# Αξιωματική Θεωρία Συνόλων

Κορνηλίας Κάλφα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# Πρόλογος

Έχοντας βάση το βιβλίο μου του 1984 "Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων" και με την εμπειρία άλλων έξι ακαδημαϊκών χρόνων, θέτω σε κυκλοφορία το βιβλίο μου "Αξιωματική θεωρία Συνόλων".

Το νέο βιβλίο καλύπτει πλήρως την ύλη του παλιού, την παρουσιάζει με καινούριο τρόπο και επεκτείνεται σε νέα θέματα. Απευθύνεται σε φοιτητές Μαθηματικών τμημάτων της κατεύθυνσης των καθαρών μαθηματικών. Η επιλογή της ύλης εκφράζει την σημερινή μου άποψη για το πόση θεωρία Συνόλων είναι απαραίτητο να μάθουν. Ο τρόπος παρουσίασης της ύλης είναι η συνισταμένη των απόψεων έξι τάξεων θεωρίας Συνόλων του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Ευχαριστώ τις προηγούμενες τάξεις μου για τα ερεθίσματα που μου έδωσαν και ελπίζω ότι οι επόμενες θα το βρούν χρήσιμο και θα με βοηθήσουν να το βελτιώσω.

Ευχαριστώ την κ. Νίκη Κωνσταντινίδου-Χαραλαμπάκη που κατόρθωσε να δώσει τόσο ελκυστική εμφάνιση σε ένα αυστηρό μαθηματικό κείμενο. Ευχαριστώ, επίσης, την κ. Ιφιγένεια Οικονομίδου για την σημαντική βοήθεια που μου πρόσφερε στην δακτυλογράφηση του τελευταίου τμήματος του βιβλίου. Τέλος ευχαριστώ την κ. Π . Ζήτη, που ανέλαβε την φροντίδα της εκτύπωσης και το κόστος της έκδοσης αυτής.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1990 — Κ. Κάλφα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# 0

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχει τρόπος να συγκριθούν, ως προς το μέγεθός τους, δύο άπειρες συλλογές αντικειμένων; Έχει, για παράδειγμα, νόημα να ρωτήσουμε αν υπάρχουν τόσοι περιττοί όσοι και άρτιοι, αν το πλήθος των ρητών είναι μικρότερο από το πλήθος των άρρητων κι' αν το πλήθος των πραγματικών του (0,1) είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των ρητών του ίδιου διαστήματος; Για πεπερασμένες συλλογές ή για μια πεπερασμένη και μια άπειρη, τέτοιες συγκρίσεις είναι βέβαια δυνατές. Το πλήθος των περιττών του (0,100] είναι ίσο με το πλήθος των άρτιων του (100, 200]· είναι και τα δύο 50. Και οι δύο προηγούμενες συλλογές έχουν μέγεθος μικρότερο από αυτό των φυσικών του (200, 300], που είναι 100. Η τρίτη συλλογή έχει μέγεθος μικρότερο από αυτό της συλλογής των ρητών του (0,1), που είναι άπειρη. Είναι λοιπόν δυνατό να βρεθεί μέθοδος σύγκρισης άπειρων μεγεθών, έτσι ώστε να μιλάμε για πολλά, διαφορετικά μεταξύ τους άπειρα κι' όχι μόνο για το ήδη γνωστό μας $\infty$;

