Εισαγωγή στη Θεωρία Δικτύων

Κορνηλίας Κάλφα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό έχει σαν βάση τις παραδόσεις μου στο μάθημα «Εισαγωγή στη Θεωρία Δικτύων», στους τεταρτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Α.Π.Θ. Συμπυκνώνει τη διδακτική εμπειρία τριών ετών.

Ευχαριστώ τις τρεις τάξεις μου για τα ερεθίσματα που μου έδωσαν και ελπίζω πως οι επόμενες θα το βρουν χρήσιμο και θα με βοηθήσουν να το βελτιώσω. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους φοιτητές μου Δημήτρη Ιασονίδη και Δημήτρη Μπρίκα για την ουσιαστική συμβολή τους στη διαμόρφωση του κειμένου.

Ευχαριστώ πολύ το συνάδελφο Τάσο Τοκμακίδη για την τόσο όμορφη παρουσίαση του χειρογράφου. Τέλος, ευχαριστώ την κ. Π. Ζήτη που ανέλαβε την εκτύπωση και το κόστος της έκδοσης αυτής.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1994

Κορνηλία Κάλφα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ορισμός της έννοιας της άλγεβρας *Boole* προηγείται του ορισμού της έννοιας του δικτύου. Το 1824 ο *George Boole (1815-1864)*, στην προσπάθειά του να κωδικοποιήσει τους νόμους της σκέψης έκανε τα ακόλουθα: Θεώρησε το σύνολο P των προτάσεων μιας γλώσσας και ταύτισε τις προτάσεις που έχουν την ίδια σημασία. Θεώρησε τη διάζευξη «∨» και τη σύζευξη «∧» ως διμελείς πράξεις στο P και την άρνηση «¬» ως μονομελή πράξη στο P. Παρατήρησε ότι οι τρεις πράξεις έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$(1)\quad \begin{cases} \phi\wedge\phi=\phi & \phi\vee\phi=\phi \\ \phi\wedge\psi=\psi\wedge\phi & \phi\vee\psi=\psi\vee\phi \\ \phi\wedge(\psi\wedge s)=(\phi\wedge\psi)\wedge s & \phi\vee(\psi\vee s)=(\phi\vee\psi)\vee s \\ \phi\wedge(\phi\vee\psi)=\phi & \phi\vee(\phi\wedge\psi)=\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi\wedge(\psi\vee s)=(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge s) & \phi\vee(\psi\wedge s)=(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee s) \\ \phi\wedge\neg\phi=0 & \phi\vee\neg\phi=1 \end{cases}$$

όπου 0 η τυχούσα αντίφαση και 1 η τυχούσα ταυτολογία. Κάθε σύνολο με τρεις πράξεις σ' αυτό και δύο ειδικά στοιχεία, που συμπεριφέρονται όπως τα ∧, ∨, ¬, 0, 1 επικράτησε να ονομάζεται άλγεβρα *Boole*.

Πολύ αργότερα, στην τελευταία δεκαετια του 19ου αιώνα, οι *Ernst Schröder (1841-1902)* και *Richard Dedekind (1831-1916)*, ανεξάρτητα μεταξύ τους, έφτασαν στον ορισμό του δικτύου ως συνόλου με δύο πράξεις, «∧» και «∨» σ' αυτό, που πληρούν τις ιδιότητες (1). Όρισαν δηλ. το δίκτυο ως γενίκευση της άλγεβρας *Boole*.

Οι ορισμοί που δόθηκαν πιο πάνω είναι αλγεβρικοί. Είναι, όμως, εύκολο να δούμε ότι, αν το $\langle\alpha,\wedge,\vee\rangle$ είναι δίκτυο, η σχέση

$$x\leq y\Leftrightarrow x\vee y=y$$

είναι σχέση διάταξης. Άρα το δίκτυο – και κατά συνέπεια η άλγεβρα *Boole* – μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ειδικό διατεταγμένο σύνολο $\langle \alpha, \leq \rangle$. Δεν παραθέτουμε εδώ το συνολοθεωρητικό ορισμό του δικτύου, λέμε, όμως, ότι θα προτιμήσουμε να προσεγγίσουμε τα δίκτυα ως διατεταγμένα σύνολα, γιατί τα διατεταγμένα σύνολα μπορούν να παρασταθούν με τα διαγράμματα *Hasse* κι έτσι να γίνουν αντιληπτά με εποπτικό τρόπο.

