ΣΤΑΥΡΟΥ Γ. ΙΟΥΛΙΔΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτό το βιβλίο γράφτηκε με κύριο σκοπό να δώσει με σαφήνεια το λογισμό των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, τη θεωρία ολοκλήρωσης αυτών και τις βασικές εφαρμογές τους.

Επίσης δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στη σύνδεση της σχετικής θεωρίας με την Γραμμική Άλγεβρα, τη Γεωμετρία και μια στοιχειώδη θεωρία Μέτρου. Στο πρώτο Κεφάλαιο γίνεται η ανάπτυξη βασικών στοιχείων της Τοπολογίας και της Γεωμετρίας, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της παραπέρα θεωρίας. Ορίζεται η συνάρτηση, όπως αυτή εφαρμόζεται σε προβλήματα σύγχρονης τεχνολογίας. Αναπτύσσονται οι έννοιες, της βάσης, της μετρικής, της συνεκτικότητας και της συμπαγότητας των τοπολογικών χώρων. Η σύγκλιση και η συνέχεια αποτελούν το απαραίτητο συμπλήρωμα των τοπολογικών εννοιών. Επίσης αναφέρονται με σύντομο τρόπο ο προσανατολισμός γραμμών και επιφανειών και γίνεται μία στοιχειώδης ανάπτυξη της θεωρίας των βασικών επιφανειών. Η εφαρμογή της ευθύγραμμης ομοτοπίας έχει ως αποτέλεσμα την έννοια της κανονικότητας των περιοχών.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει όλους τους κανόνες παραγώγισης των διαφόρων μορφών των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Ορίζεται η μερική παράγωγος ως μερική περίπτωση της εννοίας της παραγώγου. Η παράγωγος αποτελεί γενίκευση της εννοίας της παραγώγου των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Αναπτύσσονται οι κανόνες παραγώγισης βαθμωτών, διανυσματικών, συνθέτων και πλεγμένων συναρτήσεων με αφετηρία την έννοια της παραγώγου. Ορίζεται το διαφορικό και δίνονται οι βασικές εφαρμογές του. Επίσης αναφέρονται οι μετασχηματισμοί ως συνέπεια της αντιστροφής της παραγώγου και του μέτρου κατά Riemann. Η ανάπτυξη γίνεται με επεξηγηματικό τρόπο έτσι, ώστε η σημασία της αφετηρίας των αποτελεσμάτων να είναι σαφής.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται οι βασικές εφαρμογές της μερικής παραγώγου. Το κάθετο διάνυσμα και το εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφανείας αποτελούν απαραίτητα στοιχεία για τον προσανατολισμό και την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων. Γίνεται μία αρκετά εκτεταμένη ανάπτυξη της θεωρίας των τοπικών και απολύτων ακροτάτων, η οποία εφαρμόζεται σε πολλά προβλήματα, όπως π.χ. στον έλεγχο των ταλαντεύσεων της προσεγγιστικής εξί-

σωσης μιας επιφανείας. Επίσης αναφέρονται βασικά στοιχεία από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, τα οποία θεωρούνται απαραίτητα στη θεωρία πεδίου και για την παράσταση διαφόρων επιφανειών.

Τέλος γίνεται η βασική ανάπτυξη της θεωρίας πεδίου με αφετηρία την έννοια της διαφορισιμότητος.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει πολλαπλά, γραμμικά, επιφανειακά και μη γνήσια ολοκληρώματα. Δίνονται αρκετές εφαρμογές, μερικές από τις οποίες βρίσκονται μεταξύ των παραδειγμάτων και των ασκήσεων στο τέλος του κεφαλαίου. Η θεωρία ολοκλήρωσης έχει αφετηρία την έννοια του μέτρου κατά Riemann σε συνδιασμό με τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα. Αποτελέσματα της θεωρίας πεδίου αποκτούν ουσιαστικότερη μορφή με εφαρμογές γραμμικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει ένα παράρτημα, το οποίο περιέχει κυρίως τους τρόπους επίλυσης των βασικών διαφορικών εξισώσεων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής και των κανονικών διαφορικών συστημάτων Έτσι ο αναγνώστης μπορεί να κατανοήσει πλήρως το περιεχόμενο του βιβλίου χωρίς να έχει ειδικές γνώσεις διαφορικών εξισώσεων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Παράρτημα **Διαφορικές Εξισώσεις**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Συναρτήσεις

