ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ

Θεωρία και Ασκήσεις

Στρατή Κουνιά
Καθηγητή Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Σοφίας Καλπαζίδου
Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτό το βιβλίο απευθύνεται κυρίως στους φοιτητές που έχουν παρακολουθήσει ένα εξαμηνιαίο μάθημα Πιθανοτήτων και προϋποθέτει γνώσεις όπως: δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξαρτησία γεγονότων, μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, μονοδιάστατες κατανομές. Η ύλη αυτή μπορεί να καλυφθεί σε ένα εξαμηνιαίο μάθημα που διδάσκεται 3 ώρες την εβδομάδα και μ' αυτή ο φοιτητής συμπληρώνει τις βασικές γνώσεις που πρέπει να έχει ένας πτυχιούχος μαθηματικός.

Επειδή πολλές επιστήμες χρησιμοποιούν γνώσεις από τις πιθανότητες για τη λύση προβλημάτων τους, θεωρούμε ότι αυτό το βιβλίο είναι κατάλληλο και για φοιτητές Φυσικής, Βιολογίας, Γεωλογίας, Πολυτεχνικών Σχολών κ.λ.π. καθώς και για καθηγητές Μαθηματικών στα Τ.Ε.Ι. και στη Μέση Εκπαίδευση.

Η διάταξη της ύλης είναι η ίδια που υπήρχε και στο βιβλίο «Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής - Μέρος Ι Πιθανότητες» του Στρατή Κουνιά.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται τα βασικά αξιώματα των Πιθανοτήτων και οι ιδιότητες των κατανομών τυχαίων μεταβλητών προσαρμοσμένες στο επίπεδο αυτού του βιβλίου.

Στο τέλος κάθε κεφάλαιου δίνονται ασκήσεις και στο τέλος του βιβλίου οι λύσεις τους, αυτό το θεωρήσαμε αναγκαίο για την πληρότητα του βιβλίου και αρκετά χρήσιμο για το φοιτητή.

Σε κάθε κεφάλαιο τα παραδείγματα, οι ορισμοί και τα θεωρήματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, έτσι το παράδειγμα 3.12 σημαίνει το δωδέκατο παράδειγμα στο τρίτο κεφάλαιο κ.λ.π. Το σύμβολο □ σημαίνει το τέλος ενός ορισμού ή μιας απόδειξης ενός θεωρήματος.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 1985

Στρατής Κουνιάς
Σοφία Καλπαζίδου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ, ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΧΩΡΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1. Άλγεβρα γεγονότων

Στον πρώτο τόμο, Πιθανότητες I, έχουμε ήδη εισάγει την έννοια του γεγονότος και οι πράξεις περιορίσθηκαν σε πεπερασμένο πλήθος γεγονότων. Εδώ ενδιαφερόμαστε για τη δομή της οικογένειας των γεγονότων.

Η ανάλυση μεγάλου αριθμού πειραμάτων με τυχαία αποτελέσματα έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ της οικογένειας των γεγονότων που αντιστοιχούν σ' ένα πείραμα και της κλάσης των υποσυνόλων του αντίστοιχου δειγματοχώρου. Αυτό είναι το εμπειρικό συμπέρασμα και το ενισχύουμε θεωρητικά αν θεωρήσουμε την κλάση των γεγονότων ως μία κλάση υποσυνόλων του δειγματοχώρου με μία ιδιαίτερη δομή που θα την περιγράψουμε παρακάτω.

