ανελίξεις εμφανίζονται στα μοντέλα των τυχερών παιχνιδιών (όπως στις ιπποδρομίες, στη ρουλέτα κ.λπ.) όπου η μεταβλητή ξ_n ερμηνεύεται σαν το κέρδος ενός παίχτη στο n–στο παιχνίδι. Τότε το άθροισμα S_n είναι το ολικό κέρδος του παίχτη μετά από n παιχνίδια.
Καλούμε το παιχνίδι δίκαιο αν:

$$E(\xi_1) = 0,\ E(\xi_{n+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \text{ , σχεδόν παντού,}$$

για κάθε $n\in \mathbb{N}$, δηλαδή η ανέλιξη $\{S_n, n\in \mathbb{N}\}$ είναι ένα martingale.

Ο αυστηρός ορισμός ενός martingale διατυπώνεται ως εξής. Έστω (Ω, F, P) ένας χώρος πιθανοτήτων και $\{F_t, t\in T\}$, $T\subset R$ μια οικογένεια υπό – σ–αλγεβρών της F, έτσι ώστε $F_t \subset F_s$, για $t\leq s$.

Η ανέλιξη $\{\eta_t, t\in T\}$ καλείται **martingale** ως προς την οικογένεια $\{F_t, t\in T\}$, αν πληροί τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε $t\in T$, η η_t είναι τυχαία μεταβλητή ως προς τη σ–άλγεβρα F_t.

(ii) Για κάθε $t\in T$, έχουμε $E(|X_t|) < \infty$.

(iii) Για κάθε $t, s\in T$, $t \leq s$, έχουμε $E(\eta_s \mid F_t) = \eta_t$, όπου η $E(\eta_s \mid F_t)$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της η_s ως προς τη σ–άλγεβρα F_t, που ορίζεται από το θεώρημα Radon–Nykodim.

Παράδειγμα 1.4. Έστω, $\{\xi_n, n\in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, έτσι ώστε

$$\text{Πιθ } (\xi_n=1) = p, \quad \text{Πιθ } (\xi_n=-1) = 1-p,$$

για κάθε $n\in \mathbb{N}$. Έστω, επίσης, μια ακολουθία $\{\beta_n, n\in \mathbb{N}\}$ συναρτήσεων ορισμένες στο χώρο $\{-1, 1\}^n$ με τιμές στο $\mathbb{R}^+$ και μια τυχαία μεταβλητή S_0, έτσι ώστε $E(S_0) < \infty$.

Ορίζουμε την ανέλιξη

$$S_{n+1} = S_n+\xi_{n+1}\beta_n (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Τότε η $\{S_n, n\in \mathbb{N}\}$ είναι ένα martingale ως προς τις σ–άλγεβρες με γεννήτριες $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n\in \mathbb{N}$, εάν $p = \frac{1}{2}$.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} E (S_{n+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) &= S_n+E (\xi_{n+1}\cdot\beta_n (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) \\ &= S_n+\beta_n (\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot E (\xi_{n+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) \\ &= S_n+\beta_n (\xi_1, \ldots, \xi_n)\, E (\xi_{n+1}) , \end{aligned}$$

και

$$E (\xi_n) = 2p-1, \quad n\in \mathbb{N}.$$ ❑

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Έστω $P = \{p_{ij} , i, j=0, 1, 2\}$ ένας πίνακας, όπου $p_{ij} \geq 0$, $i, j=0, 1, 2$ και $\sum_j p_{ij}=1$, $i = 0, 1, 2$. Εάν $\mu(P) = \max\limits_{i_1,i_2,j} |p_{i_1j}-p_{i_2j}|$ τότε να δείξετε ότι $\mu(P)=1$ εάν και μόνον εάν ο πίνακας P έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ v & s & t \end{pmatrix},$$

όπου p+q = 1, v+s+t = 1.

1.2. Έστω, $P = \{p_{ij},\ i, j=1, 2, \ldots, m\}$ ένας πίνακας, όπου $p_{j,\,j+1}=1$, j=1, 2, …, m–1, και $p_{m1}=1$.
Να δείξετε ότι τα στοιχεία $p_{ij}(n)$, i, j=1, …, m, του πίνακα P^n, n>1, ικανοποιούν τις σχέσεις (i) $p_{ij}(n) \geq 0$, i, j=1, …, m, και (ii) $\sum_j p_{ij}(n) = 1$, i=1, …, m.

1.3. Έστω ο πίνακας $m \times m$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθεί ο πίνακας P^n, $n > 1$.

1.4. Μία κάλπη περιέχει α άσπρα σφαιρίδια και β μαύρα σφαιρίδια. Μία δειγματοληψία από την κάλπη γίνεται ως εξής: παίρνουμε ένα σφαιρίδιο από την κάλπη και επιστρέφουμε στην κάλπη γ σφαιρίδια ιδίου χρώματος.