Αρχή της Θεωρίας Δικτύων θεωρείται η δουλιά του *Garet Birkhoff*, γύρω στο 1930. Η θεωρία αυτή γνώρισε ταχύτατη ανάπτυξη στα επόμενα χρόνια, γιατί αμέσως φάνηκε η σημασία της για διάφορους κλάδους των Μαθηματικών και τη σύνδεση μεταξύ τους. Ο λόγος είναι ότι γνωστά σύνολα αντικειμένων από την Άλγεβρα, τη Θεωρία Συνόλων, την Τοπολογία, τη Γεωμετρία, τη Θεωρητική Φυσική κτλ. είναι δίκτυα ως προς κάποια σχέση διάταξης, συνήθως δε ως προς τη σχέση εγκλεισμού «$\subset$».

Θεωρώ γνωστή την Αξιωματική Θεωρία Συνόλων Zermelo-Fraenkel -choice (Z.F.C.), στοιχεία της οποίας παρουσιάζω σε παράρτημα, στο τέλος του βιβλίου. Όμως, ο αναγνώστης, που είναι εξοικειωμένος μόνο με τη Θεωρία Συνόλων του Cantor, δεν θα συναντήσει δυσκολίες στη μελέτη του βιβλίου αυτού. Απλά, χρειάζεται να αντικαταστήσει κάποιους ορισμούς εννοιών από τους αντίστοιχους της μη αξιωματικής Θεωρίας Συνόλων. Του υποδεικνύω ότι δεν πρέπει να μπερδευτεί από το γεγονός ότι δεν χρησιμοποιούνται κεφαλαία γράμματα για τα σύνολα και μικρά γράμματα για τα στοιχεία τους, αφού, στα πλαίσια της Θεωρίας Z.F.C., κάθε αντικείμενο είναι σύνολο.

Θεωρώ γνωστά κάποια στοιχεία Άλγεβρας και Τοπολογίας και ορισμένα παραδείγματα αντλούνται από τους κλάδους αυτούς. Ο μη εξοικειωμένος αναγνώστης μπορεί να τα παραλείψει και να συνεχίσει την ανάγνωση του βιβλίου. Θεωρώ, επίσης, γνωστά το σύνολο N των φυσικών, το σύνολο Z των ακέραιων, το σύνολο Q των ρητών και το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Οι ευκολότερες από τις ασκήσεις, που αντιστοιχούν σ' ένα τμήμα της θεωρίας, προηγούνται. Στο τέλος, παρουσιάζεται μια σειρά ασκήσεων εφόλης της ύλης, με αύξοντα βαθμό δυσκολίας.

Χρησιμοποιώ τα σύμβολα «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$», «$\exists$», «$\forall$» για να δηλώσω τις έννοιες «συνεπάγεται», «συνεπάγεται και αντίστροφα», «υπάρχει», «για κάθε», αντίστοιχα. Τέλος, το σύμβολο $\square$ υποδηλώνει το τέλος της απόδειξης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Στα πλαίσια της ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ ZFC ως διατεταγμένο ζεύγος $\langle x, y\rangle$ ορίζεται το σύνολο $\{\{x\}, \{x,y\}\}$. Από τον ορισμό αυτόν προκύπτει εύκολα ότι

$$(\langle x,y\rangle=\langle z,t\rangle \Rightarrow x=z \text{ και } y=t).$$

Ως καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων α, β ορίζεται το σύνολο $\alpha\times\beta=\{\langle x, y\rangle : x\in\alpha \text{ και } y\in\beta\}$.[1] Σχέση καλείται κάθε σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

1.0. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω α σύνολο και $r\subset\alpha\times\alpha$. Η r καλείται σχέση διάταξης στο α αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: **i.** $(\forall x\in\alpha)(\langle x,x\rangle\in\alpha)$, **ii.** $(\langle x,y\rangle\in r$ και $\langle y,z\rangle\in r) \Rightarrow \langle x,z\rangle\in r$ και **iii.** $(\langle x,y\rangle\in r$ και $\langle y,x\rangle\in r) \Rightarrow x=y$.

