# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΤΡΟΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

**Σοφίας Καλπαζίδου**

Καθηγήτριας Τμήματος Μαθηματικών
Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει υπογράφεται από τη συγγραφέα*

ISBN 960-431-805-5



***Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση***

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 03920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920-72.229
*e-mail: info@ziti.gr*

***Βιβλιοπωλείο***

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 0310-203.720, Fax 0310-211.305
*e-mail: sales@ziti.gr*

www.ziti.gr

*Τι ωφελεί να γράψει κανείς κάτι το θαρραλέο,*
*απ' όπου να βγαίνει πως η κατάσταση που βρισκόμαστε*
*είναι βάρβαρη… αν δε φαίνεται ξεκάθαρα*
*για ποιο λόγο φτάσαμε σ' αυτή την κατάσταση…*

*Μπέρτολτ Μπρεχτ*

# *Πρόλογος*

Με την πάροδο πολλών ετών διδασκαλίας της Θεωρίας Πιθανοτήτων στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης αναζητούσαμε την υποστήριξη της θεμελίωσης των πιθανοθεωρητικών εννοιών. Σ' αυτή τη διαδρομή είχαμε τη συναισθηματική δέσμευση της ιστορίας του Τμήματος και της ιστορικής παρουσίας του Κ. Καραθεοδωρή στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, καθώς επίσης και την αντικειμενική ανάγκη να εφοδιάσουμε τους σπουδαστές με στέρεες γνώσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι μία μαθηματική επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη των νόμων των τυχαίων φαινομένων. Η πρώτη απόπειρα αξιωματικής θεμελίωσης αυτής της θεωρίας οφείλεται στον S.N. Bernstein στα 1917 και ανάγεται στην ποσοτική σύγκριση των τυχαίων γεγονότων ως γεγονότα μεγαλύτερης ή μικρότερης πιθανότητας.

Η ιστορική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων οφείλεται στην αξιωματική του A.N. Kolmogorov γύρω στα 1933 και συσχετίζει τη Θεωρία Πιθανοτήτων με τη σύγχρονη Θεωρία Μέτρου και τη Θεωρία Συνόλων. Ο ορισμός της πιθανότητας από τον Kolmogorov εσωκλείει ως ειδικές περιπτώσεις όλους τους προηγούμενους ορισμούς, όπως ο κλασικός ορισμός κατά Laplace των ισοπίθανων γεγονότων και ο στατιστικός ορισμός του ορίου της σχετικής συχνότητας κατά R. von Mises, υπερβαίνοντας όλα τα μειονεκτήματα αυτών των ορισμών.

Αναμφισβήτητα η Θεωρία Πιθανοτήτων ανέπτυξε δικές της μεθόδους και αντικείμενα μελέτης, θεωρητικών και εφαρμοσμένων κατευθύνσεων, όπως η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, οι στατιστικές επιστήμες κ.ά. Οι νόμοι των Πιθανοτήτων είναι νόμοι που χαρακτηρίζουν τις πολυάριθμες συλλογές κινούμενων και αλληλοσυσχετιζόμενων μορίων (όπως εμφανίζονται για παράδειγμα στη μοριακή Φυσική), που έχουν τις δικές τους ιδιότητες και δεν ανάγονται σε αθροίσματα ατομικών κινήσεων.

Για τη Θεωρία Πιθανοτήτων το θεώρημα ύπαρξης πιθανότητας του Kolomogorov είναι θεμελιώδες, ενώ το θεώρημα του Καραθεοδωρή, πάνω στο οποίο στηρίζεται η απόδειξή του, αποκαλύπτει τις βαθύτερες μετροθεωρητικές του ρίζες.

Στον E. Borel οφείλεται η θεώρηση της μετρήσιμης συνάρτησης ως πιθανοθεωρητική έννοια (τυχαία μεταβλητή) και στον Kolmogorov η θεώρηση της κατανομής ως κυρίαρχη πιθανοθεωρητική έννοια.

Η έννοια της κατανομής εκφράζει πολύ καθαρά την Κολμογκοροβιανή αντίληψη για τον τρόπο που μπορούμε να τυποποιήσουμε τα τυχαία φαινόμενα: το τυχαίο δε μπορεί γενικά να εκφραστεί με προσδιοριστικό τρόπο $\xi$, αλλά αυτό που μπορούμε να καταγράψουμε είναι μία «ποσοτική εκτίμηση» του γεγονότος «$\xi \in (-\infty, x)$», δηλαδή τη συνάρτηση κατανομής $F(x) = \Pi\iota\theta\left(\xi \in (-\infty, x)\right)$.
Για την ανάπτυξη της έννοιας της κατανομής, η ερμηνεία της ως παράγωγο μέτρου πιθανότητας στο Θεώρημα των Radon και Nikodym, υπήρξε καθοριστική.

Η μετροθεωρητική πλευρά της Θεωρίας Πιθανοτήτων δεν πρέπει να μας οδηγήσει στην εκτίμηση ότι αυτή η θεωρία ανάγεται σε ειδικό κεφάλαιο της Θεωρίας Μέτρου. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει τα δικά της αντικείμενα μελέτης και τις δικές της χαρακτηριστικές έννοιες. Για παράδειγμα, η στοχαστική ανεξαρτησία είναι μία από τις θεμελιώδεις πιθανοθεωρητικές έννοιες, που όμως δεν υφίσταται στη Θεωρία Μέτρου.

