Εισαγωγή στην Άλγεβρα

Κορνηλίας Κάλφα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή της συγγραφέως

ISBN 960-431-874-8

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφηκε για τις ανάγκες του μαθήματος «Εισαγωγή στην Άλγεβρα», του πρώτου εξαμήνου σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του Α.Π.Θ. Περιέχει τις βασικές γνώσεις Θεωρίας Συνόλων, Θεωρίας Αριθμών και Άλγεβρας, τις οποίες θεωρώ ότι πρέπει να έχουν οι φοιτητές, για να κατανοήσουν τα πιο προχωρημένα μαθήματα που θα συναντήσουν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

Ευχαριστώ τις εκδόσεις Ζήτη για την καλαίσθητη παρουσίαση του χειρογράφου μου.

Θεσσαλονίκη, 10 Ιουλίου 2003 *Κορνηλία Κάλφα*

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Θεωρούμε γνωστή την έννοια του συνόλου και τα ακόλουθα:

Ένα σύνολο έχει **στοιχεία**. Γράφουμε $x\in A$ ή $x\notin A$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του A (ανήκει στο A) ή ότι το x δεν είναι στοιχείο του A (δεν ανήκει στο A). Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να παραστήσουμε ένα σύνολο. Ο κοινότερος είναι η καταγραφή των στοιχείων του μέσα σε άγκυστρα (π.χ. {α, β, μ}). Αν τα στοιχεία του συνόλου είναι πολλά, έχουν όμως μια προφανή σχέση μεταξύ τους, χρησιμοποιούμε τελείες. Γράφουμε, δηλαδή {α, β, γ, ..., x, y, ω} για το σύνολο των γραμμάτων της ελληνικής γλώσσας. Αν το σύνολο A αποτελείται από αυτά ακριβώς τα αντικείμενα x, που έχουν την ιδιότητα p(x), μπορούμε να το παραστήσουμε ως $A=\{x: p(x)\}$ (π.χ. A = {x: x γράμμα της Ελληνικής γλώσσας}).

Θεωρούμε γνωστά τα σύνολα $\mathbf{N}=\{\mathbf{0, 1, 2, 3...}\}$, $\mathbf{Z}=\{\mathbf{...-2, -1, 0, 1, 2, ...}\}$, $\mathbf{Q}=\left\{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}: \mathbf{m}\in\mathbf{Z}, \mathbf{n}\in\mathbf{N}, \mathbf{n}\neq\mathbf{0}\right\}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ των **Φυσικών Αριθμών**, των **Ακεραίων Αριθμών**, των **Ρητών Αριθμών**, των **Πραγματικών Αριθμών** και των **Μιγαδικών Αριθμών**, αντίστοιχα.

Το σύνολο { }, που δεν έχει κανένα στοιχείο, το συμβολίζουμε $\varnothing$ και το καλούμε **κενό σύνολο**.

Δυο σύνολα είναι **ίσα**, αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Αλλιώς είναι **άνισα**. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\mathbf{A=B}$ και $\mathbf{A\neq B}$, για να δηλώσουμε την ισότητα και την ανισότητα συνόλων, αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα, αρκεί, προφανώς, να αποδείξουμε ότι $\mathbf{x\in A \Leftrightarrow x\in B}$.

Το σύνολο A καλείται **υποσύνολο** του συνόλου B, αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του Β. Αν, επιπλέον, υπάρχει στοιχείο του Β, το οποίο δεν ανήκει στο Α, το Α καλείται **γνήσιο υποσύνολο** του Β. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\mathbf{A \subset B}$ και $\mathbf{A \subsetneqq B}$, για να δηλώσουμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β και το Α είναι γνήσιο υποσύνολο του Β, αντίστοιχα. Προφανώς, ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $\mathbf{A \subset A}$

ii. $\mathbf{A \subset B}$ **και** $\mathbf{B \subset \Gamma \Rightarrow A \subset \Gamma}$

iii. $\mathbf{A \subset B}$ **και** $\mathbf{B \subset A \Rightarrow A = B}$

Από την ιδιότητα (iii) προκύπτει ότι για να αποδείξουμε ότι $A = B$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A \subset B$ και $B \subset A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν για $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, 3\}$ ισχύουν οι σχέσεις
i. $1 \in A$ **ii.** $\{1\} \in A$ **iii.** $\{1\} \subset A$ **iv.** $\{\{1, 2\}\} \in A$ **v.** $\{\{1, 2\}, 3\} \subset A$ **vi.** $3 \in A$

Απάντηση: Η (i) δεν ισχύει, διότι τα τρία στοιχεία του Α είναι διάφορα του 1. Η (ii) ισχύει. Η (iii) δεν ισχύει, γιατί $1 \notin A$. Η (iv) δεν ισχύει γιατί τα τρία στοιχεία του Α είναι διάφορα του $\{\{1, 2\}\}$. Η (v) προφανώς ισχύει καθώς και (vi).

2. Εξετάστε αν για το $A = \varnothing$ και το $B = \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ ισχύουν τα $\varnothing \in A$, $\varnothing \subset A$, $\{\varnothing\} \in B$, $\{\varnothing\} \subset B$.

Απάντηση: Το $A = \varnothing$ δεν έχει κανένα στοιχείο. Άρα το $\varnothing$ δεν είναι στοιχείο του. Άρα $\varnothing \notin \varnothing$.

Το $\varnothing$ είναι υποσύνολο του Α, γιατί κάθε στοιχείο του (που δεν υπάρχει) ανήκει στο $\varnothing$. Άρα $\varnothing \subset A$.

Το Β είναι το διμελές σύνολο με στοιχεία τα $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Άρα ισχύει $\{\varnothing\} \in B$.

Το $\varnothing$ δεν είναι στοιχείο του Β. Άρα $\{\varnothing\} \not\subset B$. ■

1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ Καλώ **δυναμοσύνολο** του συνόλου Α, και το συμβολίζω $\mathbf{P(A)}$, το σύνολο των υποσυνόλων του Α. Άρα

$$\mathbf{P(A) = \{B: B \subset A\}}$$

Ξέρω ότι αν $X = \{x: p(x)\}$, τότε $x \in X$ αν και μόνο αν ισχύει η $p(x)$. Άρα

$$\mathbf{B \in P(A) \Leftrightarrow B \subset A}$$

Είναι φανερό ότι το δυναμοσύνολο του $A=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι το σύνολο $\{\varnothing$, A, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma\}\}$. Ανάμεσα στα στοιχεία του $P(A)$ είναι πάντα το $\varnothing$ και A, και θα αποδείξουμε αργότερα ότι, **όταν το A έχει n στοιχεία, τότε το P(A) έχει 2^n στοιχεία**.

1.2. ΘΕΩΡΗΜΑ Ισχύουν:

i. $A\subset B \Leftrightarrow P(A)\subset P(B)$

ii. $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

Απόδειξη: **i.** Έστω $A\subset B$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $P(A)$ ανήκει στο $P(B)$. Πράγματι $x\in P(A) \Rightarrow x\subset A \Rightarrow x\subset B \Rightarrow x\in P(B)$. Άρα δείξαμε ότι $A\subset B \Rightarrow P(A)\subset P(B)$.

Αντίστροφα, έστω $P(A)\subset P(B)$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B. Πράγματι $x\in A \Rightarrow \{x\}\subset A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow \{x\}\in P(B) \Rightarrow \{x\}\subset B \Rightarrow x\in B$. Άρα δείξαμε ότι $P(A)\subset P(B) \Rightarrow A\subset B$.

ii. Σύμφωνα με το (i) έχουμε $A = B \Leftrightarrow (A\subset B$ και $B\subset A) \Leftrightarrow \big(P(A)\subset P(B)$ και $P(B)\subset P(A)\big) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$. ■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Είδαμε ότι στην απόδειξη της (i) χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $x\subset A$. Πιο κάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $x\in \alpha$ ή $X\in A$. Αυτό δεν πρέπει να μας μπερδεύει, αφού ένα στοιχείο ενός συνόλου μπορεί να είναι υποσύνολο κάποιου άλλου συνόλου και αντίστροφα. Συνήθως θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για τα σύνολα και μικρά γράμματα για τα στοιχεία τους, κάποτε όμως αυτό δεν είναι βολικό.