Σχέσεις στο σύνολο α με τις ιδιότητες i, ii ή iii καλούνται ανακλαστικές, μεταβατικές ή αντισυμμετρικές, αντίστοιχα. Μια σχέση διάταξης στο α συμβολίζεται συνήθως με $\leq^{\alpha}$. Γράφουμε $x\leq^{\alpha}y$ για να δηλώσουμε ότι $\langle x,y\rangle\in\leq^{\alpha}$, ενώ γράφοντας $x<^{\alpha}y$ εννοούμε ότι $x\leq^{\alpha}y$ και $x\neq y$. Η δομή $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ καλείται διατεταγμένο σύνολο.

Αν με $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ συμβολίσουμε τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα, και με $\leq$ τη φυσική διάταξή τους, τότε τα $\langle\mathbb{N},\leq\rangle$, $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$, $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$ και $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$, είναι διατεταγμένα σύνολα. Διατεταγμένο σύνολο είναι και το $\langle N^{+},/\rangle$, όπου N^{+} είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών και / η σχέση διαιρετότητας.

---

[1] Για δύο σύνολα α και β είναι γνωστό ότι η κλάση $\alpha\times\beta$ είναι κι αυτή σύνολο. Για την απόδειξη βλ. [8].

Είναι προφανές ότι κάθε σύνολο (συνόλων) με τη σχέση εγκλεισμού είναι διατεταγμένο σύνολο. Έτσι για κάθε σύνολο α, το $\langle \mathbb{P}(\alpha),\subset\rangle$, όπου $P(\alpha)$ το δυναμοσύνολο του α, είναι διατεταγμένο σύνολο.

1.1. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν η $\leq^{\alpha}$ είναι μια σχέση διάταξης στο α κι αν ισχύει $x\leq^{\alpha}y$, τότε το x καλείται προηγούμενο ή ίσο του y και το y καλείται επόμενο ή ίσο του x. Αν ισχύει $x<^{\alpha}y$ τότε το x καλείται προηγούμενο του y και το y επόμενο του x.

1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν η $\leq^{\alpha}$ είναι μια σχέση διάταξης στο σύνολο α, το x καλείται αμέσως προηγούμενο του y και το y καλείται αμέσως επόμενο του x αν ισχύει ότι $x<^{\alpha}y$ και $(\nexists z\in \alpha)(x<^{\alpha}z<^{\alpha}y)$.

Έτσι στο $\langle N,\leq\rangle$ ο $n+1=n^{+}$ είναι αμέσως επόμενος του n και στο $\langle P(\{1,3,5\}),\subset\rangle$ το $\{1,5\}$ είναι αμέσως επόμενο του $\{1\}$ και του $\{5\}$.

Με τη χρήση των εννοιών προηγούμενο–επόμενο γίνεται φανερή η λειτουργία μιας σχέσης διάταξης σε ένα σύνολο α. Μια τέτοια σχέση βάζει κάποια από τα στοιχεία του α στη σειρά, έτσι ώστε το x να προηγείται του y ($x<^{\alpha}y$), χωρίς να μπορεί να συμβαίνει συγχρόνως και το αντίθετο ($y<^{\alpha}x$). Αν η σχέση $\leq^{\alpha}$ τακτοποιεί όλα τα στοιχεία του α στη σειρά, τότε προκύπτει η έννοια της ολικής διάταξης:

1.3. ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα διατεταγμένο σύνολο $\langle \alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ καλείται ολικά διατεταγμένο ή αλυσίδα αν $(\forall x\in \alpha)(\forall y\in \alpha)(x\leq^{\alpha}y$ ή $y\leq^{\alpha}x)$.