Σε μια σειρά δημοσιευμάτων, που το πρώτο εμφανίστηκε το 1874, ο γερμανός μαθηματικός **Georg Cantor (1845-1918)** έθεσε τις βάσεις μιάς θεωρίας, που στα πλαίσιά της τέτοιες συγκρίσεις είναι δυνατές. Η θεωρία αυτή ήταν η **Θεωρία Συνόλων**. Κατά τον Cantor "**Λέγοντας σύνολο εννοούμε κάθε συλλογή από ορισμένα και διακεκριμένα αντικείμενα της αίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούνται ως έναν όλον**". Τα αντικείμενα αυτά ο Cantor τα κάλεσε **στοιχεία του συνόλου**, και θεώρησε ότι **δύο σύνολα είναι ίσα** αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Κάλεσε **κενό σύνολο** το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, και το συμβόλισε **Ø**. Ένα σύνολο συνηθίστηκε να παριστάνεται με καταγραφή των στοιχείων του μέσα σε άγκυστρα (π.χ. **{α,β , μ}**). Αν τα στοιχεία του σύνολου είναι πολλά, έχουν όμως μια προφανή σχέση μεταξύ τους, χρησιμοποιούνται συνήθως τελείες (π.χ. **{0,2,4,6,...}** για το σύνολο των άρτιων φυσικών. η {α,β,...,ψ,ω} για το σύνολο των γραμμάτων της ελληνικής γλώσσας). Αν ένα σύνολο A αποτελείται από αυτά ακριβώς τα αντικείμενα x, που έχουν την ιδιότητα p(x), μπορεί να παρασταθεί με $A = \{x : p(x)\}$ (π.χ. {x : x γράμμα της Ελληνικής γλώσσας}).

O Cantor **έδωσε επίσης τους ακόλουθους ορισμούς: Δύο σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος** αν υπάρχει αμφιμονότιμη επί απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων τους. Το σύνολο A έχει **μικρότερο μέγεθος** από το σύνολο B, αν έχει το ίδιο μέγεθος με ένα υποσύνολο C του B, όχι όμως και με το ίδιο το B.

Οι ορισμοί αυτοί είναι εντελώς φυσικοί και συμφωνούν με την εμπειρία που έχουμε από τα πεπερασμένα σύνολα. [Έστω $A = \{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\}$ και $B = \{\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}\}$ δύο πεπερασμένα σύνολα με μεγέθη m και n, αντίστοιχα. Προφανώς οι m και n είναι ίσοι αν και μόνο αν αντιστοιχώντας στο $\alpha_0$ το $\beta_0$, στο $\alpha_1$ το $\beta_1$ κ.λ.π., εξαντλήσουμε τα στοιχεία των δυο συνόλων συγχρόνως. Αν κάποια στοιχεία του B περισσεύουν, τότε ο m είναι μικρότερος από τον n και το $C = \{\beta_0, \ldots \beta_{m-1}\}$ έχει μέγεθος m]. Προκάλεσαν όμως κατάπληξη στους μαθηματικούς εκείνης της εποχής τα θεωρήματα που απέδειξε ο Cantor χρησιμοποιώντας τους.

Μια λεπτομερής αναφορά των σχετικών αποτελεσμάτων ξεφεύγει από τα πλαίσια μιας εισαγωγής στη Θεωρία Συνόλων. Θα δούμε πολλά από αυτά σε επόμενα κεφάλαια. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο, κάποια συμπεράσματα σχετικά με τους αλγεβρικούς και υπερβατικούς αριθμούς, γιατί είναι τα πρώτα που, ερχόμενα σε καταφανή αντίθεση με τη διαίσθηση των τότε μαθηματικών δέχτηκαν την πιο έντονη κριτική:

Είναι γνωστό ότι ένας πραγματικός αριθμός λέγεται **αλγεβρικός** αν είναι ρίζα ενός μη μηδενικού πολυώνυμου με ακέραιους συντελεστές. Αλλοιώς λέγεται **υπερβατικός**. O Cantor απέδειξε ότι **το σύνολο των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών έχει το ίδιο μέγεθος με το σύνολο των φυσικών αριθμών.** Κάθε φυσικός είναι βέβαια αλγεβρικός. Όμως αλγεβρικοί είναι και όλοι οι ρητοί και οι άρρητοι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} \ldots \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \ldots$ θα περίμενε λοιπόν κανείς το σύνολο των αλγεβρικών να έχει πολύ μεγαλύτερο μέγεθος από το σύνολο των φυσικών. Να όμως που η διαίσθησή μας βγαίνει γελασμένη. O Cantor απέδειξε μετά ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών έχει μικρότερο μέγεθος από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τίποτα το παράξενο σ' αυτό. Σαν πόρισμα όμως αυτού του θεωρήματος προκύπτει ότι το σύνολο των υπερβατικών αριθμών έχει το ίδιο μέγεθος με το σύνολο των πραγματικών αριθμών και, κατά συνέπεια, πως **υπάρχουν περισσότεροι υπερβατικοί από αλγεβρικούς αριθμούς.** Κι' αυτό ήταν αναπάντεχο γιατί, ενώ οι μαθηματικοί γνώριζαν τόσους αλγεβρικούς, οι μόνοι υπερβατικοί που τους ήταν γνωστοί ως τότε ήταν ο e και οι αριθμοί της μορφής $\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots$, όπου $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,9\}$.