Η επιρροή της Θεωρίας Πιθανοτήτων πάνω στις άλλες θεωρητικές και εφαρμοσμένες επιστήμες υπήρξε αναγκαία και αναθεωρητική. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε την πρόοδο της Μαθηματικής Ανάλυσης, της Φυσικής, της Χημείας, των Φιλοσοφικών επιστημών, των Ιατρικών επιστημών, των Τεχνικών, Οικονομικών και Κοινωνικών επιστημών κ.ά. υπό την ώθηση των απαιτήσεων της Θεωρίας Πιθανοτήτων και των τυπικά εύκολων πιθανοθεωρητικών αλγόριθμων, όπως οι πιθανότητες μετάβασης, οι προδρομικές και οπισθοδρομικές εξισώσεις του Kolmogorov, τα martingales, κ.ά.

Το βιβλίο αυτό περιέχει επτά κεφάλαια. Η κατασκευαστική διαδρομή προς τον ορισμό της πιθανότητας και της κατανομής ακολουθεί τη συνολοθεωρητική και τη μετρική αντίληψη της αξιωματικής του A.N. Kolmogorov. Ως συνέπεια αυτής της παρουσίασης, θεωρήσαμε σκόπιμο να αναπτύξουμε μερικούς μετροθεωρητικούς νόμους σύγκλισης, που χρησιμοποιούνται σε σημαντικά θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, όπως οι νόμοι των μεγάλων αριθμών, αναδεικνύοντας σύντομα μία σύγχρονη θεώρηση αυτών με τη βοήθεια των martingales.

Θέλω να ευχαριστήσω τη συνεργάτιδά μου, Δρ. Γκανάτσιου Χρυσούλα για την πολύτιμη συνεργασία της και όσους με ενθάρρυναν να γράψω αυτό το βιβλίο. Επίσης στο Τυπογραφείο Ζήτη οφείλω στην ευσυνειδησία και τη σοβαρή προσπάθεια που κατέβαλε για την έκδοσή του.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2002 Σοφία Καλπαζίδου

# *Περιεχόμενα*

# Κεφάλαιο Ι
# Κύριες έννοιες θεωρίας συνόλων

*Το σύνολο των γεγονότων, που αντιστοιχούν σ΄ ένα δεδομένο τυχαίο πείραμα, αναπαριστάνεται με φυσιολογικό τρόπο με τη μορφή μιας άλγεβρας Boole. Αυτή η αντιστοιχία αιτιολογεί την παραπέρα διερεύνηση ενός βαθύτερου φορμαλισμού για τη Θεωρία Πιθανοτήτων, που οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η τυποποίηση της στοχαστικής δομής έχει τις αρχές της στη Θεωρία Συνόλων.*

## 1. Άλγεβρες Boole

**Ορισμός 1.** Ονομάζουμε **άλγεβρα Boole** ένα μη-κενό σύνολο $A$, εφοδιασμένο με τρεις πράξεις $\cup$, $\cap$, c, (οι πρώτες δύο είναι διμελείς πράξεις ενώ η τρίτη μονομελής), που ικανοποιούν τα εξής αξιώματα (κατά R. Sikorski):

**1.** $A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
$A \cap B = B \cap A$

**2.** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (προσεταιριστικότητα)
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**3.** $(A \cap B) \cup A = A$ (απορροφητική ιδιότητα)
$A \cap (A \cup B) = A$

**4.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (επιμεριστικότητα)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**5.** $(A \cap A^c) \cup B = B$ (συμπληρωματική ιδιότητα)
$(A \cup A^c) \cap B = B$

για όλα τα στοιχεία $A, B, C \in \mathcal{A}$. ❑

Το απλούστερο παράδειγμα μίας άλβεγρας Boole είναι το σύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ όλων των υποσυνόλων ενός μη-κενού συνόλου $\Omega$. Κατά συνέπεια, εάν $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, τότε $A \cup B$ είναι η ένωση των $A$ και $B$, $A \cap B$ είναι η τομή των $A$ και $B$, και $A^c$ είναι το συμπληρωματικό του $A$.

**Ορισμός 2.** Το στοιχείο $A$ της $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι **περιέχεται** στο στοιχείο $B$ της $\mathcal{A}$ (ή ότι το $A$ είναι μικρότερο του $B$) εάν

$$A \cap B = A .$$ ❑

Αυτή η σχέση είναι μία σχέση μερικής διάταξης στο $\mathcal{A}$, και από το 3ο αξίωμα ισοδυναμεί με τη σχέση

$$A \cup B = B .$$

Θα συμβολίζουμε αυτή τη σχέση διάταξης με

$$A \subset B \quad \text{ή} \quad B \supset A ,$$

και θα χρησιμοποιούμε το «$\subset$» για τη σχέση εγκλεισμού, ενώ το «$\supset$» για τη σχέση της κάλυψης.

**Ορισμός 3.** Το στοιχείο $C \in \mathcal{A}$ ονομάζεται το **ελάχιστο μέγιστο** των στοιχείων $A$, $B \in \mathcal{A}$ εάν:

**1.** $A \subset C$ και $B \subset C$,
**2.** εάν $A \subset X$ και $B \subset X$, τότε $C \subset X$, για κάθε $X \in \mathcal{A}$. ❑

**Ορισμός 4.** Το στοιχείο $D \in \mathcal{A}$ ονομάζεται το **μέγιστο ελάχιστο** των στοιχείων $A, B \in \mathcal{A}$ εάν:

**1.** $D \subset A$ και $D \subset B$,
**2.** εάν $X \subset A$ και $X \subset B$, τότε $X \subset D$, για κάθε $X \in \mathcal{A}$. ❑