Ξέρουμε ότι, αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε τα σύνολα

$$\mathbf{A\cup B} = \{z: z\in A \text{ ή } z\in B\}$$

$$\mathbf{A\cap B} = \{z: z\in A \text{ και } z\in B\}$$

$$\mathbf{A-B} = \{z: z\in A \text{ και } z\notin B\}$$

τα καλούμε **ένωση**, **τομή** και **διαφορά** των A και B, αντίστοιχα. Αν $A\cap B=\varnothing$, τα A και B τα ονομάζουμε **ξένα**.

Δίνουμε πιο κάτω έναν πίνακα των πιο βασικών ιδιοτήτων της ένωσης, της τομής και της διαφοράς συνόλων. Όλες τους αποδεικνύονται εύκολα με την κλασική μέθοδο απόδειξης της ισότητας συνόλων, που προαναφέραμε.

$A\cup\varnothing = A$	$A\cap\varnothing = \varnothing$
$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
$A\cup(B\cup\Gamma) = (A\cup B)\cup\Gamma$	$A\cap(B\cap\Gamma) = (A\cap B)\cap\Gamma$
$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
$A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$	
$A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$	
$A-(B\cup\Gamma) = (A-B)\cap(A-\Gamma)$	
$A-(B\cap\Gamma) = (A-B)\cup(A-\Gamma)$	

Αποδεικνύουμε δύο από τις προτάσεις του πίνακα, αφήνοντας τις υπόλοιπες ως ασκήσεις.

$\mathbf{A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)}$: $x\in A\cup(B\cap\Gamma) \Leftrightarrow x\in A$ ή $x\in(B\cap\Gamma) \Leftrightarrow$ ($x\in A$ ή $x\in B$) και ($x\in A$ ή $x\in\Gamma$) $\Leftrightarrow x\in A\cup B$ και $x\in A\cup\Gamma \Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$

$\mathbf{A-(B\cup\Gamma) = (A-B)\cap(A-\Gamma)}$: :$x\in A-(B\cup\Gamma) \Leftrightarrow x\in A$ και $x\notin B\cup\Gamma \Leftrightarrow$

$x\in A$ και ($x\notin B$ και $x\notin\Gamma$) $\Leftrightarrow$ ($x\in A$ και $x\notin B$) και ($x\in A$ και $x\notin\Gamma$) $\Leftrightarrow$

($x\in A-B$) και ($x\in A-\Gamma$) $\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-\Gamma)$

1.3. ΘΕΩΡΗΜΑ Ισχύουν:

i. $A\cap B = A \Leftrightarrow A\subset B$

ii. $A\cup B = A \Leftrightarrow B\subset A$

iii. $A-B = \varnothing \Leftrightarrow A\subset B$

Απόδειξη:

i. **΄Εστω $\mathbf{A\cap B=A}$**. Τότε $x\in A \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow$ ($x\in A$ και $x\in B$) $\Rightarrow x\in B$.
Άρα $A\subset B$.
΄Εστω $\mathbf{A\subset B}$. Τότε $x\in A\cap B \Rightarrow$ ($x\in A$ και $x\in B$) $\Rightarrow x\in A$. Άρα $A\cap B\subset A$.
Αντίστροφα $x\in A \Rightarrow$ ($x\in A$ και $x\in B$) $\Rightarrow x\in A\cap B$. Άρα $A\subset A\cap B = A$.
Άρα δείξαμε ότι $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$ και αποδείξαμε την (i).

ii. **΄Εστω $\mathbf{A\cup B=A}$**. Τότε $x\in B \Rightarrow$ ($x\in A$ ή $x\in B$) $\Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$. Άρα $B\subset A$.
΄Εστω $\mathbf{B\subset A}$. Τότε $x\in A \Rightarrow$ ($x\in A$ ή $x\in B$) $\Rightarrow x\in A\cup B$. Άρα $A\subset A\cup B$.
Αντίστροφα, $x\in A\cup B \Rightarrow$ ($x\in A$ ή $x\in B$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ ή $x\in A$) $\Rightarrow x\in A$.
Άρα $A\cup B\subset A$. Οι σχέσεις $A\subset A\cup B$ και $A\cup B\subset A$ συνεπάγονται ότι $A\cup B=A$. Άρα δείξαμε ότι $B\subset A \Rightarrow A\cup B = A$, και αποδείξαμε την (ii).

iii. **΄Εστω $\mathbf{A-B\neq\varnothing}$**. Θεωρούμε το τυχόν $x\in A$. Αν x δεν ανήκει στο B, τότε το x θα ανήκε στο $A-B$ και θα ίσχυε $A-B\neq\varnothing$. Άρα το x ανήκει στο B. Δεί-

ξαμε ότι $(\forall x\in A)(x\in B)$, άρα ότι $A\subset B$.
Έστω $A\subset B$. Αν το $A-B$ ήταν μη κενό, τότε θα υπήρχε $x\in A-B$, άρα θα υπήρχε $x\in A$ τέτοιο ώστε $x\notin B$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $A\subset B$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $A-B\neq\varnothing$, άρα $A-B=\varnothing$. ■

Εισάγουμε, τώρα, δύο νέα σύμβολα. Το «$\forall$» για να συμβολίσουμε την έκφραση «**για κάθε**» και το «$\exists$» για να συμβολίσουμε την έκφραση «**υπάρχει**». Έτσι γράφουμε «$\forall x\in A$» και «$\exists x\in A$» για τις εκφράσεις «για κάθε x που ανήκει στο A» και «υπάρχει x που ανήκει στο A» αντίστοιχα. Γράφουμε επίσης «$(\forall x\in A)(x\in B)$» ή «$(\exists x\in A)(x\neq y)$» για τις εκφράσεις «κάθε x, που ανήκει στο A, ανήκει στο B» ή «υπάρχει x στο A, που είναι διάφορο του y». Καθώς θα προχωρούμε, ο αναγνώστης θα εξοικειωθεί σταδιακά με όλο και πιο πολύπλοκες εκφράσεις που περιέχουν τα σύμβολα «$\forall$» και «$\exists$».

1.4. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω C **μη κενό σύνολο συνόλων**. Καλούμε **ένωση του C** και την συμβολίζουμε $\cup\mathbf{C}$, το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που βρίσκονται σε ένα τουλάχιστον σύνολο της C. Δηλαδή

$$\cup\mathbf{C} = \{\mathbf{x}\colon (\exists\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C})(\mathbf{x}\in\boldsymbol{\alpha})\}$$

Καλούμε **τομή του C** και την συμβολίζουμε $\cap\mathbf{C}$, το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που βρίσκονται σε όλα τα σύνολα της C. Δηλαδή

$$\cap\mathbf{C} = \{\mathbf{x}\colon (\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C})(\mathbf{x}\in\boldsymbol{\alpha})\}$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\mathbf{x}\in\cup\mathbf{C} \Leftrightarrow (\exists\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C})(\mathbf{x}\in\boldsymbol{\alpha})$$

$$\mathbf{x}\in\cap\mathbf{C} \Leftrightarrow (\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C})(\mathbf{x}\in\boldsymbol{\alpha})$$

Είναι φανερό ότι οι νέοι ορισμοί γενικεύουν τις έννοιες της ένωσης και της τομής δύο συνόλων, αφού $\cup\{A, B\}=A\cup B$ και $\cap\{A, B\}=A\cap B$.

Αν, λοιπόν, $C=\big\{\{x\}, \{x, \{x\}\}, \{x, y\}\big\}$, τότε $\cup C=\{x, y, \{x\}\}$, και $\cap C=\{x\}$. Επίσης, αν $C=\{\{x\}, \varnothing, \{x, \varnothing\}\}$, τότε $\cup C=\{\varnothing, x\}$ και $\cap C=\varnothing$. Είναι φανερό ότι για κάθε σύνολο A, ισχύει $\cup\{\mathbf{A}\}=\cap\{\mathbf{A}\}=\mathbf{A}$.