**'Ενα μέγεθος εκφράζεται με έναν αριθμό.** Το μέγεθος του σύνολου $\{1, 5, \alpha, 10\}$ είναι 4 και το μέγεθος του σύνολου $\{\alpha_0,\ldots\alpha_{n-1}\}$ είναι n. Τα μεγέθη των πεπερασμένων συνόλων είναι οι φυσικοί αριθμοί. Ποίοι αριθμοί όμως δίνουν τα μεγέθη των άπειρων συνόλων; 'Οχι βέβαια οι φυσικοί, όχι όμως και το $\infty$, αφού πρέπει να μιλήσουμε για άπειρο μέγεθος μεγαλύτερο από άλλο άπειρο μέγεθος. Χρειαζόμαστε λοιπόν νέους αριθμούς. 'Εναν για να εκφράσουμε το κοινό μέγεθος των συνόλων $\{x : x$ φυσικός$\}$ και $\{x : x$ πραγματικός αλγεβρικός$\}$, έναν μεγαλύτερο για να εκφράσουμε το κοινό μέγεθος των συνόλων $\{x : x$ πραγματικός αριθμός$\}$ και $\{x : x$ πραγματικός υπερβατικός αριθμός$\}$, πολλούς άλλους για να εκφράσουμε μεγέθη άλλων άπειρων συνόλων, που δεν μπορούμε όλα να τα αναφέρουμε εδώ. Οι νέοι αυτοί αριθμοί που εμφανίζονται στη Θεωρία Συνόλων, επειδή δεν εκφράζουν πεπερασμένα μεγέθη, πήραν το όνομα **υπέρπεπερασμένοι.** Αυτοί και η αριθμητική τους (δηλ. οι πράξεις μεταξύ τους, η διάταξή τους και οι ιδιότητες αυτών) θα μας απασχολήσουν σε επόμενα κεφάλαια.

Η Θεωρία Συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε αρχικά με δυσπιστία, ακόμα και με εχθρότητα, από την πλειονότητα των Μαθηματικών. Είναι χαρακτηριστική η επίθεση που της έγινε από τον Kronecker με το επιχείρημα πως οι μέθοδοί της δεν είναι κατασκευαστικές. Μονάχα μέσα στη δεκαετία του 1890 απέκτησε ένθερμους υποστηριχτές κι' άρχισε να χρησιμοποιείται στην Ανάλυση και στη Γεωμετρία.