**Πόρισμα 1** ***(Ο δυϊκός μετασχηματισμός)***

*Εάν σε μια αληθή πρόταση, όπου εμφανίζονται οι πράξεις $\cap$, $\cup$, $c$ και οι σχέσεις $\subset$ και $\supset$, αντικαταστήσουμε παντού το $\cup$ με το $\cap$, το $\cap$ με το $\cup$, και αφήσουμε το $c$ αναλλοίωτο, καθώς και εάν αντικαταστήσουμε το $\subset$ με το $\supset$, και το $\supset$ με το $\subset$, τότε θα προκύψει μία αληθής πρόταση που θα ονομάζεται* ***δυική πρόταση*** *της αρχικής.*

***Απόδειξη***

Παρατηρούμε ότι το σύστημα των αξιωμάτων του Ορισμού 1 είναι συμμετρικό ως προς τις πράξεις $\cup$ και $\cap$ (δηλαδή τα αξιώματα δεν αλλοιώνονται όταν αλλάζουμε παντού το σύμβολο $\cup$ με το $\cap$, το σύμβολο $\cap$ με το $\cup$, ενώ το σύμβολο c μένει το ίδιο) και επιπλέον κάνουμε χρήση του Ορισμού 2. ❑

**ΠΟΡΙΣΜΑ 2**

*Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία* $(A_i)_{1\le i\le n}\subset \mathrm{A}$, *τα στοιχεία* $A_1\cup\ldots\cup A_n$ *και* $A_1\cap\ldots\cap A_n$, *που συμβολίζονται αντίστοιχα με* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ *και* $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$, *είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένα και είναι ανεξάρτητα από τη διάταξη των στοιχείων.*

***Απόδειξη***

Αυτό προκύπτει άμεσα από τα αξιώματα 1 και 2. ❑

**ΠΟΡΙΣΜΑ 3** ***(Νόμοι ταυτοδυναμίας)***

*Εάν* $A\in \mathrm{A}$, *τότε έχουμε:*

$$A\cup A = A,$$
$$A\cap A = A.$$

***Απόδειξη***

Εφαρμόζουμε τα αξιώματα 3, 4 και εκ νέου το αξίωμα 3, οπότε γράφουμε:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{A})\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) =$$
$$= \big(\mathrm{A}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\big)\cup\big(\mathrm{A}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\big) = \mathrm{A}\cup\mathrm{A}.$$

Με το δυϊκό μετασχηματισμό βρίσκουμε τη δεύτερη ισότητα. ❑

**ΠΟΡΙΣΜΑ 4**

*Η σχέση εγκλεισμού είναι μία σχέση μερικής διάταξης στις άλγεβρες Boole.*

***Απόδειξη***

Η σχέση «$\subset$» ικανοποιεί ιδιότητες, όπως οι ακόλουθες:

1. Η **ανακλαστική ιδιότητα:** $\mathrm{A}\subset\mathrm{A}$, όπως προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 3 και τον Ορισμό 2.
2. Η **αντισυμμετρική ιδιότητα:** από $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$ προκύπτει
$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\ \big(\mathrm{A}=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}\big).$$
3. Η **μεταβατική ιδιότητα:** από $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}\subset\mathrm{C}$ προκύπτει $\mathrm{A}\subset\mathrm{C}$ κάνοντας χρή-

ση του Ορισμού 2 και του αξιώματος 2. ❑

**ΠΌΡΙΣΜΑ 5** ***(Νόμοι μονοτονίας)***

*Για κάθε $A, B, C \in \mathrm{A}$ από τη σχέση $A \subset B$ προκύπτει $A \cup C \subset B \cup C$ και $A \cap C \subset B \cap C$.*

***Απόδειξη***

Έχουμε $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ και $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$, οπότε

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup (\mathrm{C} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{B} \cup \mathrm{C}.$$

Με το δυϊκό μετασχηματισμό βρίσκουμε το δεύτερο νόμο μονοτονίας. ❑

**ΠΌΡΙΣΜΑ 6**

*Ο ελάχιστος μέγιστος και ο μέγιστος ελάχιστος δύο στοιχείων είναι μονοσήμαντα ορισμένοι.*

***Απόδειξη***

Αρκεί να εφαρμόσουμε τους Ορισμούς 3 και 4 και την αντισυμμετρία της σχέσης «$\subset$». ❑

**ΠΌΡΙΣΜΑ 7**

*Σε κάθε άλγεβρα Boole υπάρχουν δύο στοιχεία $\wedge$ και $\vee$, έτσι, ώστε για κάθε $A \in \mathrm{A}$ να ισχύουν:*

$$A \cap A^c = \wedge \quad \text{και} \quad A \cup A^c = \vee. \tag{1}$$

*Το $\wedge$ ονομάζεται **μηδενικό στοιχείο** και το $\vee$ **ολικό στοιχείο**.*

***Απόδειξη***

Έστω $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{A}$. Τότε, από τα αξιώματα 5 και 1 και από τον Ορισμό 2, προκύπτει ότι:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c \subset \mathrm{B},$$

$$\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{A}^c.$$

Αντικαθιστώντας το $\mathrm{B}$ με το $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}^c$ και με το $\mathrm{B} \cup \mathrm{B}^c$ αντίστοιχα, βρίσκουμε:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c \subset \mathrm{B} \cap \mathrm{B}^c,$$

$$\mathrm{B} \cup \mathrm{B}^c \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{A}^c.$$

Αλλάζοντας το $\mathrm{A}$ με το $\mathrm{B}$ και κάνοντας χρήση της αντισυμμετρίας της σχέσης «$\subset$», γράφουμε:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c = \mathrm{B} \cap \mathrm{B}^c,$$

$$A \cup A^c = B \cup B^c\,. \qquad \square$$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 8**

*Το μηδενικό στοιχείο και το ολικό στοιχείο είναι αντίστοιχα το μικρότερο και το μεγαλύτερο στοιχείο της άλγεβρας* $\mathcal{A}$*, ως προς τη σχέση «⊂» μερικής διάταξης της* $\mathcal{A}$*.*

***Απόδειξη***

Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, εφαρμόζοντας τη σχέση (1) και το αξίωμα 5, προκύπτει ότι:

$$\wedge \cup A = A\,,$$

$$\vee \cap A = A\,.$$

Οπότε

$$\wedge \subset A\,,\ A \subset \vee\,. \qquad \square$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $\wedge$ και $\vee$ βρίσκονται σε δυϊκή σχέση.