Ο ορισμός της συνάρτησης και οι σχετικές μ' αυτήν έννοιες δίνονται με αρκετά διεξοδικό τρόπο για **την** πλήρη κατανόησή της.

Θεωρούμε δύο σύνολα A και B.

Ονομάζουμε **διμελή σχέση** ή απλά **σχέση** από το A στο B κάθε υποσύνολο φ του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Άρα είναι

$$\varphi = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A_1, \beta \in B_1, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B\}.$$

Αν $\alpha \in A$, ορίζουμε το σύνολο

$$\varphi(\alpha) = \{\beta \in B \mid (\alpha, \beta) \in \varphi\}$$

Ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται στα υποσύνολα A_1 του A και είναι

$$\varphi(A_1) = \cup\ (\varphi(\alpha) \mid \alpha \in A_1)$$

Η **αντίστροφη** της φ ορίζεται να είναι η σχέση

$$\varphi^{-1} = \{(\beta, \alpha) \mid (\alpha, \beta) \in \varphi\} \subset B \times A\ .$$

Είναι προφανή τα παρακάτω

$$\varphi^{-1}(\beta) = \{\alpha \in A \mid (\alpha, \beta) \in \varphi\} \quad \text{για } \beta \in B$$

και

$$\varphi^{-1}(B_1) = \{\alpha \in A \mid (\exists\, \beta \in B_1)\ (\alpha, \beta) \in \varphi\} \quad \text{για } B_1 \subseteq B.$$

Ονομάζουμε **σύνολο ορισμού** της φ, συμβολικά $D(\varphi)$, το υποσύνολο $D(\varphi) = \varphi^{-1}(B)$ του A, **σύνολο τιμών** της φ, συμβολικά $R(\varphi)$, το υποσύνολο $R(\varphi) = \varphi(A)$ του B και **πεδίο τιμών** της φ το σύνολο B.

Αν $\varphi \subseteq A \times B$ και $g \subseteq B \times \Gamma$ είναι δύο σχέσεις, τότε ορίζεται η **σύνθεσή** τους, συμβολικά $g \circ \varphi$ ή $g\varphi$, να είναι το σύνολο

$$g \circ \varphi = \{(\alpha, \gamma) \mid (\exists \beta \in B)\ (\alpha, \beta) \in \varphi \text{ και } (\beta, \gamma) \in g\} \subseteq A \times \Gamma .$$

Είναι $(g \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ g^{-1}$.

Ονομάζουμε **(διμελή) σχέση επί** ενός συνόλου A, κάθε υποσύνολο ρ του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$.

Οι βασικές σχέσεις επί ενός συνόλου A είναι:

i. η **κενή σχέση,** δηλαδή το κενό υποσύνολο $\varnothing$ του $A \times A$,

ii. η **διαγώνια σχέση** $1_A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in A\}$,

iii. η **ολική σχέση** $\tau = A \times A$.

Για κάθε σχέση ρ επί του A ορίζουμε επαγωγικά τις δυνάμεις ρ^n ως προς τη σύνθεση με :

i. $\rho^0 = 1_A$ και

ii. $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$ για κάθε $n \geq 0$.