Οι φιλόσοφοι των Μαθηματικών των αρχών του 20ου αιώνα - ο **Russell**, ο **Frege**, ο **Dedekind**, ο **Poincaré**- έδειξαν ζωηρό ενδιαφέρον για την καινούρια θεωρία. Σύντομα απέδειξαν ότι μπορεί κανείς να ορίσει τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα - σχέσεις, συναρτήσεις, αριθμούς, κ.λπ. - χρησιμοποιώντας μόνο τις έννοιες του συνόλου και του μέλους του. Μπορούσαν, κατά συνέπεια, να θεωρήσουν τα θεωρήματα των Μαθηματικών σαν προτάσεις που αφορούσαν τα σύνολα και να αποφανθούν ότι **τα Μαθηματικά είναι τελικά θεωρία Συνόλων**. Πετύχαιναν, λοιπόν, **μια αναγωγή των Μαθηματικών στην έννοια του σύνολου και του μέλους του, μια συνολοθεωρητική, δηλαδή, θεμελίωση των Μαθηματικών**. Προέκυπτε βέβαια αμέσως το πρόβλημα του κατά πόσο μια τέτοια θεμελίωση έδινε ικανοποιητική απάντηση στο κρίσιμο ερώτημα της Φιλοσοφίας το σχετικό με την φύση των Μαθηματικών. Πόσο πειστικές είναι, για παράδειγμα, οι απαντήσεις "1 είναι το σύνολο {{x} : x αντικείμενο}" ή "1 είναι το σύνολο {Ø}" στο ερώτημα "**τι είναι ο αριθμός 1;**"; Είναι η έννοια του σύνολου απλούστερη από την έννοια του αριθμού, έτσι ώστε να αποτελέσει ένα φυσικό και όχι τεχνητό θεμελιό του; Και είναι τόσο πρωταρχική που να μην χρειάζεται και αυτή μια θεμελίωση; Για όσους φιλοσόφους θεωρούσαν πως η έννοια του σύνολου χρειαζόνταν θεμελίωση, O **Frege** πρότεινε **ένα πρόγραμμα αναγωγής της Θεωρίας Συνόλων του Cantor στη Λογική**, δηλαδή στην επιστήμη που μελετά τους νόμους της παραγωγικής ανθρώπινης σκέψης. Αν το πρόγραμμα πετύχαινε, τότε θα προέκυπτε **μια θεμελίωση των Μαθηματικών στη Λογική**, που δεν αμφισβητείται από κανέναν ότι είναι τόσο πρωταρχική που δεν χρειάζεται η ίδια μια θεμελίωση. Το πρόγραμμα του Frege - **Λογικισμός** - διεκόπη μόλις έγινε γνωστό ότι **η διαισθητική Θεωρία Συνόλων του Cantor ήταν αντιφατική, δηλαδή ότι οδηγούσε σε κάποια αντιφατικά συμπεράσματα**. Έγινε αμέσως φανερό ότι, αν το πρόγραμμα αυτό ήταν πραγματοποιήσιμο, τότε και η ίδια η Λογική θα ήταν αντιφατική· πράγμα αδύνατο.

Ανεξάρτητα όμως από την διάψευση της ελπίδας των Λογικιστών ότι θα δημιουργούσαν για τα Μαθηματικά τόσο σταθερά θεμέλια, η αντιφατικότητα της τόσο πολλά υποσχόμενης Θεωρία Συνόλων του Cantor την έκανε μη αποδεκτή σαν νέο κλάδο των Μαθηματικών. Ένας κλάδος των Μαθηματικών **οφείλει** πρώτα-πρώτα να μην είναι αντιφατικός. Ευτυχώς, πολύ γρήγορα, εμφανίστηκαν νέες Θεωρίες Συνόλων, **αξιωματικές και όχι διαισθητικές**, που είναι πάρα πολύ κοντικές στην παλιά θεωρία, μας δημιουργούν όμως την πεποίθηση ότι δεν είναι αντιφατικές. Αυτό θα το σχολιάσουμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Η αξιωματική θεωρία συνόλων που παρουσιάζεται σ' αυτό το βιβλίο είναι η **Αξιωματική Θεωρία Συνόλων Zermelo-Fraenkel**. Διαμορφώθηκε την περίοδο 1908-1925, και είναι η παλιότερη και γνωστότερη στους μαθηματικούς αξιωματική θεωρία Συνόλων. Όπως και η θεωρία του Cantor ασχολείται με τα ακόλουθα:

1. **Τη συνολοθεωρητική θεμελίωση των βασικών εννοιών των κλασσικών Μαθηματικών.**
2. **Τη σύγκριση των μεγεθών δύο οποιωνδήποτε συνόλων.**
3. **Τους υπερπεπερασμένους αριθμούς και την αριθμητική τους.**