1.5. ΘΕΩΡΗΜΑ Αν C και D είναι μη κενά σύνολα συνόλων, τότε $C\subset D \Rightarrow (\cup C\subset\cup D)$ και $(\cap D\subset\cap C)$.

Απόδειξη: Έστω $C\subset D$. Αν $x\in\cup C$, τότε $(\exists\alpha\in C)(x\in\alpha)$. Το α όμως ανήκει και στο D. Άρα $(\exists\alpha\in D)(x\in\alpha)$, άρα $x\in\cup D$. Δείξαμε ότι $(\forall x\in\cup C)(x\in\cup D)$, άρα ότι $\cup C\subset\cup D$. Αν $x\in\cap D$, τότε $(\forall\alpha\in D)(x\in\alpha)$. Όμως τα στοιχεία του C είναι και στοιχεία του D. Άρα $(\forall \alpha\in C)(x\in\alpha)$, άρα $x\in\cap C$. Δείξαμε ότι $(\forall x\in\cap D)(x\in\cap C)$ άρα ότι $\cap D\subset\cap C$. ■

1.6. ΘΕΩΡΗΜΑ Για κάθε μη κενό σύνολο συνόλων C ισχύει $(\forall \alpha\in C)(\cap C\subset\alpha\subset\cup C)$.

Απόδειξη: Έστω $\alpha\in C$. Θεωρούμε $x\in\cap C$, άρα $(\forall c\in C)(x\in c)$. Άρα $x\in\alpha$. Άρα $\cap C\subset\alpha$. Θεωρούμε τώρα $x\in\alpha$. Το x ανήκει σε ένα $\alpha\in C$. Άρα $x\in\cup C$. Δείξαμε ότι $(\forall x\in\alpha)(x\in\cup C)$ άρα ότι $\alpha\subset\cup C$. ■

1.7. ΘΕΩΡΗΜΑ Για κάθε σύνολο A ισχύει $\cup P(A)=A$.

Απόδειξη: Έστω $x\in\cup P(A)$. Τότε $(\exists\alpha\in P(A))(x\in\alpha)$. Το x ανήκει σε ένα υποσύνολο του A, άρα το x ανήκει στο A. Έδειξα ότι $\cup P(A)\subset A$.

Αντίστροφα, έστω $x\in A$. Ξέρουμε ότι το A είναι υποσύνολο του εαυτού του, άρα ότι $A\in P(A)$. Έχουμε ότι $(\exists A\in P(A))(x\in A)$, άρα $x\in\cup P(A)$. Άρα $A\subset\cup P(A)$.

Από τις δύο σχέσεις εγκλεισμού προκύπτει το ζητούμενο. ■

1.8. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν α και β είναι δύο αντικείμενα, **διατεταγμένο ζεύγος** $<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}>$ καλείται ένα αντικείμενο που πληρεί την συνθήκη

$$<\alpha, \beta> = <\gamma, \delta> \Leftrightarrow (\alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta)$$

Το διατεταγμένο ζεύγος $<\alpha, \beta>$ δεν πρέπει να συγχέεται με το σύνολο $\{\alpha, \beta\}$, αφού $\{1, 2\}=\{2, 1\}$ και $<1, 2>\neq<2, 1>$. Η σειρά των στοιχείων στο διμελές σύνολο δεν ενδιαφέρει, ενώ στο διατεταγμένο ζεύγος είναι ουσιαστική.

1.9. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω A και B δύο σύνολα. Καλούμε **καρτεσιανό γινόμενο του A επί το B** το σύνολο

$$A\times B = \{<\alpha, \beta>: \alpha\in A \text{ και } \beta\in B\}$$

Έτσι αν $A=\{1, 2\}$ και $B=\{2, 3\}$, ισχύει $A\times B=\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$. Είναι προφανές ότι $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing\times\varnothing=\varnothing$.

1.10. ΘΕΩΡΗΜΑ Ισχύουν τα ακόλουθα: i. $(A\cup B)\times\Gamma=(A\times\Gamma)\cup(B\times\Gamma)$.
ii. $(A\cap B)\times\Gamma=(A\times\Gamma)\cap(B\times\Gamma)$. iii. $(A-B)\times\Gamma=A\times\Gamma-B\times\Gamma$.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε την (i), αφήνοντας τις άλλες ως απλές ασκήσεις:
$<x, y>\in(A\cup B)\times\Gamma \Leftrightarrow x\in A\cup B$ και $y\in\Gamma \Leftrightarrow (x\in A$ ή $x\in B)$ και $y\in\Gamma \Leftrightarrow$
$(x\in A$ και $y\in\Gamma)$ ή $(x\in B$ και $y\in\Gamma) \Leftrightarrow <x, y>\in A\times\Gamma$ ή $<x, y>\in B\times\Gamma \Leftrightarrow$
$<x, y>\in(A\times\Gamma)\cup(B\times\Gamma)$. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εξετάστε αν τα ακόλουθα ισχύουν ή όχι:
  i. $\{\varnothing\}\in\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$
  ii. $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$.

2. Βρείτε το σύνολο $P(P(P(\varnothing)))$.

3. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει
$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\in P(P(P(A))).$$

4. Διαβάστε τις ακόλουθες συμβολικές εκφράσεις: $(\forall x)(x\subset A)$, $(\forall x)(A\subset x\subset B)$, $(\forall x\in A)(x\neq\alpha)$, $(\forall x)(\forall y)(x\in A \Rightarrow x\subset B)$, $(\exists x)(x\in B)$, $(\exists x)(A\subset x\subset B)$, $(\exists x\in A)(x\neq\alpha)$, $(\exists x)(\exists y)(x\in A$ και $y\notin B)$, $(\forall A)(\exists x)(x\subset A)$, $(\exists x)(\forall A)(x\in A)$.

5. Αποδείξτε ότι $(A\cup B = A\cap B) \Rightarrow A = B$.

6. Εξετάστε αν τα ακόλουθα ισχύουν:
  i. Για κάθε ζεύγος συνόλων A και B, $P(A\cup B) = P(A)\cup P(B)$.
  ii. Για κάθε ζεύγος συνόλων A και B, $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$.

7. Αν $C=\{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 0\}\}\}$, βρείτε τα σύνολα $\cup C$, $\cap C$, $\cup\cup C$, $\cap\cap C$, $\cup\cap C$, $\cap\cup C$.

8. Αν $C=\{\{\{1, 2\}\}, \{\{2, 0\}\}, \{\{1, 3\}\}\}$, βρείτε τα σύνολα $\cup C$, $\cap C$, $\cup\cup C$, $\cap\cap C$, $\cup\cap C$, $\cap\cup C$.

9. Αν A, B είναι τυχόντα σύνολα, βρείτε τα $\cup\Gamma$, $\cup\cup\Gamma$, $\cup\cup\cup\Gamma$, όπου $\Gamma=\{\{\{A\}\}, \{\{A, \{B\}\}\}\}$.

10. Αν $A=\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, βρείτε τα $P(A)$, $\cup A$, $P(\cup A)$, $\cup P(A)$.

11. Αποδείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:
  i. $A\times A = B\times B \Rightarrow A = B$
  ii. $(A\times B = A\times\Gamma$ και $A\neq\varnothing) \Rightarrow B = \Gamma$.

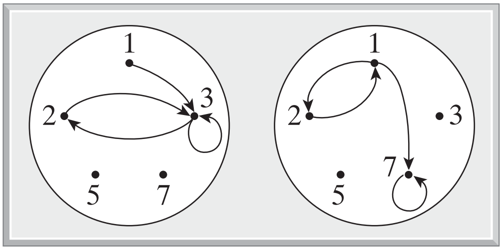
12. Αποδείξτε ότι αν $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ και Γ είναι σύνολα, τέτοια ώστε $(A\times B)\cup(B\times A) = \Gamma\times\Gamma$, τότε $A = B = \Gamma$.