Μια σχέση $\rho \subseteq A \times A$ λέγεται

i. **αυτοπαθής,** αν $1_A \subseteq \rho$,

ii. **συμμετρική,** αν $\rho^{-1} \subseteq \rho$,

iii. **αντισυμμετρική,** αν $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$,

iv. **μεταβατική,** αν $\rho^2 \subseteq \rho$,

ή ισοδύναμα

i. αυτοπαθής, αν $(\alpha, \alpha) \in \rho$ για κάθε $\alpha \in A$,

ii. συμμετρική, αν $(\alpha, \beta) \in \rho \Rightarrow (\beta, \alpha) \in \rho$,

iii. αντισυμμετρική, αν $(\alpha, \beta) \in \rho$ και $(\beta, \alpha) \in \rho \Rightarrow \alpha = \beta$,

iv. μεταβατική, αν $(\alpha, \beta) \in \rho$ και $(\beta, \gamma) \in \rho \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in \rho$.

Αν ρ, σ και τ είναι σχέσεις επί του A, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

i. $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \tau \subseteq \sigma \circ \tau$ και $\tau \circ \rho \subseteq \tau \circ \sigma$,

ii. $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$,

iii. $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow D(\rho) \subseteq D(\sigma)$ και $R(\rho) \subseteq R(\sigma)$,

iv. $(\rho^{-1})^{-1)} = \rho$ και $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$,

v. $D(\rho^{-1}) = R(\rho)$, $R(\rho^{-1}) = D(\rho)$.

Ένας **διαμερισμός** ενός συνόλου A είναι μία συλλογή $(A_i \mid i \in I)$ ξένων ανά δύο $(A_i \cap A_j = \varnothing)$ υποσυνόλων του A, **η ένωση** των οποίων είναι A, δηλαδή $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Μία σχέση $\rho \subseteq A \times A$ λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** επί του Α, αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική. Τότε η συλλογή $(\rho(\alpha) \mid \alpha \in A)$ ορίζει ένα διαμερισμό του Α. Αντίστροφα, κάθε διαμερισμός $(A_i \mid i \in I)$ του Α ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας ρ επί του Α, η οποία ορίζεται όπως παρακάτω

$$(\alpha, \beta) \in \rho \Leftrightarrow \alpha, \beta \in A_i \text{ για κάποιο } i \in I.$$

Μια σχέση $\rho \subseteq A \times A$ λέγεται **(μερική) διάταξη** επί του Α, όταν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Μια τέτοια σχέση συμβολίζεται παραδοσιακά με $\leq$. Μια μερική διάταξη με την επιπλέον ιδιότητα

$$(\forall \alpha, \beta \in A) \ \alpha \leq \beta \ \text{ ή } \ \beta \leq \alpha$$

λέγεται **ολική διάταξη** και το σύνολο Α ολικά διατεταγμένο.

Γράφουμε $\alpha < \beta$, όταν είναι $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \neq \beta$.

Αν $\leq$ είναι μια διάταξη στο Α, τότε ορίζουμε στο Α τα παρακάτω διαστήματα

i. **ανοικτό διάστημα,** $(\alpha, \beta) = \{x \in A \mid \alpha < x < \beta\}$,

ii. **κλειστό διάστημα,** $[\alpha, \beta] = \{x \in A \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$,

iii. **ημιανοικτά διαστήματα,** $(\alpha, \beta] = \{x \in A \mid \alpha < x \leq \beta)\}$ και $[\alpha, \beta) = \{x \in A \mid \alpha \leq x < \beta\}$

Θεωρούμε μια διάταξη $\leq \subseteq A \times A$ και ένα υποσύνολο Β του Α.

Λέμε ότι το στοιχείο $\alpha \in A$ είναι **ελάχιστο** ή **μικρότερο** στοιχείο του Β, όταν $\alpha \in B$ και $\alpha \leq x$ για κάθε $x \in B$. Επίσης λέμε ότι το $\theta \in A$ είναι το **μέγιστο** ή το **μεγαλύτερο** στοιχείο του Β, όταν $\beta \in B$ και $x \leq \beta$ για κάθε $x \in B$.