Οι ασκήσεις, που βρίσκονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου, παρουσιάζουν διαφορετική μεταξύ τους δυσκολία. Η σειρά που δίνονται δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους, αλλά του τμήματος του κεφαλαίου στο οποίο αντιστοιχούν. Έτσι, ασκήσεις που απαιτούν γνώσεις των πρώτων σελίδων κάποιου κεφάλαιου είναι συνήθως οι 1,2,.... Οι ασκήσεις που σημειώνονται σε αστερίσκο (*) είναι, κατά τη γνώμη της συγγραφέα, οι πιο δύσκολες. Η λύση ορισμένων από αυτές, και κάποιων άλλων που είναι αντιπροσωπευτικές μιας ομάδας ασκήσεων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν οδηγοί, δίνεται στο τέλος του βιβλίου. Γύρω από τον αριθμό των λυμένων ασκήσεων έχει τοποθετηθεί ένας κύκλος.

Σε όλο το βιβλίο, το σύμβολο "▭" χρησιμοποιείται για να δηλώσει το τέλος κάποιας απόδειξης.

* * *

1

# Η ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ZERMELO-FRAENKEL (Z. F.)

Η διαισθητική αντίληψη του Cantor, ότι κάθε συλλογή ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων είναι σύνολο, οδηγεί αναπόφευκτα στην ακόλουθη **συλλεκτική αρχή:**

**'Εστω p(x) μια ιδιότητα που μπορεί να έχει ή όχι το τυχόν αντικείμενο x. Η ιδιότητα p(x) συλλέγει όλα τα αντικείμενα x, που έχουν την ιδιότητα και δημιουργεί ένα μοναδικό σύνολο.**

Δηλαδή, κάθε ιδιότητα p(x) **ορίζει** ένα σύνολο $\{x : p(x)\}$. 'Ετσι π.χ. η ιδιότητα **p(x) : το x είναι φωνήεν της Ελληνικής γλώσσας** ορίζει το σύνολο $\{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$ και η ιδιότητα **p(x): το x είναι ομάδα** ορίζει κατά τον Cantor το σύνολο **{x : x ομάδα}**.

Το 1902 ο **Bertrand Russell (1872-1970)** γνωστοποίησε το ακόλουθο **παράδοξο:** Σύμφωνα με τη συλλεκτική αρχή, η ιδιότητα

**p(x) : το x είναι σύνολο και δεν είναι στοιχείο του x**

ορίζει το σύνολο $A = \{x : p(x)\}$. Επομένως το τυχόν **σύνολο** x είναι στοιχείο του A αν και μόνο αν δεν είναι στοιχείο του x. Αν θεωρήσουμε σαν σύνολο x το ίδιο το A, προκύπτει ότι **το A είναι στοιχείο του A αν και μόνο αν το A δεν είναι στοιχείο του A.** Προκύπτει, δηλαδή, το αντιφατικό συμπέρασμα ότι **κάτι ισχύει αν και μόνο αν δεν ισχύει**

**Το παράδοξο του Russell** δεν ήταν το πρώτο παράδοξο που παρουσιάστηκε στην Διαισθητική θεωρία Συνόλων του Cantor. Νωρίτερα, ο ίδιος ο Cantor αλλά και ο **Burali-Forti** είχαν δείξει ότι η χρήση της συλλεκτικής αρχής για τις ιδιότητες

$$p_1(x): \text{το } x \text{ είναι πληθάριθμος}$$

και

$$p_2(x): \text{το } x \text{ είναι διατακτικός αριθμός}$$

αντίστοιχα, οδηγούσαν σε αντιφατικά συμπεράσματα. Το παράδοξο του **Cantor** και **το παράδοξο του Burali-Forti** δεν είχαν όμως προκαλέσει ιδιαίτερη ανησυχία στην Μαθηματική κοινότητα, γιατί οι αριθμοί με τους οποίους είχαν σχέση ήταν καινούριοι υπερπεπερασμένοι αριθμοί, που η θεωρία Συνόλων κατασκεύασε για να αντιμετωπίσει προβλήματα που έθεσε η ίδια. Οι αριθμοί αυτοί δεν χρησιμοποιούνταν για την θεμελίωση των κλασικών Μαθηματικών στη Θεωρία Συνόλων του Cantor, για την οποία κάναμε λόγο στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επί πλέον, υπήρχε η πεποίθηση πως κάποιες μικροτροποποιήσεις στους ορισμούς των υπερπεπερασμένων αριθμών, δεν θα επέτρεπαν την παραγωγή αυτών των αντιφάσεων.