**ΠΟΡΙΣΜΑ 9**

*Για κάθε* $A \in \mathcal{A}$*, έχουμε:*

$$A \cap \vee = A\,,$$

$$A \cup \vee = \vee\,,$$

*και*

$$A \cup \wedge = A\,,$$

$$A \cap \wedge = \wedge\,.$$

***Απόδειξη***

Αυτές οι ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από το Πόρισμα 8. $\square$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 10**

*Εάν* $A \cap B = \wedge$ *και* $A \cup B = \vee$*, τότε* $B = A^c$*.*

***Απόδειξη***

Από το Πόρισμα 9 και το αξίωμα 4, γράφουμε:

$$B = \wedge \cup B = (A \cap A^c) \cup B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) =$$
$$= \wedge \cap (A^c \cup B) = A^c \cup B\,,$$

δηλαδή $A^c \subset B$.

Εφαρμόζοντας τη δυϊκή σχέση βρίσκουμε ανάλογα $B \subset A^c$, οπότε $B = A^c$. $\square$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 11** ***(Οι σχέσεις de Morgan)***

*Για κάθε* $A, B \in \mathcal{A}$*, έχουμε:*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c ,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c ,$$

***Απόδειξη***

Έστω $C = A^c \cap B^c$. Τότε από τα αξιώματα 4 και 2, τη σχέση (1) και το Πόρισμα 9, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = \\ &= (A \cap A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c \cap B^c) = \\ &= \wedge \cup \wedge = \wedge .\end{aligned}$$

Ανάλογα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= (A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = \\ &= (A \cup B \cup A^c) \cap (A \cup B \cup B^c) = \\ &= \vee \cap \vee = \vee .\end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το Πόρισμα 10, βρίσκουμε $C = (A \cup B)^c$. ❑

Παρατηρούμε αμέσως ότι η τομή μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια της ένωσης και του συμπληρωματικού ως εξής:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c .$$

Ανάλογα, η ένωση μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια της τομής και του συμπληρωματικού ως εξής:

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c ,$$

οπότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\vee = \wedge^c ,$$
$$\wedge = \vee^c .$$

**Ορισμός 5.** Δύο στοιχεία $A, B \in \mathcal{A}$ ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους** εάν

$$A \cap B = \wedge .$$

**Ορισμός 6.** Ονομάζουμε **διαφορά** των στοιχείων $A, B \in \mathcal{A}$ το στοιχείο

$$A - B = A \cap B^c . \qquad ❑$$

Προφανώς,

$$\vee - A = A^c , \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} ,$$

και τα στοιχεία $A$ και $B-A$ είναι ξένα μεταξύ τους.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**

*Η ικανή και αναγκαία συνθήκη να έχουμε*

$$A-B=\wedge$$

*είναι $A \subset B$.*

***Απόδειξη***

*Η συνθήκη είναι ικανή*. Εάν $A \subset B$, τότε:

$$A \cap B^c = (A \cap B) \cap B^c = A \cap (B \cap B^c) =$$
$$= A \cap \wedge = \wedge ,$$

και $$A \cap B^c = A-B .$$

*Η συνθήκη είναι αναγκαία.* Έστω $A-B=A \cap B^c=\wedge$.

Τότε

$$A = A \cup (B \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) =$$
$$= (A \cap B) \cup \wedge = A \cap B ,$$

οπότε $$A \subset B .$$ ❑

**Ορισμός 7.** Ένα στοιχείο $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \wedge$, ονομάζεται **άτομο** εάν για κάθε $B \in \mathcal{A}$ από τη σχέση $B \subset A$ προκύπτει ότι $B=\wedge$ ή $B=A$. ❑

Παρατηρούμε αμέσως ότι εάν $A$ είναι ένα άτομο, τότε για κάθε $B \in \mathcal{A}$ έχουμε $A \subset B$ ή $A \cap B=\wedge$.

**Ορισμός 8.** Ονομάζουμε **υποάλγεβρα Boole** κάθε μη-κενό υποσύνολο $\mathcal{A}_0$ της άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$, που είναι κλειστό ως προς τις ίδιες πράξεις. Δηλαδή, το $\mathcal{A}_0$ ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**1.** εάν $A, B \in \mathcal{A}_0$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_0$,

**2.** εάν $A, B \in \mathcal{A}_0$, τότε $A \cap B \in \mathcal{A}_0$,

**3.** εάν $A \in \mathcal{A}_0$, τότε $A^c \in \mathcal{A}_0$. ❑

Αποδεικνύεται ότι κάθε υποάλγεβρα Boole είναι κλειστή και ως προς την αφαίρεση, δηλαδή εάν $A, B \in \mathcal{A}_0$ τότε $A-B \in \mathcal{A}_0$. Επίσης, $\wedge, \vee \in \mathcal{A}_0$.

Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$ δύο υποάλγεβρες Boole.

**Ορισμός 9.** Ονομάζουμε **ομομορφισμό** κάθε αντιστοιχία $h$ της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{A}'$ που αφήνει τις πράξεις αναλλοίωτες, δηλαδή:

**1.** $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$,

**2.** $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$,

**3.** $h(A^c) = (h(A))^c$,

για κάθε $A, B \in \mathrm{A}$. ❑

Προφανώς η εικόνα $h(\mathrm{A})$ της άλγεβρας Boole $\mathrm{A}$ είναι μία υποάλγεβρα της άλγεβρας $\mathrm{A}'$.