Ένα σύνολο έχει το πολύ ένα ελάχιστο και το πολύ ένα μέγιστο στοιχείο.

Το υποσύνολο Β του Α λέγεται **φραγμένο** από **πάνω**, αν υπάρχει στοιχείο $\beta \in A$ τέτοιο, ώστε $x \leq \beta$ για κάθε $x \in B$. Τότε το β λέγεται ένα **άνω φράγμα** του Β. Αν το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων του Β έχει ελάχιστο στοιχείο, αυτό λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα,** του Β, συμβολικά εαφ(Β), και μπορεί να ανήκει ή όχι στο Β. Αν ανήκει στο Β είναι το μέγιστο στοιχείο του.

Λέμε ότι το Β είναι **φραγμένο** από **κάτω,** αν υπάρχει ένα στοιχείο $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $\alpha \leq x$ για κάθε $x \in B$. Τότε το α λέγεται ένα **κάτω φράγμα** του Β. Αν το σύνολο όλων των κάτω φραγμάτων του Β έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** του Β, συμβολικά μκφ(Β) και μπορεί να ανήκει ή όχι στο Β. Αν ανήκει στο Β είναι το ελάχιστο στοιχείο του.

Το σύνολο Β λέγεται φραγμένο αν είναι πάνω και κάτω φραγμένο.

Αν τα σύνολα A_1, A_2,..., A_n είναι διατεταγμένα, τότε ορίζουμε μια διάταξη στο καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ως εξής:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Παραδείγματα

1. Στο επίπεδο xoy θεωρούμε τη σχέση

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \rho \text{ ανν}^{1)} \; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Τότε η ρ είναι μια σχέση ισοδυναμίας και η συλλογή $(P((x, y)) \mid (x, y) \in R^2)$ των κλάσεων ισοδυναμίας αποτελείται από όλους τους κύκλους με κέντρο την αρχή.

2. Στο επίπεδο xoy θεωρούμε όλες τις ευθείες τις παράλληλες προς τη γραμμή $y = -x$. Τότε αυτές ορίζουν ένα διαμερισμό του xoy, αφού κάθε σημείο του κείται πάνω σε μια τέτοια ευθεία και κάθε δύο διάφορες ευθείές είναι ξένες. Η σχέση ισοδυναμίας ρ που ορίζεται από το διαμερισμό είναι

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \rho \qquad \text{ανν } \; x_1 + y_1 = x_2 + y_2 .$$

3. Στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη κάθε φραγμένο από πάνω υποσύνολο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Το ίδιο ισχύει και για τα σύνολα πραγματικών αριθμών

$$(-1,1)=\{x \in R \mid -1<x<1\} \; ; \; [0, 1]=\{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \; ; \; [0, 1)=\{x \mid 0 \leq x<1\}$$

▲

Το υποσύνολο $A = \left\{-\frac{1}{2n} \mid n \in N\right\}$ του $(-1, 1)$, όπου N είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων Z_+ ή σύνολο φυσικών αριθμών, δεν έχει μέγιστο στοιχείο, αλλά έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $(-1, 1)$, τον αριθμό 0.

Θεωρούμε δύο σύνολα Α και Β όχι απαραίτητα διαφορετικά.

Ονομάζουμε **συνάρτηση** ή **απεικόνιση** από το Α στο Β κάθε σχέση $\varphi \subseteq A \times B$ τέτοια, ώστε για κάθε $\alpha \in A$ να είναι

$$(\alpha, \beta) \in \varphi \quad \text{και} \quad (\alpha, \beta') \in \varphi \;\Rightarrow\; \beta = \beta' .$$

Συμβολικά γράφουμε $\varphi : A \to B$. Αν $(\alpha, \beta) \in \varphi$, τότε το β λέγεται **εικόνα** ή **τιμή** του α και το α μια **αντίστροφη εικόνα του** β. Αυτά τα

---

1. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο **ανν** αντί των όρων «αν και μόνο αν» ή «τότε και μόνο τότε».