2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Θεωρείστε την σχέση «ισότητα» σε ένα σύνολο μαθηματικών αντικειμένων (π.χ. ένα σύνολο φυσικών αριθμών ή ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων). Η σχέση αυτή έχει τις ιδιότητες: i. Για κάθε x ισχύει $x=x$. ii. Αν $x=y$ και $y=z$, τότε $x=z$. iii. Αν $x=y$, τότε $y=x$. Όλοι μας, από την εμπειρία μας, μπορούμε να βρούμε σχέσεις που συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Αναφέρουμε ενδεικτικά την σχέση «παραλληλία» σε ένα σύνολο ευθειών, και την σχέση «ομοιότητα» σε ένα σύνολο τριγώνων. Τι πιο φυσικό, λοιπόν, από το να δώσουμε ένα όνομα σε αυτήν την κατηγορία σχέσεων και να εξετάσουμε συνολικά τις ιδιότητές τους.

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω A μη κενό σύνολο. Καλούμε **σχέση στο A** ένα υποσύνολο r του $A\times A$.

Ένα σύνολο με μια σχέση σ' αυτό έχει ένα διάγραμμα Venn. Έτσι το $A=\{1, 2, 3, 5, 7\}$ έχει τα ακόλουθα διαγράμματα, με τις σχέσεις $r=\{<1, 3>, <3, 3>, <3, 2>, <2, 3>\}$ και $p=\{<1, 2>, <2, 1>, <1, 7>, <7, 7>\}$, αντίστοιχα.



2.2. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω A μη κενό σύνολο και $r\subset A\times A$. Η σχέση r καλείται **σχέση ισοδυναμίας στο A**, αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $(\forall x\in A)(<x, x>\in r)$

ii. $(<x, y>\in r$ και $<y, z>\in r) \Rightarrow <x, z>\in r$

iii. $<x, y>\in r \Rightarrow <y, x>\in r$

Σχέσεις με τις ιδιότητες (i) ή (ii) ή (iii) καλούνται **ανακλαστικές** ή **μεταβατικές** ή **συμμετρικές**, αντίστοιχα.

Έτσι, αν $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, η $r=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <1, 3>, <3, 1>, <4, 5>, <5, 4>\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A. Η r δεν είναι, προφανώς, η μοναδική σχέση ισοδυναμίας στο A. Για παράδειγμα η

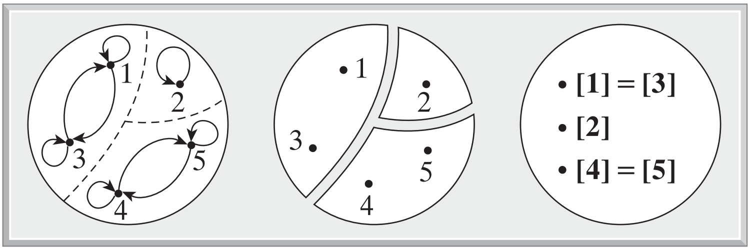
$\{<x, x>: x\in A\}$ και η $A\times A$ είναι επίσης σχέσεις ισοδυναμίας στο A. Ας θεωρήσουμε, όμως, την r του παραδείγματος και ας σχηματίσουμε, για κάθε $x\in A$, το σύνολο

$$[x]_r = \{y\in A: <x, y>\in r\}.$$

Παίρνουμε έτσι τα σύνολα $[1]_r = \{1, 3\} = [3]_r$, $[2]_r = \{2\}$, $[4]_r = \{4, 5\} = [5]_r$. Παρατηρούμε ότι για δύο διαφορετικά στοιχεία του A, τα αντίστοιχα σύνολα ταυτίζονται ή είναι ξένα μεταξύ τους. Παρατηρούμε, επίσης, ότι το σύνολο με στοιχεία όλα τα σύνολα $[x]_r$, δηλαδή το

$$\mathcal{\Pi}_r = \{[x]_r: x\in A\}$$

έχει ένωση το A. Σχηματικά έχουμε



Όσα συμβαίνουν στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν είναι συμπτωματικά. Θα αποδείξουμε αμέσως ότι ισχύουν για κάθε σχέση ισοδυναμίας:

2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν η r είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $A\neq\varnothing$, το σύνολο

$$\mathbf{[x]_r = \{y\in A: <x, y>\in r\}}$$

καλείται **κλάση ισοδυναμίας του x ως προς r**.

Το σύνολο συνόλων

$$\mathbf{\mathcal{\Pi}_r = \{[x]_r: x\in A\}}$$

καλείται **σύνολο πηλίκου του A διά της r**. Το συμβολίζουμε, επίσης **A/r**.

2.4. ΘΕΩΡΗΜΑ Αν r είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $A\neq\varnothing$, ισχύει ότι

$$\mathbf{<x, y>\in r \Leftrightarrow [x]_r = [y]_r} \qquad (1)$$

Απόδειξη: Έστω $<x, y>\in r$. Θα δείξουμε ότι το τυχόν z του $[x]_r$ ανήκει στο $[y]_r$ και αντίστροφα ότι το τυχόν z του $[y]_r$ ανήκει στο $[x]_r$, άρα θα προκύψει ότι $[x]_r=[y]_r$: Έστω $z\in[x]_r$. Τότε $\langle x, z\rangle\in r$. Επειδή όμως $\langle x, y\rangle\in r$, προκύπτει από τη μεταβατικότητα και την συμμετρικότητα της r ότι $\langle y, z\rangle\in r$. Άρα ότι $z\in[y]_r$. Όμοια προκύπτει ότι $z\in[y]_r \Rightarrow z\in[x]_r$. Άρα ισχύει $[x]_r=[y]_r$.

Αντίστροφα, έστω ότι $[x]_r=[y]_r$. Τότε $\langle y, y\rangle\in r$, άρα $y\in[y]_r$, άρα $y\in[x]_r$, άρα $\langle x, y\rangle\in r$. ■

2.5. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν το A είναι μη κενό σύνολο, **διαμέριση του A** καλείται κάθε σύνολο Π μη κενών, ξένων ανά δύο υποσυνόλων του A με $\cup\Pi=A$.

Έτσι το σύνολο $\Pi=\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ είναι μία διαμέριση του $A=\{1, 2, 3, 4\}$ και το σύνολο $\{2N, 2N+1\}$ είναι μία διαμέριση του N.

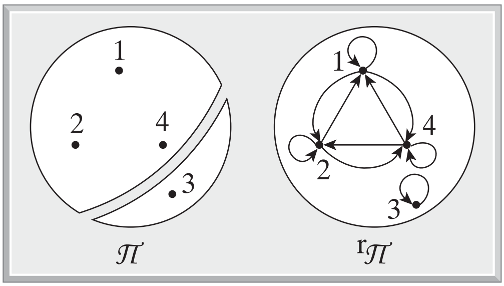
2.6. ΘΕΩΡΗΜΑ Αν η r είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $A\neq\varnothing$, τότε το σύνολο πηλίκων Π_r είναι μία διαμέριση του A.

Απόδειξη: Κάθε $[x]_r\in\Pi_r$ περιέχει το x, γιατί $\langle x, x\rangle\in r$. Άρα το Π_r είναι σύνολο μη κενών συνόλων.

Δείχνουμε ότι τα στοιχεία του Π_r είναι ξένα ανά δύο: Έστω $[x]_r$ και $[y]_r$ είναι δύο διακεκριμένα στοιχεία της Π_r. Αν είχαν μη κενή τομή θα υπήρχε $z\in[x]_r\cap[y]_r$. Θα ίσχυε, λοιπόν, $\langle z, x\rangle\in r$ και $\langle z, y\rangle\in r$. Λόγω της (1) θα έχουμε $[x]_r=[z]_r=[y]_r$, πράγμα που αντιφάσκει με το $[x]_r\neq[y]_r$. Άρα $[x]_r\cap[y]_r=\varnothing$.