Από την εμπειρία είναι αυτονόητο ότι:

i) Στην εκτέλεση του πειράματος πραγματοποιείται πάντα ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο δειγματοχώρο, θεωρούμε λοιπόν ότι ο δειγματοχώρος Ω είναι ένα γεγονός.

ii) Αν έχουμε ένα γεγονός A, τότε στην εκτέλεση του πειράματος πραγματοποιείται το A εφόσον το αποτέλεσμα ανήκει στο A, αλλιώς δεν πραγματοποιείται το A ή ισοδύναμα λέμε ότι πραγματοποιείται το συμπληρωματικό του A που το συμβολίζουμε με A' ή με $\overline{A}$. Έτσι αν το A είναι γεγονός, τότε και το A' πρέπει να το θεωρούμε ως γεγονός.

iii) Τέλος αν έχουμε τα γεγονότα A_1, $A_2, \ldots$, τότε θα λέμε ότι στην εκτέλεση του πειράματος πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A_1, A_2,..., όταν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει τουλάχιστο σε ένα από τα A_1, A_2,..., δηλαδή ανήκει στην ένωση $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ Έτσι όταν τα A_1, A_2,..., είναι γεγονότα, οδηγούμαστε να θεωρήσουμε ως γεγονός και την ένωση τους $\bigcup_i A_i$.

Η τελευταία αυτή παραδοχή είναι χωρίς αμφισβήτηση όταν τα γεγονότα είναι πεπερασμένου πλήθους. Όταν όμως έχουμε ένα άπειρο πλήθος γεγονότων είναι εύκολο να αρχίσουν διαφωνίες στο τί είναι αυτονόητο και τί όχι. Στην αξιωματική θεμελίωση κατά Kolmogorov που θα ακολουθήσουμε εδώ δεχόμαστε ότι ανεξάρτητα από το αν τα A_1, A_2,..., είναι πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους, τότε και η ένωσή τους $\bigcup_i A_i$ είναι γεγονός.

Από τις παραπάνω εμπειρικές παρατηρήσεις δεχόμαστε ότι τα γεγονότα είναι μία οικογένεια F υποσυνόλων του Ω με τις ιδιότητες:

$P_1 : \Omega \in F$

P_2 : Αν $A \in F$, τότε $A' \in F$

P_3 : Αν $A_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in F$

Μια οικογένεια συνόλων, με τις ιδιότητες P_1, P_2, P_3, λέγεται στα μαθηματικά πεδίο Borel ή σ-άλγεβρα.

Αν αντί της P_3 ισχύει η

P_3' : Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in F \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$

δηλαδή η ένωση πεπερασμένου πλήθους γεγονότων είναι γεγονός, τότε λέμε ότι οι P_1, P_2, P_3' ορίζουν μία άλγεβρα γεγονότων.

Αν βέβαια ισχύει η P_3, τότε ισχύει και η P_3' αλλά όχι και το αντίστροφο, δηλαδή μία σ-άλγεβρα γεγονότων είναι άλγεβρα αλλά μπορεί να έχουμε άλγεβρα γεγονότων που δεν είναι σ-άλγεβρα.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα, ότι τα γεγονότα σ' ένα δειγματοχώρο αποτελούν ένα πεδίο του Borel (μία σ-άλγεβρα).

Σε ένα πεδίο του Borel έχουμε:

Θεώρημα 1.1. Αν F είναι ένα πεδίο Borel, τότε

i) $\varnothing \in F$

ii) Αν $A_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in F$.

Απόδειξη:

(i) $\Omega' = \varnothing \in F$ από P_1 και P_2

(ii) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i')' \in F$ από P_2, P_3 αλλά

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i')' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i. \quad \square$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε ο λεγόμενος **νόμος του De Morgan**

$$(\cup A_i)' = \cap A_i' \quad , \quad (\cap A_i)' = \cup A_i'$$

που ισχύει για ενώσεις και τομές πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους συνόλων.

Σημειώνουμε επίσης ότι

$$B \cap (\cup A_i) = \cup (B \cap A_i) \quad , \quad B \cup (\cap A_i) = \cap (B \cup A_i)$$

Πολλές φορές για ευκολία χρησιμοποιείται το $A \cdot B$ αντί για $A \cap B$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1.1. Η οικογένεια που περιέχει μόνο τα σύνολα $\varnothing$ και Ω λέγεται τετριμμένο πεδίο Borel, δηλάδη $F = \{\varnothing, \Omega\}$.