Τα $\langle \mathbb{N},\leq\rangle$, $\langle \mathbb{Z},\leq\rangle$, $\langle \mathbb{Q},\leq\rangle$ και $\langle \mathbb{R},\leq\rangle$ είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα. Το $\langle N^{+},/\rangle$ δεν είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο, γιατί οι αριθμοί 2 και 5 δεν συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση διαιρετότητας. Αν το α έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία $x\neq y$, τότε το $\langle P(\alpha),\subset\rangle$ δεν είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο, γιατί $\{x\}\not\subset\{y\}$ και $\{y\}\not\subset\{x\}$. Γενικά ένα στοιχείο ενός διατεταγμένου συνόλου μπορεί να έχει ένα, πολλά ή κανένα αμέσως προηγούμενο στοιχείο, ένα στοιχείο, όμως, ενός ολικά διατεταγμένου συνόλου έχει το πολύ ένα αμέσως προηγούμενο στοιχείο.

Η ίδια παρατήρηση ισχύει φυσικά και για το αμέσως επόμενο στοιχείο. Κάθε υποσύνολο ενός ολικά διατεταγμένου συνόλου είναι ολικά διατεταγμένο, ως προς την ίδια σχέση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα διατεταγμένα σύνολα $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ και $\langle\beta,\leq^{\beta}\rangle$. Στο $\alpha\times\beta$ ορίζουμε τη σχέση

$$r = \{\langle\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle\rangle : x_1\leq^{\alpha}x_2 \text{ και } y_1\leq^{\beta}y_2\}.$$

Αποδείξτε ότι η r είναι σχέση διάταξης στο $\alpha\times\beta$.

2. Δίνονται τα διατεταγμένα σύνολα $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ και $\langle\beta,\leq^{\beta}\rangle$. Συμβολίστε με $\leq^{\alpha\times\beta}$ τη σχέση r της προηγούμενης άσκησης. Αποδείξτε ότι το $\langle x_1,y_1\rangle$ είναι αμέσως προηγούμενο του $\langle x_2,y_2\rangle$, αν και μόνο αν ισχύει (x_1 αμέσως προηγούμενο του x_2 και $y_1=y_2$) ή ($x_1=x_2$ και y_1 αμέσως προηγούμενο του y_2).

3. Αποδείξτε ότι το $y\in P(\alpha)$ είναι αμέσως επόμενο του x στο $\langle P(\alpha),\subset\rangle$, αν και μόνο αν $(\exists z\notin x)(y=x\cup\{z\})$.

Σε ένα σύνολο α ορίζεται πάντοτε η σχέση διάταξης $i_\alpha=\{\langle x,x\rangle: x\in\alpha\}$. Όμως, εκτός από τις περιπτώσεις που το α είναι το πολύ μονοσύνολο, ορίζονται και άλλες σχέσεις διάταξης. Όλες τους είναι υπερσύνολα της i_α, όμως μεταξύ τους μπορεί να μην συνδέονται με τη σχέση υποσυνόλου. Έτσι, στο $\alpha=\{1,3,5,6\}$ οι σχέσεις διάταξης $r_1=i_\alpha\cup\{\langle 1,3\rangle\}$ και $r_2=i_\alpha\cup\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle\}$ συνδέονται μεταξύ τους, ενώ η σχέση διάταξης $r_3=i_\alpha\cup\{\langle 3,5\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$ δεν συνδέεται με καμία από αυτές.

Ας συμβολίσουμε, τώρα, με $\Delta(\alpha)$ το σύνολο των σχέσεων διάταξης[1] στο α. Αποδεικνύουμε ότι:

1.4. ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω α σύνολο.