**Ορισμός 10.** Ονομάζουμε **ισομορφισμό** κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $h$ της $\mathrm{A}$ στην $\mathrm{A}'$, που αφήνει τις πράξεις αναλλοίωτες.

## 2. Ιδεώδη και φίλτρα

**Ορισμός 1.** Ονομάζουμε **ιδεώδες** ένα μη-κενό υποσύνολο $\mathrm{J}$ μίας άλγεβρας Boole $\mathrm{A}$, που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**1.** εάν $A, B \in \mathrm{J}$, τότε $A \cup B \in \mathrm{J}$,

**2.** εάν $B \in \mathrm{J}$, $A \subset B$, τότε $A \in \mathrm{J}$. ❑

Προφανώς $\wedge \in \mathrm{J}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση της δυϊκότητας οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

**Ορισμός 2.** Ονομάζουμε **φίλτρο** ένα μη-κενό υποσύνολο $\mathrm{F}$ μίας άλγεβρας Boole $\mathrm{A}$, που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**1.** εάν $A, B \in \mathrm{F}$, τότε $A \cap B \in \mathrm{F}$,

**2.** εάν $B \in \mathrm{J}$ και $B \subset A$, τότε $A \in \mathrm{F}$. ❑

Προφανώς $\vee \in \mathrm{F}$.

Οι αρχές της δυϊκότητας μας επιτρέπουν να ανάγουμε κάθε αποτέλεσμα που αφορά τα φίλτρα σε ανάλογο αποτέλεσμα για τα ιδεώδη. Γι' αυτό το λόγο θα ασχοληθούμε περαιτέρω μόνο με τα φίλτρα.

**Ορισμός 3.** Ονομάζουμε ***κύριο φίλτρο με γεννήτορα*** το στοιχείο $A \in \mathrm{A}$, την οικογένεια όλων των στοιχείων $C \in \mathrm{A}$, με $A \subset C$, που προφανώς είναι ένα φίλτρο.

**Ορισμός 4.** Εάν ένα φίλτρο $\mathrm{F} \neq \mathrm{A}$, τότε ονομάζεται ***γνήσιο φίλτρο.*** Διαφορετικά ονομάζεται **μη γνήσιο φίλτρο**.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**

*Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι ένα φίλτρο* $\mathrm{F}$ *γνήσιο είναι να ικανοποιείται η σχέση* $\wedge \notin \mathrm{F}$.

***Απόδειξη***

*Η συνθήκη είναι ικανή*. Εάν $\wedge \notin \mathrm{F}$ τότε προφανώς $\mathrm{F} \neq \mathrm{A}$.
*Η συνθήκη είναι αναγκαία.* Έστω $\mathrm{F} \neq \mathrm{A}$ και υποθέτουμε ότι $\wedge \in \mathrm{F}$. Τότε από τις σχέσεις $\mathrm{A} \in \mathrm{A}$, $\wedge \in \mathrm{A}$ έπεται, από τον Ορισμό 2, ότι $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$, άρα $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$, που είναι αντίθετο με τη σχέση $\mathrm{F} \neq \mathrm{A}$. ❑

**Ορισμός 5.** Ένα φίλτρο $\mathrm{F} \subset \mathrm{A}$ ονομάζεται **μέγιστο** εάν δεν είναι γνήσιο υποσύνολο κανενός γνήσιου φίλτρου του $\mathrm{A}$. ❑

Έστω $\mathrm{F}$ ένα φίλτρο και έστω $\mathrm{A}$ ένα στοιχείο του $\mathrm{A}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{F}_1$ το σύνολο όλων των στοιχείων $\mathrm{C} \in \mathrm{A}$, με $\mathrm{C} \supset \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$, όπου $\mathrm{B}$ θεωρείται ένα δεδομένο στοιχείο του $\mathrm{F}$.
Προφανώς το $\mathrm{F}_1$ είναι ένα φίλτρο, που επιπλέον, είναι το μικρότερο φίλτρο που περιέχει το $\mathrm{A}$ και όλα τα στοιχεία του $\mathrm{F}$. Τότε το $\mathrm{F}_1$ ονομάζεται *φίλτρο με γεννήτορες τα* $\mathrm{A}$ *και* $\mathrm{F}$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2**

*Ένα γνήσιο φίλτρο* $\mathrm{F}$ *είναι μέγιστο εάν και μόνο εάν από τη σχέση* $A \in \mathrm{A}$ *έπεται* $A \in \mathrm{F}$ *ή* $A^c \in \mathrm{F}$.

***Απόδειξη***

*Η συνθήκη είναι ικανή.* Έστω $\mathrm{F}$ γνήσιο φίλτρο. Θεωρούμε ότι από τη σχέση $\mathrm{A} \in \mathrm{A}$ έπεται $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$ ή $\mathrm{A}^c \in \mathrm{F}$.

Έστω $\mathrm{F}_0$ φίλτρο έτσι, ώστε $\mathrm{F}_0 \supset \mathrm{F}$. Τότε υπάρχει στοιχείο $\mathrm{A} \in \mathrm{F}_0$ και $\mathrm{A} \notin \mathrm{F}$. Αλλά τότε $\mathrm{A}^c \in \mathrm{F}$, άρα $\mathrm{A}^c \in \mathrm{F}_0$. Κατά συνέπεια $\wedge = \mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c \in \mathrm{F}_0$, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 προκύπτει ότι $\mathrm{F}_0 = \mathrm{A}$. Άρα η οικογένεια $\mathrm{F}$ είναι ένα μέγιστο φίλτρο.
*Η συνθήκη είναι αναγκαία.* Έστω $\mathrm{F}$ μέγιστο φίλτρο και έστω $\mathrm{A} \in \mathrm{A}$ έτσι, ώστε $\mathrm{A} \notin \mathrm{F}$.