**Η ιδιαίτερη σημασία του παράδοξου του Russell βρίσκονταν στο γεγονός ότι προέκυπτε μόνο από την χρησιμοποίηση της συλλεκτικής αρχής, δηλαδή κατ' ευθείαν από τον ορισμό του Cantor για το σύνολο.'Εδειχνε, επομένως, ότι η Θεωρία Συνόλων του Cantor παρουσίαζε ένα σοβαρό πρόβλημα αντιφατικότητας που δεν μπορούσε να αντιμετωπιστεί με μικροτροποποιήσεις.** Επομένως δεν μπορούσε να γίνει αποδεκτή σαν νέος κλάδος των Μαθηματικών και επί πλέον, η θεμελίωση των Μαθηματικών σ' αυτήν έχανε κάθε ενδιαφέρον.

Το πρόβλημα της αντιφατικότητας της διαισθητικής Θεωρίας Συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε γρήγορα με την **Αξιωματική Μέθοδο.** Οι διάφορες **Αξιωματικές Θεωρίες Συνόλων** που εμφανίστηκαν από το 1908 και μετά (θεωρία **ZF**, θεωρία **VNB**, θεωρία **GB**) δεν βοήθησαν, φυσικά, να αρθούν οι αντιφάσεις της παλιότερης, διαισθητικής θεωρίας. **Η κάθε μια τους αξιωματικοποίησε τμήμα της Θεωρίας Συνόλων του Cantor,** που **πιστεύουμε ότι δεν είναι αντιφατικό.** Το **τμήμα όμως αυτό είναι αρκετά μεγάλο** για **να είναι δυνατόν, στα πλαίσιά του, να μελετηθούν τα μεγέθη των βασικών συνόλων των Μαθηματικών (δηλ. των συνόλων των αριθμών και των συναρτήσεων). Επίσης είναι αρκετά μεγάλο,** για να μπορούν

**τα κλασικά Μαθηματικά να θεμελιωθούν πάνω σ' αυτό.**

**Πιο συγκεκριμένα**, όλες οι Αξιωματικές Θεωρίες επιλέγουν για **αξιώματα** κάποιες προτάσεις που είναι **προφανείς αλήθειες** για τα σύνολα της διαισθησής μας. Το **σύμπαν** κάθε μιας από τις θεωρίες αυτές, δηλαδή **τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται**, αποτελείται αποκλειστικά από εκείνα τα σύνολα που τα αξιώματα βεβαιώνουν την υπαρξή τους. Επειδή είναι σημαντικό να κατανοηθεί αυτό, θα κατασκευάσουμε ένα **παράδειγμα:**

Ας θεωρήσουμε μια αξιωματική θεωρία, η οποία έχει για αξιώματα μόνο τις ακόλουθες τρεις προφανείς αλήθειες:

$A_0$. Τα σύνολα $X$ και $Y$ είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

$A_1$. Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία.

$A_2$. Αν $X$, $Y$, $Z$ είναι σύνολα, τότε υπάρχει σύνολο που έχει στοιχεία μόνο τα $X$, $Y$, $Z$.