Δείχνουμε ότι $\cup\Pi_r=A$: Από θεωρήματα του κεφαλαίου 1 προκύπτει ότι, αφού $\Pi_r\subset P(A)$, ισχύει $\cup\Pi_r\subset\cup P(A)=A$. Άρα $\cup\Pi_r\subset A$. Αντίστροφα, αν $x\in A$, τότε $x\in[x]_r\in\Pi_r$, άρα από τον ορισμό της ένωσης συνόλου προκύπτει ότι $x\in\cup\Pi_r$, άρα $A\subset\cup\Pi_r$. ■

Θεωρείστε, πάλι, την διαμέριση $\Pi=\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ του $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Η σχέση $r_\Pi=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$ που προκύπτει αν σχηματίσουμε όλα τα δυνατά ζεύγη από στοιχεία που βρίσκονται στο ίδιο σύνολο της Π είναι, προφανώς, σχέση ισοδυναμίας στο A. Σχηματικά έχουμε



Δείχνουμε ότι αυτά συμβαίνουν σε κάθε διαμέριση.

2.7. ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω A μη κενό σύνολο. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{П}$ του A, η σχέση

$$r_{\mathcal{П}} = \{<x, y> \in A \times A: \ (\exists \pi \in \mathcal{П})(x \in \pi \text{ και } y \in \pi)\}$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.

Απόδειξη: **i.** Έστω $x \in A$. Αφού $A = \cup \mathcal{П}$, ισχύει $x \in \cup \mathcal{П}$. Άρα $(\exists \pi \in \mathcal{П})(x \in \pi)$. Άρα $<x, x> \in r_{\mathcal{П}}$.

ii. Έστω $<x, y> \in r_{\mathcal{П}}$ και $<y, z> \in r_{\mathcal{П}}$. Τότε $(\exists \pi_1 \in \mathcal{П})(x \in \pi_1$ και $y \in \pi_1)$ και $(\exists \pi_2 \in \mathcal{П})(y \in \pi_2$ και $z \in \pi_2)$. Άρα $y \in \pi_1 \cap \pi_2$ και $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$. Αφού τα σύνολα της $\mathcal{П}$ είναι ξένα ανά δύο, προκύπτει $\pi_1 = \pi_2$. Άρα $(\exists \pi \in \mathcal{П})$ $(x \in \pi$ και $z \in \pi)$, άρα $<x, z> \in r_{\mathcal{П}}$.

iii. Προφανές. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρείστε το σύνολο των ακεραίων αριθμών Z και την ακόλουθη σχέση σε αυτό

$$r = \{<x, y> \in Z \times Z: \text{x και y διαιρούμενοι διά 3 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο}\}$$

Αυτή είναι, προφανώς, μια σχέση ισοδυναμίας στο Z. Για την κλάση ισοδυναμίας $[x]_r$ έχουμε

$$[x]_r = \{y: \text{x και y διαιρούμενοι διά 3 αφήνουν υπόλοιπο } 0\} =$$
$$= \{3n: n \in Z\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$

ή

$$[x]_r = \{y: \text{x και y διαιρούμενοι διά 3 αφήνουν υπόλοιπο } 1\} =$$
$$= \{3n+1: n \in Z\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, \ldots\}$$

ή

$$[x]_r = \{y: \text{x και y διαιρούμενοι διά 3 αφήνουν υπόλοιπο } 2\} =$$
$$= \{3n+2: n \in Z\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, \ldots\}.$$

Άρα ισχύει $\mathcal{П}_r = \{\{3n: n \in Z\}, \{3n+1: n \in Z\}, \{3n+2: n \in Z\}\}$ και είναι, όπως αναμένεται, μία διαμέριση του Z.

Θεωρείστε τώρα την σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από την $\mathcal{П}_r$. Ισχύει

$$r_{(\mathcal{П}_r)} = \{<x, y> \in Z \times Z: (x \in \{3n: n \in Z\} \text{ και } y \in \{3n: n \in Z\})\} \text{ ή}$$

$$(x\in\{3n+1: n\in Z\} \text{ και } y\in\{3n+1: n\in Z\}) \text{ ή}$$
$$(x\in\{3n+2: n\in Z\} \text{ και } y\in\{3n+2: n\in Z\})$$

Άρα ισχύει

$r_{(\mathcal{P}_r)} = \{<x, y>\in Z\times Z$: (οι x και y, διαιρούμενοι με το 3, αφήνουν υπόλοιπο 0) ή (οι x και y, διαιρούμενοι με το 3 αφήνουν υπόλοιπο 1) ή (οι x και y διαρούμενοι διά 3 αφήνουν υπόλοιπο 2)$\}$ =
= $\{<x, y>\in Z\times Z$: οι x και y, διαιρούμενοι διά 3, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο$\}$
Ισχύει λοιπόν

$$r_{(\mathcal{P}_r)} = r$$

και αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι αυτό ισχύει για κάθε σχέση ισοδυναμίας.

Για την r του παραδείγματος γράφουμε, αντί $<x, y>\in r$, $\mathbf{x\equiv y mod 3}$, συμβολίζουμε με $\mathbf{Z_3}$ το σύνολο πηλίκον $\mathcal{P}_r$ και το καλούμε **σύνολο των κλάσεων υπολοίπων modulo 3**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εξετάστε αν η ένωση και η τομή δύο σχέσεων ισοδυναμίας στο A είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.

2. Έστω p σχέση ισοδυναμίας στο A και q σχέση ισοδυναμίας στο B. Ορίζουμε την σχέση r στο $A\times B$, ως εξής:

$$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>>\in r \Leftrightarrow <x_1, x_2>\in p \text{ και } <y_1, y_2>\in q$$

Αποδείξτε ότι η r είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A\times B$.

3. Αν p και q είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο A, αποδείξτε ότι ισχύει $[x]_{p\cap q} = [x]_p\cap[x]_q$.

4. Θεωρείστε το σύνολο $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και στις ακόλουθες σχέσεις στο A.

i. $<z, y>\in r \Leftrightarrow y - x\in A$
ii. $<x, y>\in r \Leftrightarrow x = y$
iii. $<x, y>\in r \Leftrightarrow x - y$ πολλαπλάσιο του 2
iv. $<x, y>\in r \Leftrightarrow 4< x- y$

v. $<x, y> \in r \Leftrightarrow y - x = 1$

Ελέγξτε αν είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο Α. Αν ναι, βρείτε τα σύνολα πηλίκα $\mathcal{П}_r$ και κάντε το διάγραμμα των σχέσεων και των αντίστοιχων διαμερίσεων του Α, όπως στο παράδειγμα.

5. Δίνονται τα σύνολα υποσυνόλων του $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\Pi_1 = \{\{0, 3\}, \{1\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$, $\Pi_1 = \{\{0, 1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$, $\Pi_3 = \{A\}$. Ελέγξτε αν είναι διαμερίσεις του Α. Αν ναι, βρείτε τις σχέσεις ισοδυναμίας που παράγουν και κάνετε τα διαγράμματα των διαμερίσεων και των αντίστοιχων σχέσεων ισοδυναμίας.

3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω Α μη κενό σύνολο και $r \subset A \times A$. Η σχέση r καλείται **σχέση διάταξης στο Α** αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

i. $(\forall x \in A)(<x, x> \in A)$

ii. $(<x, y) \in r$ και $<y, z> \in r) \Rightarrow <x, z> \in r$

iii. $(<x, y> \in r$ και $<y, x> \in r) \Rightarrow x = y$

Σχέσεις με την ιδιότητα (iii) καλούνται **αντισυμμετρικές**.

Π.χ. η σχέση $r = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <3, 4>\}$ είναι σχέση διάταξης στο $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ενώ οι σχέσεις $r_1 = \{<1, 1>, <2, 2>, <1, 2>\}$, $r_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <2, 3>\}$, $r_3 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 3>, <2, 4>, <4, 2>\}$ δεν είναι, γιατί η r_1 δεν είναι ανελαστική, η r_2 δεν είναι μεταβατική και η r_3 δεν είναι αντισυμμετρική.

Αν το Α είναι μη κενό σύνολο, η σχέση $\{<x, x>: x \in A\}$ είναι σχέση διάταξης στο Α, ενώ αν το Α έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία η σχέση $A \times A$ δεν είναι σχέση διάταξης στο Α.