[1] Κάθε σχέση διάταξης στο α ανήκει στο $P(\alpha\times\alpha)$. Άρα η κλάση των σχέσεων διάταξης στο α είναι η $\Delta(\alpha)=\{r\in P(\alpha\times\alpha): p(r)\}$, όπου p(r) είναι η ιδιότητα «η r είναι σχέση διάταξης στο α». Από το αξίωμα του δυναμοσυνόλου και το διαχωριστικό αξίωμα–σχήμα προκύπτει ότι η $\Delta(\alpha)$ είναι σύνολο.

i. Η τομή κάθε μη κενού συνόλου σχέσεων διάταξης στο α είναι σχέση διάταξης στο α.

ii. Η ένωση ενός συνόλου σχέσεων διάταξης στο α δεν είναι πάντα σχέση διάταξης στο α.

iii. Η ένωση κάθε αλυσίδας σχέσεων διάταξης στο α είναι σχέση διάταξης στο α.

Απόδειξη **i.** Έστω $\varnothing \neq S \subset \Delta(\alpha)$. Αν $x \in \alpha$, τότε $(\forall r \in S)(\langle x,x\rangle \in r)$, άρα $\langle x,x\rangle \in \cap S$. Αν $\langle x,y\rangle \in \cap S$ και $\langle y,z\rangle \in \cap S$, τότε $(\forall r \in S)(\langle x,y\rangle \in r$ και $\langle y,z\rangle \in r)$. Άρα $(\forall r \in S)(\langle x,z\rangle \in r)$. Άρα $\langle x,z\rangle \in \cap S$. Αν $\langle x,y\rangle \in \cap S$, τότε $(\forall r \in S)(\langle x,y\rangle \in r$, άρα $(\forall r \in S)(\langle y,x\rangle \in r)$, οπότε $\langle y,z\rangle \in \cap S$.

ii. Θεωρείστε το σύνολο $S=\{r_1,r_3\}$ της προηγούμενης παραγράφου. Ισχύει: $\langle 1, 3\rangle \in \cup S$, $\langle 3,5\rangle \in \cup S$ και $\langle 1,5\rangle \notin \cup S$. Η $\cup S$ δεν είναι, επομένως, μεταβατική.

iii. Έστω $S \subset \Delta(\alpha)$, τέτοιο ώστε το $\langle S, \subset\rangle$ να είναι αλυσίδα. Εύκολα προκύπτει ότι η $\cup S$ είναι ανακλαστική και αντισυμμετρική. Για να δείξουμε ότι είναι μεταβατική θεωρούμε $\langle x,y\rangle \in \cup S$ και $\langle y,z\rangle \in \cup S$. Τότε υπάρχουν r_1 και r_2 στην S, έτσι ώστε $\langle x,y\rangle \in r_1$ και $\langle y,z\rangle \in r_2$. Αφού όμως $r_1 \subset r_2$ ή $r_2 \subset r_1$, προκύπτει ότι $(\exists r \in S)(\langle x,y\rangle \in r$ και $\langle y,z\rangle \in r)$. Άρα $(\exists r \in S)(\langle x,z\rangle \in r)$ και $\langle x,z\rangle \in \cup S$. Άρα η $\cup S$ είναι μεταβατική.

□

1.5. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\langle \alpha, \leq^\alpha\rangle$ ένα διατεταγμένο σύνολο και $x \in \alpha$. Το x καλείται *ελάχιστο στοιχείο του α* αν δεν έχει προηγούμενα στοιχεία, δηλ. αν $(\nexists y \in \alpha)(y <^\alpha x)$. Το x καλείται *μέγιστο στοιχείο του α* αν δεν έχει επόμενα στοιχεία, δηλ. αν $(\nexists y \in \alpha)(x <^\alpha y)$. Το x καλείται *πρώτο στοιχείο του α* αν είναι προηγούμενο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του α, δηλ. αν $(\forall y \in \alpha)(x \leq^\alpha y)$. Τέλος το x καλείται *τελευταίο στοιχείο του α* αν είναι επόμενο ή ίσο με όλα τα στοιχεία του α, δηλ. αν $(\forall y \in \alpha)(y \leq^\alpha x)$.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι *κάθε πρώτο στοιχείο είναι ελάχιστο και κάθε τελευταίο στοιχείο είναι μέγιστο*, καθώς και ότι, αν ένα σύνολο έχει πρώτο ή τελευταίο στοιχείο, αυτά είναι μοναδικά. Αντίθετα, ένα σύνολο μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ελάχιστα ή μέγιστα στοιχεία. Π.χ. το διατεταγμένο σύνολο $\langle \alpha, r_3 \rangle$ του παραδείγματος της σελ.3 έχει ελάχιστα στοιχεία τα 1, 3 και μέγιστα τα 1, 6.