Έστω, ξ_n η τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή 0, εάν στη n–στή δειγματοληψία εμφανίζεται άσπρο σφαιρίδιο, και την τιμή 1, εάν στη n–οστή δειγματοληψία εμφανίζεται μαύρο σφαιρίδιο.

Να δείξετε ότι οι τυχαίες μεταβλητές ξ_n, n=1, 2, …, έχουν την ίδια κατανομή.

1.5. Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα έχει τέσσερις λάμπες Λ_1, Λ_2, Λ_3 και Λ_4, που συνδέονται όπως στο παρακάτω σχήμα.

Όταν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, τότε, όλες οι λάμπες φωτίζουν με πιθανότητες p_1=0,5, p_2=0,7, p_3=0,8 και p_4=0,3, αντίστοιχα (όπου η χρονική μονάδα θεωρείται η ώρα). Να προσδιορίσετε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ξ=ο πληθάριθμος του συνόλου που στοιχεία του είναι οι λάμπες που φωτίζουν περισσότερο από μία ώρα.

1.6. Ένα εργοστάσιο έχει 20 μηχανές. Η πιθανότητα να εμφανιστεί βλάβη σε οποιαδήποτε μηχανή είναι 20%. Έστω, ότι ένας εργάτης μπορεί να επιβλέπει συγχρόνως περισσότερες μηχανές. Ποιος, είναι ο μέγιστος αριθμός μηχανών, που μπορεί να επιβλέψει ένας εργάτης έτσι, ώστε με πιθανότητα μεγαλύτερη του 90%, να μην εμφανίσουν βλάβη περισσότερες από δύο μηχανές.

1.7. Έστω, η ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{\xi_n$, n=1, 2, …$\}$ με πεπερασμένες μέσες τιμές $E(\xi_n)$, n=1, 2, …. Να δείξετε ότι η ακολουθία $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, n=1, 2, …, είναι ένα K_n–martingale, όπου K_n είναι η σ–άλγεβρα με γεννήτριες $\xi_1, \ldots, \xi_n$, εάν $E(\xi_n)$=0 για κάθε n=1, 2 ….

1.8. Έστω, οι τυχαίες μεταβλητές ξ_n, n=1, 2, …, έτσι ώστε να είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, οι δε μέσες τιμές τους $E(\xi_n)$=0, n=1, 2, …, και οι διασπορές $\sigma_n^2 = D^2(\xi_n) < \infty$, n=1, 2, ….

Έστω,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$
$$s_n = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2,$$
$$\eta_n = S_n - s_n,$$

όπου n=1, 2, ….

Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{\eta_n$, n=1, 2, …$\}$ είναι ένα K_n–martingale, όπου K_n εκφράζει τη σ–άλγεβρα με γεννήτριες $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

1.9. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές ξ_1, ξ_2 …, που παίρνουν μη–αρνητικές τιμές και είναι ανεξάρτητες, έτσι ώστε οι μέσες τιμές $E(\xi_n)$=1, n=1, 2, …. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\{\eta_n, n=1, 2, \ldots\}$, όπου

$$\eta_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i\,, \quad n=1, 2 \ldots\,,$$

είναι ένα K_n–martingale, όπου K_n ορίζεται όπως στην άσκηση 1.5.

1.10. (Το μοντέλο του Pólya). Πραγματοποιούμε επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες από μία κάλπη, που περιέχει άσπρα και μαύρα σφαιρίδια. Υποθέτουμε ότι μετά από κάθε δειγματοληψία το εξαγόμενο σφαιρίδιο επανέρχεται στην κάλπη μ' ένα επιπλέον σφαιρίδιο ίδιου χρώματος.

Έστω, η_n ο αριθμός των άσπρων σφαιριδίων, που περιέχει η κάλπη μετά από n δειγματοληψίες και έστω, ξ_n η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως εξής:

ξ_n =1, αν στη n–οστή δειγματοληψία εμφανίζεται ένα άσπρο σφαιρίδιο,
= 0, στην αντίθετη περίπτωση.

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία η_n, n=1, 2, …, είναι K_n–martingale (όπου K_n ορίζεται όπως στην άσκηση 1.5) και να υπολογίσετε την πιθανότητα να εμφανιστεί ένα άσπρο σφαιρίδιο στη n–στή δειγματοληψία.

1.11. Έστω $\nu^{(k)}$ η τυχαία μεταβλητή που απαριθμεί τα βήματα μέχρι την πρώτη επιστροφή στην κατάσταση i_k ενός τυχαίου συστήματος, αφού αρχικά είχε βρεθεί στην i_k. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbb{P}\,(\nu^{(k)}>n) \leq (1-d)^n, \quad n=1, 2, 3 \ldots$$

όπου $d = \min p_{jk}$.