Μια σχέση διάταξης στο Α την συμβολίζουμε συνήθως με $\leq^A$ και **αντί** $<\mathbf{x}, \mathbf{y}> \in \leq^A$, **γράφουμε** $\mathbf{x} \leq^A \mathbf{y}$. Γράφουμε $\mathbf{x} \nleq^{\alpha} \mathbf{y}$ για να δηλώσουμε ότι $<\mathbf{x}, \mathbf{y}> \notin \leq^A$. Το διατεταγμένο ζεύγος $<\mathbf{A}, \leq^A>$ το καλούμε **διατεταγμένο σύνολο**. Τα μαθηματικά είναι γεμάτα από τέτοιες σχέσεις. Μία από αυτές ειναι **η φυσική διάταξη «≤»** μεταξύ πραγματικών αριθμών και μια άλλη **η σχέση εγκλεισμού** «⊂» μεταξύ των υποσυνόλων τυχόντος συνόλου. Άρα τα $<\mathbb{N}, \leq>$, $<\mathbb{Z}, \leq>$, $<\mathbb{Q}, \leq>$, $<\mathbb{R}, \leq>$, καθώς και το $<P(A), \subset>$, είναι διατεταγμένα σύνολα.

Αν $\leq^A$ είναι μια σχέση διάταξης στο A, συμβολίζουμε με $x<^A y$ το γεγονός «$\mathbf{x \leq^A y}$ ***και*** $\mathbf{x \neq y}$».

3.2. ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $<A, \leq^A>$ διατεταγμένο σύνολο. Τότε

i. $(\forall x \in A)\ (x \not<^A x)$. **ii.** $(x<^A y$ και $y<^A z) \Rightarrow x<^A z$. **iii.** $x<^A y \Rightarrow y \not<^A x$.

Απόδειξη: **i.** Προφανές.

ii. Αν $x<^A y$ και $y<^A z$, τότε $x \leq^A y$ και $y \leq^A z$, άρα $x \leq^A z$. Αν ίσχυε $x=z$, τότε θα προέκυπτε $x \leq^A y$ και $y \leq^A z$, άρα $x=y$, που είναι άτοπο. Άρα $x<^A z$.

iii. Έστω $x<^A y$. Αν ίσχυε $y<^A x$, από την (ii) θα προέκυπτε $x<^A x$, που είναι άτοπο, λόγω της (i). Άρα ισχύει $y \not<^A x$. ■

3.3. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\leq^A$ είναι μια σχέση διάταξης στο A και $x<^A y$, τότε το x καλείται **προηγούμενο** του y και το y **επόμενο** του x. Το x καλείται **αμέσως προηγούμενο** του y αν

i. $x<^A y$

ii. $(\nexists z \in A)(x<^A z<^A y)$

Τότε το y καλείται **αμέσως επόμενο** του x. Για κάθε $x \in A$, το σύνολο των προηγούμενων του x, δηλαδή το

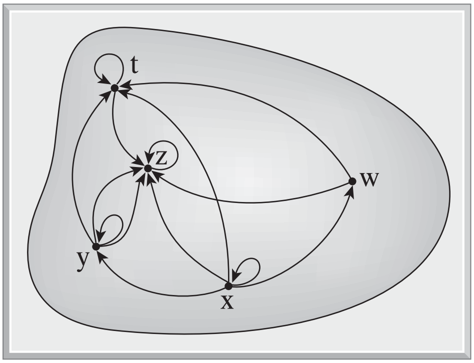
$$\mathbf{A_x = \{y \in A: y<^A x\}}$$

καλείται **αρχικό τμήμα του A με τέλος x**.

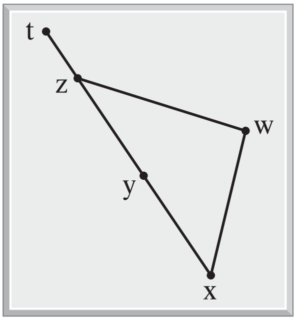
Έτσι, για το $<P(\{0, 1, 2\}, \subset)>$, το $\{1\}$ είναι αμέσως προηγούμενο του $\{0, 1\}$ και του $\{1, 2\}$. Το $\varnothing$ είναι προηγούμενο των $\{0, 1\}$ και $\{0, 2\}$, όχι όμως και αμέσως προηγούμενο. Τέλος ισχύει $P(A)_{\{0, 2\}} = \{\varnothing, \{0\}, \{2\}\}$ και $P(A)_{\{1\}} = \{\varnothing\}$.

Με την χρήση των εννοιών προηγούμενο-επόμενο γίνεται φανερή η λειτουργία της σχέσης διάταξης σε ένα σύνολο A. Μια τέτοια σχέση βάζει κάποια από τα στοιχεία του α στην σειρά έτσι ώστε, αν το x προηγείται και το y έπεται, να μην υπάρχει δυνατότητα να συμβαίνει και το αντίθετο. Αυτό θα γίνει ξεκάθαρο στα διαγράμματα που ακολουθούν.

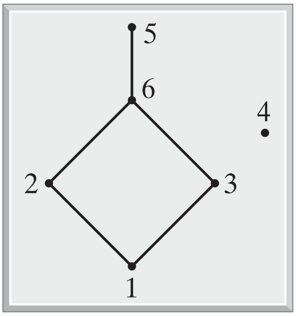
Θεωρείστε το διάγραμμα Venn του διατεταγμένου συνόλου $<A, \leq^A>$, όπου $A=\{x, y, z, w, t\}$ και $\leq = \{<x, x>, <y, y>, <z, z>, <w, w>, <t, t>, <x, y>, <y, z>, <x, z>, <x, w>, <x, z>, <w, z>, <x, t>, <y, t>, <z, t>, <w, t>\}$



Ξέροντας ότι το $<A, \leq^A>$ είναι διατεταγμένο σύνολο, μπορούμε να απλοποιήσουμε πολύ το διάγραμμα, με τις ακόλουθες συμβάσεις: Να παραλείψουμε το περίγραμμα του συνόλου. Να παραλείψουμε τα βέλη και αντ' αυτού να τοποθετήσουμε τα επόμενα στοιχεία ψηλότερα από τα προηγούμενα. Τέλος, να παραλείψουμε τις συνδέσεις μεταξύ στοιχείων που προκύπτουν από το γεγονός ότι η σχέση είναι ανακλαστική και μεταβατική. Το νέο διάγραμμα είναι το ακόλουθο.



και το $<A, \leq^A>$ με το επόμενο διάγραμμα

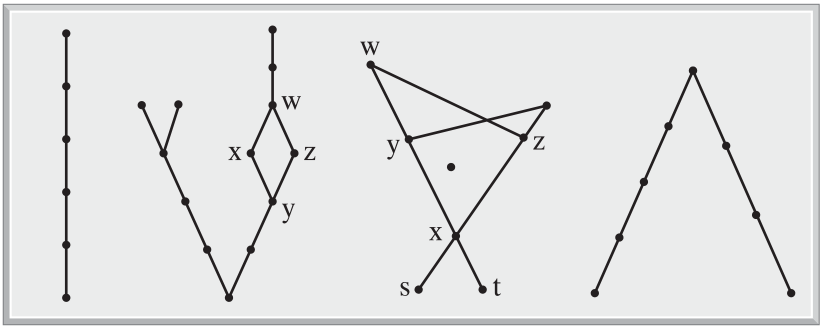


είναι το $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με $\leq^A = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <1, 5>, <2, 6>, <2, 5>, <3, 6> <3, 5>, <6, 5>\}$.

3.4. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $<A, \leq^A>$ διατεταγμένο σύνολο και $x \in A$. Το x καλείται **ελάχιστο στοιχείο** του $<A, \leq^A>$ αν δεν έχει προηγούμενο στοιχείο, δηλαδή αν $(\nexists y \in A)(y <^A x)$. Το x καλείται **μέγιστο στοιχείο** του $<A, \leq^A>$ αν δεν έχει επόμενο στοιχείο, δηλαδή αν $(\nexists y \in A)(x <^A y)$.

Το x καλείται **πρώτο στοιχείο** του $<A, \leq^A>$ αν είναι προηγούμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του, δηλαδή αν $(\forall y \in A)(x \leq^A y)$. Το x καλείται **τελευταίο στοιχείο** του $<A \leq^A>$ αν είναι επόμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του, δηλαδή αν $(\forall y \in A)(y \leq^A x)$.