Τότε προκύπτει ότι το φίλτρο $\mathrm{F}_1$, με γεννήτορες τα $\mathrm{A}$ και $\mathrm{F}$, περιέχει γνήσια το $\mathrm{F}$: $\mathrm{F}_1 \supset \mathrm{F}$. Επειδή η οικογένεια $\mathrm{F}$ είναι ένα μέγιστο φίλτρο, έπεται ότι $\mathrm{F}_1 = \mathrm{A}$. Από τη σχέση $\wedge \in \mathrm{F}_1$ προκύπτει η ύπαρξη ενός στοιχείου $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$ έτσι, ώστε $\wedge \supset \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$. Κατά συνέπεια $\mathrm{B} \cap \mathrm{A} = \wedge$, άρα $\mathrm{B} = \mathrm{A}^c$. ❑

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3**

*Κάθε γνήσιο φίλτρο* $\mathrm{F}$ *περιέχεται σε κάποιο μέγιστο φίλτρο.*

Η απόδειξη δίνεται από το Sikorski χρησιμοποιώντας ένα θεώρημα του Zorn.

## 3. σ-άλγεβρες Boole

Οι πράξεις $\cap$ και $\cup$ μπορούν να επεκταθούν για οποιαδήποτε οικογένεια στοιχείων μιας άλγεβρας Boole.

Έστω $A$ άλγεβρα Boole και έστω $S$ μία μη-κενή οικογένεια στοιχείων της $A$.

**Ορισμός 1.** Ονομάζουμε **ένωση** των στοιχείων $A \in S$ ένα στοιχείο B, που είναι το ελάχιστο μέγιστο των στοιχείων $A \in S$, δηλαδή το B ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**1.** $A \subset B$, για κάθε $A \in S$,

**2.** εάν $A \subset D$, για κάθε $A \in S$, τότε $B \subset D$. ❑

Εφαρμόζοντας τη δυϊκή σχέση οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

**Ορισμός 2.** Ονομάζουμε **τομή** των στοιχείων $A \in S$, ένα στοιχείο C που είναι το μέγιστο ελάχιστο των στοιχείων $A \in S$, δηλαδή το C ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

**1.** $C \subset A$, για κάθε $A \in S$,

**2.** εάν $D \subset A$, για όλα τα $A \in S$, τότε $D \subset C$. ❑

Θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

$$B = \bigcup_{A \in S} A, \quad C = \bigcap_{A \in S} A.$$

Εάν $S = (A_i)_{i \in I}$, τότε θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$B = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad C = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Έστω N το σύνολο των φυσικών αριθμών.

**Ορισμός 3.** Μία άλγεβρα Boole $A$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα Boole** εάν για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \in N} \subset A$ υπάρχει το στοιχείο $\bigcup_{n \in N} A_n \in A$. ❑

**Ορισμός 4.** Ένα ιδεώδες J μιας σ-άλγεβρας Boole ονομάζεται **σ-ιδεώδες** εάν για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in N}\subset J$ συνεπάγεται $\bigcup_{n\in N} A_n\in J$. ❑

Επεκτείνοντας τις έννοιες του ομομορφισμού και του ισομορφισμού στις *σ*-άλγεβρες Boole, αποδεικνύεται ότι η ομομορφική εικόνα και η ισομορφική εικόνα μίας *σ*-άλγεβρας Boole είναι επίσης μία *σ*-άλγεβρα Boole.

## 4. Σώματα

Έστω $\Omega$ ένα μη-κενό σύνολο. Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\Omega$ με $\omega$ και το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\Omega$ με $P(\Omega)$.

**Ορισμός 1.** Ονομάζεται **σώμα υποσυνόλων** του $\Omega$ κάθε μη-κενή οικογένεια $K\subset P(\Omega)$, που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

**1.** εάν $A\in K$, τότε $A^c\in K$,

**2.** εάν $A, B\in K$, τότε $A\cup B\in K$. ❑

### Πορισμα 1

*Εάν $K$ είναι σώμα υποσυνόλων, τότε $\varnothing\in K$ και $\Omega\in K$, όπου $\varnothing$ συμβολίζει το κενό σύνολο.*

***Απόδειξη***

Η οικογένεια $K$ είναι μη-κενή. Έστω $A\in K$. Τότε $A\cup A^c=\Omega\in K$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $\Omega^c=\varnothing$ και εφαρμόζουμε την ιδιότητα 1. ❑

### Πορισμα 2

*Εάν $(A_i)_{1\le i\le n}\subset K$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i\in K$.*

***Απόδειξη***

Πράγματι, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c\in K$, όπου έχουμε εφαρμόσει τις ιδιότητες 1 και 2. ❑

### Πορισμα 3

*Εάν $A, B\in K$, τότε $A-B\in K$.*

***Απόδειξη***

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2, γράφουμε $A-B=A\cap B^c\in K$. ❑

Παρατηρούμε αμέσως ότι ένα σώμα υποσυνόλων είναι μία άλγεβρα Boole. Η σχέση «$\subset$» αντιστοιχεί στη σχέση του εγκλεισμού, το στοιχείο $\wedge$ είναι το κενό σύνολο $\varnothing$, ενώ το $\vee$ είναι το σύνολο $\Omega$. Τέλος, παρατηρούμε ότι τα μονοσύνολα $\{\omega\} \in \mathrm{K}$ είναι άτομα (σύμφωνα με τον Ορισμό 7, της παραγράφου 1).

## 5. *σ*-σώματα

Έστω $\Omega$ ένα μη-κενό σύνολο.