Το αξίωμα $A_1$ μας βεβαιώνει ότι υπάρχει κάποιο σύνολο χωρίς στοιχεία και το αξίωμα $A_0$ ότι δεν υπάρχει άλλο τέτοιο σύνολο. Το συμβολίζουμε $\emptyset$ και το καλούμε **κενό σύνολο.**

Από το αξίωμα $A_2$, για $X = Y = Z = \emptyset$, προκύπτει ότι υπάρχει σύνολο με μοναδικό στοιχείο το $\emptyset$. Από το αξίωμα $A_0$ προκύπτει ότι αυτό είναι μοναδικό. Άρα το $\{\emptyset\}$ είναι σύνολο αυτού του σύμπαντος.

Από το αξίωμα $A_2$, για $X = Y = \emptyset$ και $Z = \{\emptyset\}$, προκύπτει ότι υπάρχει σύνολο με μόνα στοιχεία τα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$. Από το αξίωμα $A_0$ προκύπτει ότι αυτό είναι μοναδικό. Άρα στο συγκεκριμένο σύμπαν βρίσκεται και το $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

Από τα αξιώματα $A_2$, $A_0$ και πάλι, για $X = \emptyset$, $Y = \{\emptyset\}$, $Z=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, προκύπτει ότι υπάρχει το σύνολο $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Ήδη βρήκαμε τέσσερα σύνολα του σύμπαντος της αξιωματικής μας θεωρίας και είναι εύκολο να βρίσκουμε συνέχεια καινούρια με την επανάληψη της διαδικασίας (Άσκ. 1.1).

Μετά την κατανόηση της έννοιας **"Σύμπαν μιας Αξιωματικής Θεωρίας"** περνάμε σε διευκρινίσεις που αφορούν την έννοια **"Θεώρημα μιας Αξιωματικής Θεωρίας"**. Τα θεωρήματα της θεωρίας είναι προτάσεις που προκύπτουν σαν **λογικές συνέπειες** των αξιωμάτων της, άρα που αφορούν αποκλειστικά σύνολα, των οποίων η ύπαρξη προκύπτει από τα αξιώματα. **Τα θεωρήματα, λοιπόν, μιας Αξιωματικής Θεωρίας αναφέρονται στα σύνολα του σύμπαντος της και μόνο σ' αυτά.** Έτσι, θεωρήματα της μορφής

**"υπάρχει σύνολο ώστε ..."**

**"υπάρχει X ώστε ..."**

**"για κάθε σύνολο ισχύει ..."**

**"για κάθε X ισχύει ..."**

πρέπει να γίνονται αντιληπτά σαν

**"υπάρχει σύνολο του συγκεκριμένου σύμπαντος ώστε ..."**

**"για κάθε σύνολο του συγκεκριμένου σύμπαντος ισχύει ..."**

Η αξιωματική θεωρία του παραδείγματός μας έχει, επομένως, το θεώρημα **"Υπάρχει σύνολο διάφορο του Ø"**, γιατί υπάρχει στο σύμπαν της το $\{\emptyset\}$ και το $A_0$ μας βεβαιώνει ότι $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Έχει, επίσης, το θεώρημα **"Κάθε X είναι στοιχείο κάποιου συνόλου"**. Γιατί "κάθε X" σημαίνει κάθε σύνολο X του συγκεκριμένου σύμπαντος. Αφού λοιπόν το X είναι σύνολο του σύμπαντος αυτού, από το αξίωμα $A_2$ προκύπτει ότι και το $\{X\}$ βρίσκεται στο σύμπαν. Δεν είναι δυνατόν όμως να έχει θεώρημα την πρόταση "Για κάθε X, Y, Z, V, υπάρχει σύνολο που τά έχει στοιχεία του", ούτε την πρόταση "Υπάρχει το σύνολο των Φυσικών Αριθμών". Όσες φορές και να επαναλάβουμε την διαδικασία παραγωγής συνόλων από τα $A_0$, $A_1$, $A_2$, τα σύνολα που προκύπτουν είναι το πολύ τριμελή. Και τι Μαθηματικά να κάνει κανείς μέσα σ' ένα τόσο περιορισμένο σύμπαν; Δεν του επιτρέπεται να διατυπώσει και να αποδείξει τίποτα το σημαντικό για τα Μαθηματικά.