Βρείτε τα ελάχιστα-μέγιστα και τα πρώτα-τελευταία στοιχεία των διατεταγμένων συνόλων του σχήματος:



Σχήμα 1

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι **κάθε πρώτο στοιχείο είναι ελάχιστον και κάθε τελευταίο στοιχείο είναι μέγιστο**. Πράγματι. Έστω x_0 πρώτο. Αν δεν ήταν ελάχιστο, θα υπήρχε $x <^A x_0$. Άρα θα ίσχυε $x <^A x_0$ και $x_0 \leq^A x$. Άρα θα προέκυπτε ότι $x \leq^A x_0$ και $x \neq x_0$ και $x_0 \leq^A x$, άρα $x = x_0$ και $x \neq x_0$ που είναι άτοπο. Τα προηγούμενα διαγράμματα δείχνουν ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Είναι επίσης άμεση συνέπεια του ορισμού (γιατί;) ότι, **αν υπάρχει πρώτο ή τελευταίο στοιχείο, αυτά είναι μοναδικά**. Αντίθετα τα διαγράμματα μας δίνουν παραδείγματα συνόλων με περισσότερα από ένα ελάχιστα ή μέγιστα.

3.5. ΟΡΙΣΜΟΣ Το διατεταγμένο σύνολο $<A, \leq^A>$ καλείται **ολικά διατεταγμένο αν**

$$(\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x \leq^A y \text{ ή } y \leq^A x)$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$(\forall x\in A)\ (\forall y\in A)\ (x<^{A}y \ \text{ ή } \ x=y \ \text{ ή } \ y<^{A}x)$$

Από τα διαγράμματα του προηγούμενου σχήματος, μόνο το πρώτο είναι ολικά διατεταγμένο. Προφανώς τα $<\mathbb{N}, \leq>$, $<\mathbb{Z}, \leq>$, $<\mathbb{Q}, \leq>$ και $<\mathbb{R}, \leq>$ είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα.

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο δεν μπορεί να έχει πολλά μέγιστα ή ελάχιστα στοιχεία. **Αν έχει ελάχιστο, αυτό είναι και πρώτο. Αν έχει μέγιστο, αυτό είναι και τελευταίο (γιατί;)**. Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο μπορεί να μην έχει ελάχιστο, αλλά κάποιο υποσύνολό του να έχει (π.χ. το $<\mathbb{Z}, \leq>$). Μπορεί όμως να έχει ελάχιστο και αυτό και κάθε μη κενό υποσύνολό του, πράγμα που, όπως θα αποδείξουμε αργότερα, ισχύει για το $<\mathbb{N}, \leq>$.

3.6. ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, τέτοιο ώστε κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο, καλείται **καλά διατεταγμένο**.

3.7. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $<A, \leq^{A}>$ διατεταγμένο σύνολο και B μη κενό υποσύνολό του. Το $x\in A$ καλείται **άνω φράγμα του B**, αν είναι επόμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του B. Δηλαδή αν $(\forall y\in B)(y\leq^{A}x)$. Το $x\in A$ καλείται **κάτω φράγμα του B**, αν είναι προηγούμενο ή ίσο όλων των στοιχείων του B. Δηλαδή αν $(\forall y\in B)\,(x\leq^{A}y)$.

Στο τρίτο διάγραμμα του σχήματος 1, το $\{x, s, t\}$ δεν έχει κάτω φράγματα, ενώ το $\{y, z, w\}$ έχει τρία. Στο δεύτερο διάγραμμα του σχήματος 1, το $\{x, y, z\}$ έχει τρία κάτω φράγματα και τρία άνω φράγματα. Το υποσύνολο των άρτιων αριθμών του $<\mathbb{Z}, \leq>$ δεν έχει άνω και κάτω φράγματα, ενώ το υποσύνολο $[0, 1)$ του $(\mathbb{R}, \leq>$ έχει άνω φράγμα κάθε στοιχείο του $[1, \infty)$ και κάτω φράγμα κάθε στοιχείο του $(-\infty, 0]$.

Το σύνολο των άνω φραγμάτων του μη κενού υποσυνόλου B του $<A, \leq^{A}>$, αν είναι μη κενό, είναι και αυτό διατεταγμένο σύνολο (ως προς την ίδια σχέση διάταξης). Μπορεί, λοιπόν, να έχει πρώτο στοιχείο ή όχι. Για παράδειγμα στο δεύτερο διάγραμμα του σχήματος 1, το σύνολο των άνω φραγμάτων του $\{x, y\}$ έχει πρώτο στοιχείο το x ενώ, στο τρίτο διάγραμμα, το σύνολο των άνω φραγμάτων του $\{x, y, z\}$ δεν έχει πρώτο στοιχείο. Αντίστοιχες σκέψεις γίνονται για το σύνολο των κάτω φραγμάτων μη κενού υποσυνόλου του $<A, \leq^{A}>$. Φαίνεται, λοιπόν, φυσικό να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

3.8. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $<A, \leq^A>$ διατεταγμένο σύνολο και B μη κενό υποσύνολό του. Το $x\in A$ καλείται **άνω πέρας του B** αν είναι το πρώτο στοιχείο του συνόλου των άνω φραγμάτων του B. Δηλαδή αν ισχύουν

i. $(\forall y\in B)\,(y\leq^A x)$

ii. $(\forall z\in A)$ (z άνω φράγμα του $B \Rightarrow x\leq^A z$)

Το $x\in A$ καλείται **κάτω πέρας του B** αν είναι το τελευταίο στοιχείο του συνόλου των κάτω φραγμάτων του B. Δηλαδή αν ισχύουν

i. $(\forall y\in B)\,(x\leq^A y)$

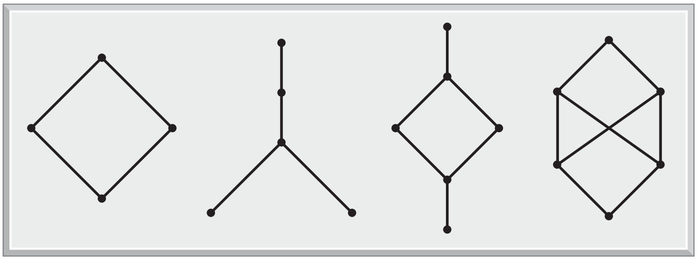
ii. $(\forall z\in A)$ (z κάτω φράγμα του $B \Rightarrow z\leq^A x$)

Τα άνω και κάτω πέρατα του B τα συμβολίζουμε με **supB** και **infB**, αντίστοιχα.

Στο τρίτο διάγραμμα, λοιπόν, του σχήματος 1, $\nexists \inf\{x, s, t\}$ και $\sup\{x, s, t\} = x$, $\inf\{y, z, w\} = x$ και $\sup\{y, z, w\} = w$. Στο δεύτερο διάγραμμα, έχουμε $\inf\{x, y, z\} = y$ και $\sup\{x, y, z\} = w$. Το $2Z$ δεν έχει κάτω και άνω πέρας στο $<Z, \leq>$, ενώ για το $[1, 0)$ μέσα στο $<\mathbb{R}, \leq>$ έχουμε $\inf[0, 1) = 0$ και $\sup[0, 1) = 1$.

3.9. ΟΡΙΣΜΟΣ Το διατεταγμένο σύνολο $<A, \leq^A>$ καλείται **σύνδεσμος ή δίκτυο**, αν για οποιαδήποτε $x\in A$ και $y\in A$, υπάρχουν τα $\inf\{x, y\}$ και $\sup\{x, y\}$.

Έτσι από τα διατεταγμένα σύνολα με τα παρακάτω διαγράμματα, μόνο το πρώτο και το τρίτο είναι σύνδεσμοι (γιατί;).



Είναι φανερό ότι κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο είναι δίκτυο. Άρα τα $<N, \leq>$, $<Z, \leq>$, $<Q, \leq>$, $<\mathbb{R}, \leq>$ είναι δίκτυα.