1.2. Η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του Ω και αυτή προφανώς είναι πεδίο Borel.

Μπορούμε να πούμε ότι το τετριμμένο πεδίο Borel και η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του Ω είναι αντίστοιχα το μικρότερο και το μεγαλύτερο πεδίο Borel που αποτελούνται από υποσύνολα του Ω.

1.3. Αν $A \in \Omega$, $A \neq \varnothing$, $A \neq \Omega$, τότε τα τέσσερα σύνολα $\{\varnothing, A, A', \Omega\}$ είναι ένα πεδίο Borel, όπως εύκολα διαπιστώνεται.

Όταν μας δίνεται μία οικογένεια συνόλων D που δεν αποτελούν πεδίο Borel, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα πεδίο Borel που περιέχει την οικογένεια D· πάνω σ' αυτό αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το

Θεώρημα 1.2. Για κάθε οικογένεια D υποσυνόλων του Ω, υπάρχει ένα πεδίο Borel F(D) που περιέχει όλα τα σύνολα της D και που είναι το μικρότερο πεδίο Borel μ' αυτή την ιδιότητα.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1.4. Αν D_1 είναι η οικογένεια όλων των ημιανοιχτών διαστημάτων $(\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, τότε η D_1 δεν είναι πεδίο Borel διότι $(\alpha, b]'$ δεν είναι ημιανοιχτό διάστημα· το μικρότερο πεδίο Borel που περιέχει την D_1, δηλαδή το $F(D_1)$, παριστάνεται με B^1. Αν προσπαθήσει κανείς να δει ποια σύνολα περιέχονται στο B^1, θα διαπιστώσει ότι περιέχονται όλα σχεδόν τα υποσύνολα του $(-\infty, \infty)$.

1.5. Το B^1 περιέχει i) Όλα τα ανοιχτά διαστήματα διότι

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha, \beta - \frac{1}{n}], \text{ ιδιότητα } P_3.$$

ii) Όλους τους πραγματικούς αριθμούς διότι

$$\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha - \frac{1}{n}, \alpha], \forall \ -\infty < \alpha < \infty, \text{ Θεώρημα 1.1 }.$$

iii) Όλα τα κλειστά διαστήματα διότι

$$[\alpha, \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha - \frac{1}{n}, \beta], \text{ Θεώρημα 1.1.}$$

Δηλαδή, το B^1 είναι ένα πολύ πλούσιο πεδίο Borel αλλά δεν περιέχει όλα τα υποσύνολα του $(-\infty, \infty)$. Χρειάζεται αρκετή ικανότητα για να κατασκευάσουμε σύνολα που δεν είναι στο B^1 και τέτοια σύνολα έχουν κατασκευαστεί.

1.2. Πράξεις με σύνολα

Δύο σύνολα A και B λέγονται ξένα (μεταξύ τους), αν δεν έχουν κοινά σημεία, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$.

Οικογένεια αμοιβαία ξένων συνόλων είναι μία οικογένεια συνόλων $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$ της οποίας κάθε δύο σύνολα είναι ξένα, δηλαδή

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall \, i \neq j.$$

Αν η F δεν είναι οικογένεια ξένων συνόλων, τότε το σύνολο

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

μπορεί πάντα να γραφτεί

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

όπου $B_i \subset A_i$ και τα B_i αποτελούν οικογένεια ξένων συνόλων. Για να το δούμε αυτό αρκεί να πάρουμε

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2A_1' \text{ και } B_n = A_n\,(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i'),\ n = 2, 3, \ldots,$$

τότε

$$B_i \cap B_j = \varnothing,\ B_i \subset A_i \text{ και } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Ορισμός 1.1.