εκφράζουμε συμβολικά γράφοντας $\varphi(\alpha) = \beta$ ή $\varphi : \alpha \mapsto \beta$. Η αντίστροφη σχέση $\varphi^{-1} \subseteq B \times A$ δεν είναι γενικά μια συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι αν φ είναι μια συνάρτηση, τότε $D(\varphi) = A$ και $R(\varphi) \subseteq B$. Αν συμβολίσουμε με $|\varphi(\alpha)|$ το πλήθος των στοιχείων του $\varphi(\alpha)$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τον παραπάνω ορισμό ισοδύναμα ως εξής:

Συνάρτηση από το A στο B είναι μια σχέση $\varphi \subseteq A \times B$ τέτοια, ώστε $|\varphi(\alpha)| = 1$ για κάθε $\alpha \in A$.

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B συμβολίζεται με B^A.

Ονομάζουμε **μερική συνάρτηση** ή **μερική απεικόνιση** από το A στο B, μια σχέση $g \subseteq A \times B$ τέτοια, ώστε $|g(\alpha)| \leq 1$ για κάθε $\alpha \in A$. Γράφουμε συμβολικά $g : A \to B$.

Από τον ορισμό των συνόλων $D(g)$ και $g(\alpha)$ προκύπτει αμέσως ότι είναι

$$g(\alpha) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in D(g).$$

Αν $g(\alpha) = \varnothing$, τότε λέμε ότι η g δεν ορίζεται στο $\alpha \in A$.

Παρατηρούμε ότι αν η g είναι μερική συνάρτηση, τότε το σύνολο ορισμού $D(g)$ μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο του A, δηλαδή $D(g) \subset A$.

Οι συμβολισμοί και η ορολογία για τις μερικές συναρτήσεις είναι ακριβώς όμοια με εκείνες των συναρτήσεων και για τον λόγο αυτό, σε πολλά βιβλία δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των όρων «συνάρτηση» και «μερική συνάρτηση», όταν φυσικά είναι γνωστό το σύνολο ορισμού της σχετικής σχέσης.

Κάθε συνάρτηση είναι προφανώς μια μερική συνάρτηση.

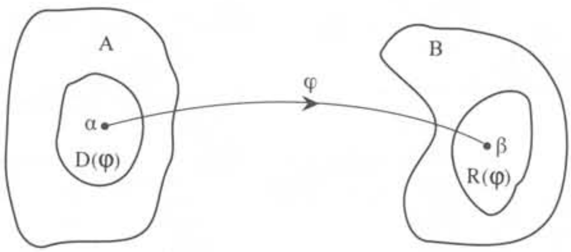
Κάποιος φαντάζεται μια μερική συνάρτηση $\varphi: A \to B$ με τους παρακάτω γενικά τρόπους:

i. ως ένα **κανόνα** ο οποίος σε κάθε στοιχείο $\alpha \in D(\varphi)$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $\varphi(\alpha) \in R(\varphi)$. Ο κανόνας φ καθορίζεται είτε με ένα πίνακα, όπου αναγράφονται σε στήλες τα σύνολα $D(\varphi)$ και $R(\varphi)$ είτε με μια αναλυτική έκφραση της εικόνας $\varphi(x)$ για κάθε $x \in D(\varphi)$.

ii. ως ένα **μετασχηματισμό** από το $D(\varphi)$ στο $R(\varphi)$. Όταν $(\alpha, \beta) \in \varphi$, θεωρούμε ότι η φ παίρνει το α από το υποσύνολο $D(\varphi)$ του A και το μετασχηματίζει σ' ένα στοιχείο $\varphi(\alpha)$ του υποσυνόλου $R(\varphi)$ του B. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε μια γεωμετρική παράσταση της φ, όπως στο Σχ. 1.