**Ορισμός 1.** Μία μη-κενή οικογένεια $\mathrm{K} \subset \mathrm{P}(\Omega)$ ονομάζεται **σ-σώμα υποσυνόλων** ή **σώμα κατά Borel** εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

**1.** εάν $\mathrm{A} \in \mathrm{K}$, τότε $\mathrm{A}^c \in \mathrm{K}$,

**2.** εάν $(\mathrm{A_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}} \subset \mathrm{K}$, τότε $\bigcup\limits_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}} \mathrm{A_n} \in \mathrm{K}$. ❑

Τα Πορίσματα 1, 2, 3 της προηγούμενης παραγράφου επαληθεύονται και στην περίπτωση των σωμάτων κατά Borel. Τότε έχουμε:

**Πορισμα 1**

*Τα σύνολα $\varnothing$ και $\Omega$ ανήκουν στο $\mathrm{K}$.*

**Πορισμα 2**

*Εάν $(A_n)_{n \in N} \subset \mathrm{K}$, τότε $\bigcap\limits_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}} A_n \in \mathrm{K}$.*

**Πορισμα 3**

*Εάν $A, B \in \mathrm{K}$, τότε $A - B \in \mathrm{K}$.*

**Πορισμα 4**

*Εάν $(A_n)_{n \in N} \subset \mathrm{K}$, τότε $\underline{\lim}_{\mathrm{n} \to \infty} A_n \in \mathrm{K}$ και $\overline{\lim}_{\mathrm{n} \to \infty} A_n \in \mathrm{K}$.*

***Απόδειξη***

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη ιδιότητα του Ορισμού 1 και το δεύτερο πόρισμα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\underline{\lim}_{\mathrm{n} \to \infty} \mathrm{A_n} = \bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \bigcap_{\mathrm{n}=\mathrm{k}}^{\infty} \mathrm{A_n}, \quad \overline{\lim}_{\mathrm{n} \to \infty} \mathrm{A_n} = \bigcap_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \bigcup_{\mathrm{n}=\mathrm{k}}^{\infty} \mathrm{A_n}. \qquad ❑$$

**ΠΟΡΙΣΜΑ 5**

*Εάν* $(A_n)_{n\in N}\subset \mathrm{K}$ *, τότε* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathrm{K}$ *όταν υπάρχει.*

***Απόδειξη***

Έχουμε:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathrm{K} \ . \qquad \square$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6**

*Για κάθε μη-κενή οικογένεια υποσυνόλων* $\mathrm{G}\subset \mathrm{P}(\Omega)$ *υπάρχει το ελάχιστο σ-σώμα υποσυνόλων (που θα το συμβολίζουμε* $\mathrm{K}\ (\mathrm{G})$*) το οποίο περιέχει την* $\mathrm{G}$*.*

***Απόδειξη***

Παρατηρούμε ότι η κλάση $\Sigma$ όλων των *σ*-σωμάτων υποσυνόλων, που περιέχουν την $\mathrm{G}$, είναι μη-κενή (το $\mathrm{P}\ (\Omega)$ είναι ένα *σ*-σώμα αυτής της κλάσης).

Καθώς η τομή $\bigcap\limits_{\mathrm{K}\in\Sigma} \mathrm{K}$ , που είναι ένα *σ*-σώμα κατά Borel που περιέχει την $\mathrm{G}$, είναι το μικρότερο *σ*-σώμα με την ιδιότητα αυτή, τότε

$$\bigcap_{\mathrm{K}\in\Sigma} \mathrm{K} = \mathrm{K}\ (\mathrm{G})\ . \qquad \square$$

**Ορισμός 2.** Μία οικογένεια $\mathrm{G}$ ονομάζεται ***σύστημα γεννητόρων*** για το *σ*-σώμα $\mathrm{K}$ εάν

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}\ (\mathrm{G})\ .$$

***Παράδειγμα*** *(Το σ-σώμα κατά Borel επί του* $R^n$*,* $n=1, 2, \ldots$ *).*

Για $n=1, \Omega=\mathrm{R}$ και

$$\mathrm{G} = \{(-\infty, a), a\in \mathrm{R}\}\ ,$$

συμβολίζουμε με $\mathrm{B}$ ή $\mathrm{B_R}$ το σώμα Borel με οικογένεια γεννητόρων την $\mathrm{G}$, δηλαδή

$$\mathrm{B} = \mathrm{B_R} = \mathrm{K}\left(\{(-\infty, a), a\in \mathrm{R}\}\right)\ .$$

Παρατηρούμε ότι:

(i) Κάθε διάστημα $[a, b) = (-\infty, b)\backslash(-\infty, a)$ ανήκει στο $\mathrm{B}$ για κάθε $b\in \mathrm{R}$.

(ii) Κάθε διάστημα $[a, b] = \bigcap\limits_{n} [a, b+\varepsilon_n)$ ανήκει στο $\mathrm{B}$ όπου $\varepsilon_n \searrow 0$.

(iii) Κάθε διάστημα $(a, b) = (-\infty, b)\backslash(-\infty, a]$ ανήκει στο $\mathrm{B}$.

Για $n > 1$, $\Omega = R^n$ και

$$G_n = \{(-\infty, a_1)\times(-\infty, a_2)\times\ldots\times(-\infty, a_n),\ a_1, \ldots, a_n \in R\}$$

συμβολίζουμε με $B_n$ ή $B_{R^n}$ το σώμα Borel με οικογένεια γεννητόρων την $G$, δηλαδή

$$B_n = B_{R^n} = K\ \{(-\infty, a_1)\times\ldots\times(-\infty, a_n),\ a_i \in R,\ i=1, \ldots, n\}\ .$$

## 6. Θεωρήματα αναπαράστασης

Ας δούμε σ' αυτή την παράγραφο ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις άλγεβρες Boole και τα σώματα υποσυνόλων και, αντίστοιχα, ανάμεσα στις $\sigma$-άλγεβρες Boole και τα $\sigma$-σώματα υποσυνόλων.