Η ακολούθια των συνόλων $A_1, A_2, \ldots$, λέγεται μονότονη αν $A_i \subset A_{i+1}$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots$, ή αν $A_i \supset A_{i+1}$ $\forall\, i = 1, 2, \ldots$ Στην πρώτη περίπτωση η ακολουθία λέγεται αύξουσα και στη δεύτερη λέγεται φθίνουσα. □

Στις πιθανότητες θα χρειαστούμε να μελετήσουμε γεγονότα όπως: (i) Όλα τα απλά γεγονότα που ανήκουν σε άπειρα από τα A_n (ii) Όλα τα απλά γεγονότα που ανήκουν σε όλα εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος από τα A_n.

Οι αντίστοιχοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

και

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Ορισμός 1.2.

Το σύνολο

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

λέγεται ανώτερο όριο (superior limit) της ακολουθίας A_n και συμβολίζεται με $\overline{\lim}\, A_n$. □

Αν $\omega \in \overline{\lim}\, A_n$, τότε θα πρέπει

$$\omega \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

Η ακολουθία

$$\{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

είναι φθίνουσα, έτσι

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

αν και μόνον αν

$$\omega \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

οσοδήποτε μεγάλο και να είναι το k, δηλαδή $\omega \in \overline{\lim}\, A_n$ αν και μόνο αν το ω ανήκει σε άπειρο πλήθος από τα A_n.

Ορισμός 1.3.

Το σύνολο

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

λέγεται κατώτερο όριο (limit inferior) της ακολουθίας A_n και συμβολίζεται με $\underline{\lim} A_n$. □

Αν $\omega \in \underline{\lim} A_n$, τότε

$$\omega \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

για ένα τουλάχιστο k, που σημαίνει, $\omega \in A_i \ \forall\, i = k, k+1, \ldots$ Δηλαδή το ω ανήκει σε όλα τα A_n εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος από τα A_n (τα A_1, $A_2, \ldots, A_{k-1}$).

Αν μια οικογένεια συνόλων είναι πεδίο Borel τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι και τα $\overline{\lim}\, A_n$ και $\underline{\lim}\, A_n$ στοιχεία του πεδίου Borel και βέβαια

$$\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n.$$

Ορισμός 1.4.

Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$ τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της ακολουθίας A_n και το κοινό αυτό σύνολο συμβολίζεται με $\lim A_n$. □

Κάθε ακολουθία συνόλων έχει ανώτερο και κατώτερο όριο τα οποία ίσως διαφέρουν.

Θεώρημα 1.3. Κάθε μονότονη ακολουθία συνόλων έχει όριο.

Απόδειξη: Αν η ακολουθία είναι αύξουσα, τότε

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$$

οπότε

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

επίσης

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

οπότε

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n =$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

δηλαδή

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρόμοια αποδείχνουμε ότι αν η A_n είναι φθίνουσα, τότε

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \quad \square$$

Μία άλλη χρήσιμη έννοια στις πιθανότητες είναι η δείκτρια συνάρτηση.

Ορισμός 1.5.

Έστω το σύνολο A, τότε η συνάρτηση

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

λέγεται δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. $\square$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1.6. Δίνονται δύο σύνολα B και C και ορίζουμε την ακολουθία

$$A_n = \begin{cases} B & \text{αν n άρτιος} \\ C & \text{αν n περιττός} \end{cases}$$

τότε:

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B \cup C \quad \text{και} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B \cup C,$$

επίσης

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = B \cap C \quad \text{και} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = B \cap C$$

δηλαδή

$$\overline{\lim}\, A_n = B \cup C \quad \text{και} \quad \underline{\lim} A_n = B \cap C.$$

1.7. Αν

$$A_n = \{x: \frac{1}{n} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n}\},\ n = 1,2,\ldots,$$

τότε

$$\overline{\lim}\, A_n = \{0 < x \leq 2\} \quad \text{και} \quad \underline{\lim} A_n = \{0 < x \leq 2\}$$