3.10. ΘΕΩΡΗΜΑ Για κάθε σύνολο A, το διατεταγμένο σύνολο $<P(A), \subset>$ είναι σύνδεσμος.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι $(\forall B\in P(A))(\forall \Gamma\in P(A))(\inf\{B, \Gamma\} = B\cap\Gamma$ και $\sup\{B, \Gamma\} = B\cup\Gamma)$:

Θα ισχύει $\inf\{B, \Gamma\} = B\cap\Gamma$, αν

i. $B\cap\Gamma\subset B$ και $B\cap\Gamma\subset\Gamma$ και

ii. $(\forall\Delta)(\Delta$ κάτω φράγμα του $\{B, \Gamma\} \Rightarrow \Delta\subset B\cap\Gamma$. Η σχέση (i) είναι προφανής.

Για την απόδειξη της (ii), έστω Δ κάτω φράγμα της $\{B, \Gamma\}$. Τότε ισχύει $\Delta\subset B$ και $\Delta\subset\Gamma$. Επομένως, αν $x\in\Delta$, τότε $x\in B$ και $x\in\Gamma$, άρα $x\in B\cap\Gamma$. Άρα $\Delta\subset B\cap\Gamma$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο

Όμοια απόδειξη για το $\sup\{B, \Gamma\} = B\cup\Gamma$. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

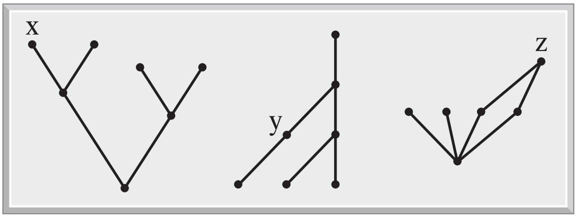
1. Εξετάστε αν η ένωση και η τομή δύο σχέσεων διάταξης στο A είναι σχέση διάταξης στο α.

2. Δίνονται τα διατεταγμένα σύνολα $<A, \leq^A>$ και $<B, \leq^B>$. Στο $A\times B$ ορίζουμε την σχέση

$$r = \{<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>>: x_1\leq^A x_2 \text{ και } y_1\leq^B y_2\}$$

Αποδείξτε ότι η r είναι σχέση διάταξης στο $A\times B$.

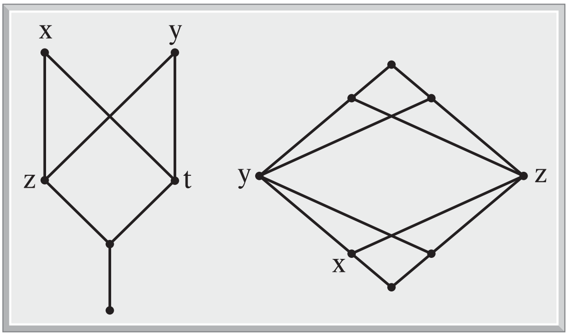
3. Ποια είναι τα διατεταγμένα σύνολα με τα ακόλουθα διαγράμματα:



Σε κάθε περίπτωση βρείτε τα ελάχιστα, μέγιστα, πρώτα και τελευταία στοιχεία. Βρείτε τα αρχικά τμήματα που αντιστοιχούν στα x, y, z. Βρείτε τα αμέσως προηγούμενα και τα αμέσως επόμενα στοιχεία των x, y, z.

4. Αν $A = \{1, 2, 3\}$, κάνετε το διάγραμμα του διατεταγμένου συνόλου $<P(A), \subset>$ και αποδείξτε ότι ένα $<P(B), \subset>$ είναι ολικά διατεταγμένο αν και μόνο αν το B έχει το πολύ ένα στοιχείο.

5. Βρείτε τα άνω και κάτω φράγματα, τα άνω και κάτω πέρατα των υποσυνόλων $\{x, y\}$ και $\{z, t\}$ του πρώτου διαγράμματος και του υποσυνόλου $\{x, y, z\}$ του δεύτερου διαγράμματος.



6. Έστω A τυχόν σύνολο και Π_A το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του. Αποδείξτε ότι το $<\Pi_A, \subset>$ είναι δίκτυο.

7. Αποδείξτε ότι το σύνολο A των άπειρων υποσυνόλων του N δεν είναι δίκτυο ως προς την σχέση εγκλεισμού.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν με κάποιο κανόνα f αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχείο x του συνόλου $A\neq\varnothing$ **ακριβώς ένα στοιχείο** του συνόλου $B\neq\varnothing$, λέμε ότι έχουμε μια **συνάρτηση του A στο B**.

Αν π.χ. το A είναι ένα σύνολο ανθρώπων και το B είναι το σύνολο των υψών τους, αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε άνθρωπο το ύψος του, έχουμε μια συνάρτηση του A στο B. Αν, αντίθετα, αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχείο του B έναν άνθρωπο του A με το ύψος αυτό, μπορεί να μην έχουμε συνάρτηση του B στο A, γιατί είναι δυνατόν δύο άνθρωποι του A να έχουν το ίδιο ύψος.

Γράφουμε

$$\mathbf{f}: \mathbf{A}\to\mathbf{B}$$

για να δηλώσουμε ότι «f είναι συνάρτηση του A στο B». Το A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και το B **πεδίο τιμών**. Το $x\in A$ καλείται **πρότυπο** και το μοναδικό $y\in B$ που αντιστοιχεί στο x καλείται **εικόνα** του x. Γράφουμε $\mathbf{y=f(x)}$ για να δηλώσουμε ότι **το y είναι εικόνα του x**. Οι συναρτήσεις $f: A\to B$

και $g: \Gamma \to \Delta$ είναι **ίσες** αν $A = \Gamma, B = \Delta$ και $(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε μια συνάρτηση $f: N \to N$ για τον κανόνα $(\forall n \in N)(f(n) = 2n + 1 \in N)$. Έχουμε επίσης μια συνάρτηση $f: N \to 2N + 1$, για τον κανόνα $(\forall n \in N)(g(n) = 2n + 1 \in 2N + 1)$. Οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες, γιατί έχουν διαφορετικά πεδία τιμών.

2. Αν έχουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 7\}$ και τον κανόνα $f(1) = f(5) = 5$, $f(2) = f(4) = 7$, παίρνουμε μια συνάρτηση $f: A \to B$.

3. Αν $X = \{-1, 1\}$ και αντιστοιχίσουμε σε κάθε ρητό αριθμό το 1 και σε κάθε άρρητο αριθμό το -1, προκύπτει μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to X$, η εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = 1, & \text{αν } x \in Q \\ f(x) = -1, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

4. Αν σε κάθε μη κενό υποσύνολο του N, αντιστοιχίσουμε το πρώτο στοιχείο του, έχουμε μία συνάρτηση $f: P(N) - \{\varnothing\} \to N$, την

$$\forall A \in P(N) - \{\varnothing\},\ f(A) = (\text{το πρώτο στοιχείο του } A) \in N$$

Αν, αντίστροφα, αντιστοιχίσουμε, σε κάθε στοιχείο του N ένα υποσύνολο του N που το έχει πρώτο στοιχείο, δεν έχουμε συνάρτηση του N στο $P(N) - \{\varnothing\}$, γιατί στο 2 π.χ. αντιστοιχεί και το $\{2, 3, 7\}$ και $2N - \{0\}$.

5. Αν έχουμε το Z και το Z_3, και τον κανόνα

$$(\forall x \in Z)\,(f(x) = [x] \in Z_3)$$

προκύπτει προφανώς μια συνάρτηση $f: Z \to Z_3$. Δεν έχουμε, όμως, συνάρτηση του Z_3 στο Z αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε $[x]$ το x· γιατί $4 \equiv 7 \bmod 3 \Rightarrow [4] = [7]$. Άρα, στο $[4] \in Z_3$, αντιστοιχίσουμε τους διαφορετικούς ακεραίους 4 και 7.

4.1. ΟΡΙΣΜΟΣ Μία συνάρτηση $f: A \to B$ καλείται **αμφιμονότιμη** αν κάθε στοιχείο του B είναι αντίστοιχο το πολύ ενός στοιχείου του A. Δηλαδή αν

$$(f(x_1) = y \text{ και } f(x_2) = y) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{1}$$