Η διάταξη των πεπερασμένων διατεταγμένων συνόλων απεικονείζεται πολύ καθαρά με τα διαγράμματα του *Hasse*. Το θεώρημα που ακολουθεί μας δείχνει τον τρόπο:

1.6. ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$ ένα μη κενό πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο.

i. Το $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$ έχει ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία.

ii. Αν το $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$ είναι αλυσίδα, τότε έχει πρώτο και τελευταίο στοιχείο.

iii. Κάθε μη ελάχιστο στοιχείο του $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$ έχει αμέσως προηγούμενα στοιχεία και κάθε μη μέγιστο στοιχείο του $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$ έχει αμέσως επόμενα στοιχεία.

Απόδειξη **i.** Δείχνουμε, μόνο, ότι έχει ελάχιστα στοιχεία, γιατί με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι έχει και μέγιστα. Γνωρίζοντας ότι κάθε μη κενό, πεπερασμένο σύνολο είναι ισοπληθές με ένα μη μηδενικό φυσικό αριθμό,[1] αρκεί να δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \langle \alpha, \leq^\alpha \rangle)(\alpha \sim n^+ \Rightarrow \langle \alpha, \leq^\alpha \rangle \text{ έχει ελάχιστο}) \qquad (1)$$

Θεωρούμε, λοιπόν, την πρόταση

$$p(n): \text{«}(\forall \langle \alpha, \leq^\alpha \rangle)(\alpha \sim n^+ \Rightarrow \langle \alpha, \leq^\alpha \rangle \text{ έχει ελάχιστο»}.$$

Ισχύει η $p(0)$, γιατί $\alpha \sim 1 \Rightarrow \alpha = \{x\} \Rightarrow x$ ελάχιστο στοιχείο του $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$.

Έστω ότι ισχύει η $p(n)$. Αν $\alpha \sim n^{++}$, υπάρχει $f: n^{++} \to \alpha$ που είναι αμφιμονότιμη και επί. Άρα ισχύει $\alpha - \{f(n^+)\} \sim n^+$ και το $\langle \alpha - \{f(n^+)\}, \leq^\alpha \rangle$ έχει ελάχιστο στοιχείο x_0. Αν $f(n^+) \leq^\alpha x_0$, τότε το $f(n^+)$ είναι ελάχιστο του $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$. Αν $f(n^+) \not\leq^\alpha x_0$, τότε το x_0 είναι ελάχιστο του $\langle \alpha, \leq^\alpha \rangle$. Άρα ισχύει η $p(n^+)$.

[1] Ο ορισμός αυτός του πεπερασμένου συνόλου προέρχεται από την Αξιωματική Θεωρία Συνόλων, όπου το $\varnothing$ ταυτίζεται με το 0 και το $\{0,1,\ldots,n\}$ με τον $n^+ = n+1$. Ο μη εξοικειωμένος αναγνώστης με την Αξιωματική Θεωρία Συνόλων μπορεί να θεωρήσει ότι κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο είναι ισοπληθές μ' ένα τμήμα των φυσικών αριθμών $\{0,1,2,\ldots,n\}$.

Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει, λοιπόν, ότι, για κάθε n $\in N$, ισχύει η p(n), άρα ότι ισχύει η (1).

ii. Αν x είναι ελάχιστο στοιχείο της αλυσίδας $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$, τότε $(\forall y\in\alpha)(y \not<^{\alpha} x)$. Άρα $(\forall y\in\alpha)(x\leq^{\alpha} y)$. Έτσι το x είναι πρώτο στοιχείο της $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$. Επομένως, σύμφωνα με την i, το $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ έχει πρώτο στοιχείο. Όμοια αποδεικνύεται ότι το $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$ έχει τελευταίο στοιχείο.

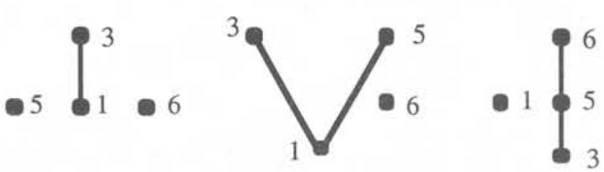
iii. Έστω x_0 μη ελάχιστο στοιχείο του πεπερασμένου συνόλου $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$. Το x_0 έχει προηγούμενα στοιχεία. Άρα το σύνολο $\beta=\{x\in\alpha\text{: } x<^{\alpha}x_0\}$ είναι μη κενό, πεπερασμένο σύνολο. Το $\langle\beta,\leq^{\alpha}\rangle$ έχει, επομένως, μέγιστα στοιχεία. Έστω y_0 ένα τέτοιο μέγιστο. Αφού $y_0\in\beta$ ισχύει $y_0<^{\alpha}x_0$. Αν υπήρχε $z\in\alpha$, ώστε $y_0<^{\alpha}z<^{\alpha}x_0$, τότε θα ίσχυε $z\in\beta$ και το y_0 θα είχε επόμενο στοιχείο στο β. Άρα το y_0 δεν θα ήταν μέγιστο του β. Καταλήξαμε, λοιπόν, σε άτοπο, υποθέτοντας ότι το y_0 δεν είναι αμέσως προηγούμενο στοιχείο του x_0. Άρα το y_0 είναι αμέσως πρηγούμενο στοιχείο του x_0.

Όμοια αποδεικνύεται και το δεύτερο μέρος της iii.

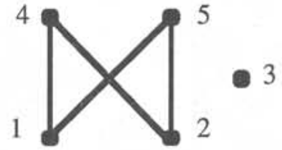
□

Ας σχεδιάσουμε, τώρα, το διάγραμμα *Hasse* του τυχόντος, μη κενού πεπερασμένου διατεταγμένου συνόλου $\langle\alpha,\leq^{\alpha}\rangle$:

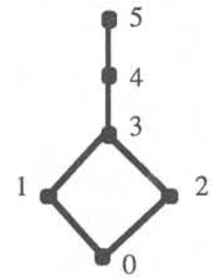
Σημειώνουμε, αρχικά, τα ελάχιστα στοιχεία του συνόλου. Ύστερα, τα αμέσως επόμενα κάθε ελάχιστου στοιχείου, πιο ψηλά από το στοιχείο και τα συνδέουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ύστερα, τα αμέσως επόμενα των αμέσως επόμενων στοιχείων κ.ο.κ. Προσέχουμε, κάθε στοιχείο να εμφανίζεται στο διάγραμμα μια φορά μόνο. Έτσι, τα διαγράμματα των $\langle\alpha,r_1\rangle$, $\langle\alpha,r_2\rangle$ και $\langle\alpha,r_3\rangle$ του παραδείγματός μας είναι, αντίστοιχα, τα ακόλουθα:



Αν μας δοθεί το διάγραμμα ενός διατεταγμένου συνόλου $\langle \alpha, \leq^{\alpha} \rangle$, μπορούμε εύκολα ν' αναγράψουμε τα στοιχεία του α και της σχέσης $\leq^{\alpha}$. Δεν πρέπει, όμως, να ξεχάσουμε τόσο τα ζεύγη $\langle x,x \rangle$, για $x \in \alpha$, όσο και τα ζεύγη που προκύπτουν από τη μεταβατικότητα της σχέσης $\leq^{\alpha}$. Έτσι το διάγραμμα



είναι το διάγραμμα του $\langle \alpha, \leq^{\alpha} \rangle$, με $\alpha = \{1,2,3,4,5\}$ και $\leq^{\alpha} = i_{\alpha} \cup \{\langle 1,4 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$. Και το διάγραμμα



είναι το διάγραμμα του $\langle \alpha, \leq^{\alpha} \rangle$, με $\alpha = \{0,1,2,3,4,5\}$ και $\leq^{\alpha} = i_{\alpha} \cup \{\langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 0,5 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,5 \rangle\}$.