**Θεωρημα 1** ***(M. H. Stone)***
*Κάθε άλγεβρα Boole* $\mathcal{A}$ *είναι ισόμορφη με ένα σώμα υποσυνόλων.*

***Απόδειξη***
Έστω $A$ ένα τυχαίο στοιχείο της άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(A)$ το σύνολο όλων των μέγιστων φίλτρων, που περιέχουν το $A$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι για οποιαδήποτε στοιχεία $A, B \in \mathcal{A}$, έχουμε

$$\mathcal{F}(A\cap B) = \mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B)\ , \tag{1}$$

$$\mathcal{F}(A\cup B) = \mathcal{F}(A)\cup\mathcal{F}(B)\ , \tag{2}$$

όπου η τομή και η ένωση στο δεξί μέλος θεωρούνται όπως στη θεωρία συνόλων.

Έστω $F$ ένα γνήσιο φίλτρο και έστω $F \in \mathcal{F}(A\cap B)$. Τότε $A\cap B \in F$. Καθώς $A\cap B \subset A, B$, έχουμε $A, B \in F$. Τότε $F \in \mathcal{F}(A)$ και $F \in \mathcal{F}(B)$. Κατά συνέπεια, $F \in \mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B)$, δηλαδή $\mathcal{F}(A\cap B) \subset \mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B)$.

Για να αποδείξουμε ότι $\mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B) \subset \mathcal{F}(A\cap B)$ θεωρούμε $F \in \mathcal{F}(A)\cap\mathcal{F}(B)$. Τότε $F \in \mathcal{F}(A)$ και $F \in \mathcal{F}(B)$, άρα $A, B \in F$. Οπότε $A\cap B \in F$, δηλαδή $F \in \mathcal{F}(A\cap B)$.

Απομένει να αποδείξουμε τώρα τη δεύτερη ισότητα των ενώσεων. Έστω $F$ ένα γνήσιο φίλτρο έτσι, ώστε $F \in \mathcal{F}(A\cup B)$, οπότε $A\cup B \in F$.
Εάν $A \notin F$ και $B \notin F$, τότε από το Θεώρημα 2 της δεύτερης παραγράφου προκύπτει ότι $A^c \in F$ και $B^c \in F$, οπότε $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c \in F$, οπότε $\wedge = (A\cup B)\cap(A\cup B)^c \in F$, αλλά αυτό θα σήμαινε ότι το φίλτρο $F$ δεν είναι γνήσιο. Κατά συνέπεια ισχύει τουλάχιστο μια από τις σχέσεις $A \in F$ ή $B \in F$. Τότε $F \in \mathcal{F}(A)\cup\mathcal{F}(B)$, άρα $\mathcal{F}(A\cup B) \subset \mathcal{F}(A)\cup\mathcal{F}(B)$.

Η αντίστροφη σχέση $F(A) \cup F(B) \subset F(A \cup B)$ προκύπτει αμέσως.

Θεωρούμε τώρα $A \in \mathcal{A}$. Τότε

$$F(A) \cap F(A^c) = \varnothing,$$
$$F(A) \cup F(A^c) = F^*,$$

όπου $F^* \equiv \{F(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$. Πράγματι,

$$F(A) \cap F(A^c) = F(A \cap A^c) = F(\wedge) = \varnothing,$$

και

$$F(A) \cup F(A^c) = F(A \cup A^c) = F(\vee) = F^*.$$

Προκύπτει άμεσα ότι:

$$(F(A))^c = F(A^c).$$

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $F^*$ είναι ένα σώμα υποσυνόλων.

Τέλος, η αντιστοιχία $A \to F(A)$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ της άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$ και $F^*$. ❑

Παρατηρούμε ότι γενικά η άλγεβρα Boole $F^*$ δεν ταυτίζεται με την $P(\Omega)$, δηλαδή, γενικά έχουμε $F^* \subset P(\Omega)$.
Στην ειδική περίπτωση μίας πεπερασμένης άλγεβρας Boole $\mathcal{A}$, έχουμε $F^* = P(\Omega)$.

Δίνουμε τώρα χωρίς απόδειξη το:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2** ***(L. H. Loomis – R. Sikorski)***

*Κάθε σ-άλγεβρα Boole* $\mathcal{A}$ *είναι η ομόμορφη εικόνα ενός σ-σώματος υποσυνόλων* $\mathcal{K}$.

Ένα θεώρημα πολύ σημαντικό για τη Θεωρία Πιθανοτήτων είναι το εξής:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3**

*Κάθε άλγεβρα Boole* $\mathcal{A}$ *είναι ενταγμένη στη μικρότερη σ-άλγεβρα Boole που την περιέχει.*

***Απόδειξη***

Λέμε ότι μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ενταγμένη στην άλγεβρα $\mathcal{B}$, εάν υπάρχει μία άλλη άλγεβρα $\mathcal{C}$, που είναι υποάλγεβρα της $\mathcal{B}$ και ισόμορφη με την $\mathcal{A}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 βρίσκουμε ένα σώμα $\mathcal{K}$ υποσυνόλων, που είναι ισόμορφο με την άλγεβρα $\mathcal{A}$. Επιπλέον, από το Θεώρημα 6 της πέμπτης παραγράφου, υπάρχει ένα μικρότερο σ-σώμα υποσυνόλων που περιέχει το $\mathcal{K}$. Τότε η απόδειξη προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. ❑