διότι

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{0 < x \leq 2 + \frac{1}{k}\},\ \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\frac{1}{k} \leq x \leq 2\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{0 < x \leq 2 + \frac{1}{k}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{0 < x \leq 2\} \text{ και}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{0 < x \leq 2\}.$$

1.8. Δίνονται τα σύνολα B και C τότε:

$$I_{B \cup C}(\omega) = I_B(\omega) + I_C(\omega) - I_B(\omega) I_C(\omega) = \max(I_B(\omega), I_C(\omega))$$

και

$$I_{B \cap C}(\omega) = I_B(\omega) \cdot I_C(\omega) = \min(I_B(\omega), I_C(\omega)).$$

Αυτά είναι εύκολο να τα δούμε διότι τα δύο μέλη είναι ίσα για κάθε τιμή του ω.

1.3. Αξιώματα Πιθανοτήτων.

α) Τα αξιώματα που αναφέρονται παρακάτω οφείλονται στον Kolmogorov που γύρω στα 1930 έκανε την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Βέβαια τα αξιώματα είναι αποτέλεσμα εμπειρίας και επιστέγασμα της δουλιάς προηγούμενων ερευνητών.

Η όλη προσπάθεια είναι να αντιστοιχήσουμε σε κάθε γεγονός (σύνολο) A έναν αριθμό P(A) που λέγεται πιθανότητα του A και που ακολουθεί ορισμένους κανόνες που ανταποκρίνονται στην κοινή λογική. Έτσι η πιθανότητα είναι μία συνολοσυνάρτηση και επειδή η σχετική συχνότητα του A είναι

$$0 \leq N_A/N \leq 1$$

γι' αυτό, λογικό είναι να ορίσουμε την P(A) έτσι ώστε $0 \leq P(A) \leq 1$. Επίσης αν δύο γεγονότα A και B είναι ξένα (δεν έχουν κοινά σημεία), τότε για να βρούμε τον αριθμό $N_{A \cup B}$ που συμβαίνει το A ή το B, δηλαδή το $A \cup B$ σε N πειράματα, αρκεί να προσθέσουμε τα N_A και N_B οπότε

$$\frac{N_{A \cup B}}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N}$$

Έτσι αν τα A, B είναι ξένα, τότε πρέπει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

β) Αξιώματα.

Μας δίνεται ένας δειγματοχώρος Ω και μία οικογένεια F γεγονότων, όπου F είναι πεδίο Borel, τότε:

Ορισμός 1.6.

Η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot)$ λέγεται πιθανότητα αν παίρνει πραγματικές τιμές και

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in F$

iii) Αν $A_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots$, και αποτελούν μία οικογένεια αμοιβαία ξένων συνόλων, δηλαδή $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad \square$$

Τα αξιώματα (i) και (ii) ανταποκρίνονται στη λογική όπως εξηγήθηκε στην προηγουμένη παράγραφο. Το αξίωμα (iii), αν και είναι λογικό στην περίπτωση πεπερασμένου πλήθους συνόλων, όμως ξεφεύγει από τα όρια της ανθρώπινης λογικής όταν έχουμε άπειρο πλήθος συνόλων. Παρ' όλα αυτά δεχόμαστε το (iii) και πάνω σ' αυτό θα δούμε στηρίζεται η απόδειξη πολύ σοβαρών αποτελεσμάτων της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Επίσης, σε ορισμένους κλάδους της **Φυσικής**, μπορεί κανείς να αμφισβητήσει το αξίωμα (i) ή (iii).

Ορισμός 1.7.

Η τριάδα (Ω, F, P) λέγεται χώρος πιθανοτήτων, όπου Ω είναι ο δειγματοχώρος, F το πεδίο Borel των γεγονότων και P ο νόμος με τον οποίο αντιστοιχούμε πιθανότητες στα γεγονότα. □

Αν η φράση πεδίο Borel φέρνει σύγχυση στον αναγνώστη τότε μπορεί να παραλειφτεί χωρίς σοβαρή ζημία στην πρακτική εφαρμογή των πιθανοτήτων.