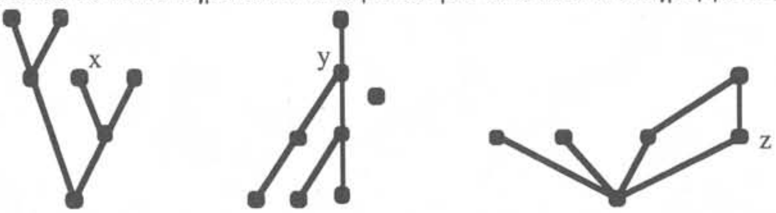
Είναι φανερό ότι ένα μη κενό, πεπερασμένο, διατεταγμένο σύνολο είναι αλυσίδα, αν και μόνο αν έχει το διάγραμμα της ακόλουθης μορφής με οσουσδήποτε, φυσικά, κόμβους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Βρείτε το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο του $\langle P(\{0,1,2\}), \subset \rangle$ και κάνετε το διάγραμμά του.

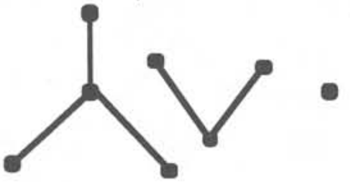
5. Αποδείξτε ότι το y είναι μέγιστο στοιχείο του $\langle P(\alpha)-\{\alpha\},\subset\rangle$, αν και μόνο αν $(\exists x \in \alpha)(y=\alpha-\{x\})$.

6. Ποιά είναι τα διατεταγμένα σύνολα με τα τρία ακόλουθα διαγράμματα;



Σε κάθε περίπτωση βρείτε τα ελάχιστα, μέγιστα, πρώτα και τελευταία στοιχεία. Βρείτε τα αμέσως προηγούμενα και τα αμέσως επόμενα στοιχεία των x, y, z.

7. Ποιό είναι το διατεταγμένο σύνολο με το ακόλουθο διάγραμμα;



Ποιά είναι τα μέγιστα, ελάχιστα, πρώτα και τελευταία στοιχεία του;

8. Κάνετε τα διαγράμματα των διατεταγμένων συνόλων

i. $\alpha=\{1,2,3,4,5\}$, $\leq^{\alpha}=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,5\rangle\}\cup i_{\alpha}$

ii. $\alpha=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\leq^{\alpha}=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 7,5\rangle,\langle 7,6\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,$ $\langle 3,5\rangle,\langle 3,6\rangle\}\cup i_{\alpha}$.

Είναι φανερό ότι τα άπειρα διατεταγμένα σύνολα δεν έχουν πλήρες διάγραμμα *Hasse*. Όταν, όμως, η διάταξη των συνόλων είναι πολύ ομαλή, αυτή μπορεί να υποδειχθεί με τη βοήθεια διακεκομμένων γραμμών. Έτσι, τα ακόλουθα τρία ημιτελή διαγράμματα απεικονίζουν, αντίστοιχα, το $\langle \mathbb{N},\leq\rangle$, το $\langle \mathbb{N},\leq_1\rangle$, όπου $m\leq_1 n \Leftrightarrow$ (m,n άρτιοι και $m\leq n$) ή (m,n περιττοί και $m\leq n$) ή (m άρτιος και n περιττός) και το $\langle \mathbb{N},\leq_2\rangle$, όπου $m\leq_2 n \Leftrightarrow$ (m,n περιττοί και $m\leq n$) ή (m,n μη μηδενικοί άρτιοι και $m\leq n$) ή $(n=0)$.