Στηριζόμενοι στα (i), (ii), (iii) θα αποδείξουμε διάφορα θεωρήματα.

Θεώρημα 1.4. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α) $P(A)+P(A') = 1$

β) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall \quad A \in F$

γ) $P(\varnothing) = 0$

δ) $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

ε) Αν $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

ζ) $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

Απόδειξη.

α) $A \cup A' = \Omega$ τότε $P(A)+P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega)$ και (i) $P(\Omega) = 1$, οπότε (ii) $P(A)+P(A') = 1$,

β) Επειδή $P(A') = 1-P(A)$ και $P(A') \geq 0$ τότε (iii) $0 \leq P(A) \leq 1$.

γ) $\varnothing \cup \Omega = \Omega$ και $\varnothing \cap \Omega = \varnothing$ τότε (iii) $P(\varnothing)+P(\Omega) = P(\Omega)$, και (i) $P(\varnothing)+1 = 1$ ή $P(\varnothing) = 0$.

δ) $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$ και $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \varnothing$, τότε (iii) $P(A) = P(A \cap B')+P(A \cap B)$ ή $P(A \cap B') = P(A)-P(A \cap B)$.

Επίσης $A \cup B = (A \cap B') \cup B$ και $(A \cap B') \cap B = \varnothing$ τότε (iii) $P(A \cup B) = P(A \cap B')+P(B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

ε) $B = A \cup (A' \cap B)$ με $A \cap (A' \cap B) = \varnothing$ τότε $P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$ τότε (iii) $P(B) \geq P(A)$.

ζ) Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ξένα μεταξύ τους, τότε σύμφωνα με το αξίωμα (iii) έχουμε

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δεν είναι ξένα, τότε το σύνολο

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

γράφεται σαν ένωση συνόλων ξένων μεταξύ τους, δηλαδή

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup (A_1' \cap A_2) \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3) \cup \ldots \cup (A_1' \cap A_2' \ldots \cap A_{n-1}' \cap A_n).$$

Από το (iii) έχουμε

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) &= P(A_1) + P(A_1' \cap A_2) + P(A_1' \cap A_2' \cap A_3) + \ldots + \\ &\quad + P(A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{n-1}' \cap A_n) \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n). \quad \square \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδείχνουμε ότι το (ζ) ισχύει και όταν $n = \infty$.

Θεώρημα 1.5. (Borel)

Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \text{τότε} \quad P(\overline{\lim}\, A_n) = 0.$$

Απόδειξη.

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \qquad \forall \quad k = 1,2,\ldots$$

Από το Θεώρημα 1.4 (ε και ζ) έχουμε:

$$P(\overline{\lim}\, A_n) \leq P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \quad \forall \quad k = 1, 2, \ldots$$

και επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \text{τότε} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0$$

δηλαδή

$$0 \le P(\overline{\lim} A_n) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0. \quad \square$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι αν οι $P(A_n)$ είναι αρκετά μικρές ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

τότε η πιθανότητα το αποτέλεσμα ω του πειράματος να ανήκει σε άπειρα A_n είναι μηδέν. Αυτό μας λέει ότι το ω ανήκει μόνο σε πεπερασμένο πλήθος από τα A_n με πιθανότητα ένα (βεβαιότητα).

Θεώρημα 1.6.

Δίνεται μια αύξουσα ακολουθία γεγονότων A_n, $n = 1, 2, \ldots$, τότε

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Απόδειξη:

Αφού η ακολουθία A_n είναι αύξουσα τότε

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n =$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Σημειώνουμε ότι το A γράφεται ως ένωση ξένων συνόλων, δηλαδή,

$$A = A_1 \cup (A_1' \cap A_2) \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3) \cup \ldots$$

Το αξίωμα (iii) δίνει

$$P(A) = P(A_1) + P(A_1' \cap A_2) + P(A_1' \cap A_2' \cap A_3) + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{k-1}' \cap A_k)$$