iii. ως μια **μηχανή**, που αποδέχεται στοιχεία του $D(\varphi)$ ως εισαγωγές και παράγει στοιχεία του $R(\varphi)$ ως παραγωγές· αν θέσουμε δηλαδή ένα

$\alpha \in D(\varphi)$ στη μηχανή φ, προκύπτει η παραγωγή $\varphi(\alpha) \in R(\varphi)$. Αν $\alpha \notin D(\varphi)$, τότε $\varphi(\alpha) = \emptyset$ και λέμε ότι η μηχανή φ δεν αποδέχεται το α, διότι ενεργεί μόνο επί των στοιχείων του $D(\varphi)$. Αυτός ο τρόπος



Σχ. 1

καθιστά σαφή τη διαφορά μεταξύ της φ και της $\varphi(x)$. Πράγματι φ είναι η μηχανή, ενώ $\varphi(x)$ είναι η παραγωγή της, όταν θέσουμε το x στη φ. Επειδή συνήθως κάνουμε χρήση του συμβολισμού $\varphi(x)$ για τη φ, πρέπει να έχουμε στη σκέψη μας τη παραπάνω διαφορά.

Η σύνθεση των μερικών συναρτήσεων $\varphi : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ είναι η μερική συνάρτηση

$$g \circ \varphi : A \to \Gamma$$

όπου

$$g \circ \varphi = \{(\alpha, \gamma) \in A \times \Gamma \mid (\exists\ \beta \in B)\ (\alpha, \beta) \in \varphi \text{ και } (\beta, \gamma) \in g\}.$$

Είναι

$$D\,(g \circ \varphi) = \{\alpha \in D\,(\varphi) \mid \varphi(\alpha) \in D\,(g)\}$$

και

$$R\,(g \circ \varphi) = \{g\,(\varphi\,(\alpha)) \mid \alpha \in D\,(g \circ \varphi)\}.$$

Θεωρούμε τη μερική συνάρτηση $\varphi : A \to B$ και τα υποσύνολα A_1, A_2 του A και B_1, B_2 του B.

Ονομάζουμε **εικόνα** του A_1 ως προς την φ, συμβολικού $\varphi(A_1)$, το σύνολο

$$\varphi(A_1) = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in A_1 \cap D(\varphi)\} \subseteq R(\varphi)$$

και **αντίστροφη εικόνα** του B_1 ως προς την φ, συμβολικά $\varphi^{-1}(B_1)$ το σύνολο

$$\varphi^{-1}(B_1) = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \in B_1\} \subseteq D\,(\varphi).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α. $A_1 \subseteq A_2 \;\Rightarrow\; \varphi(A_1) \subseteq \varphi(A_2)$.

β. $\varphi(A_1 \cap A_2) \subseteq \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$

γ. $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$

δ. $\varphi(A_1 - A_2) \subseteq \varphi(A_1)$

ε. $B_1 \subseteq B_2 \;\Rightarrow \varphi^{-1}(B_1) \subset \varphi^{-1}(B_2)$

στ. $\varphi^{-1}(B_1 \cap B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cap \varphi^{-1}(B_2)$

ζ. $\varphi^{-1}(B_1 \cup B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2)$

η. $\varphi^{-1}(B_1 - B_2) = \varphi^{-1}(B_1) - \varphi^{-1}(B_2)$.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $\varphi : A \to B$. Ονομάζουμε **περιορισμό** της φ σ' ένα υποσύνολο Γ του A, συμβολικά $\varphi \mid \Gamma$, τη συνάρτηση

$$g : \Gamma \to B\ ,\quad \text{όπου } g \equiv \varphi \mid \Gamma = \varphi \cap (\Gamma \times B).$$

Λέμε επίσης ότι η φ είναι μια **επέκταση της** g στο A.

Πυρήνας μιας συνάρτησης φ: $A \to B$, συμβολικά $\varphi\varphi^{-1}$ ή $\operatorname{Ker}\varphi$, είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του A που ορίζεται όπως παρακάτω

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \ker\varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$$

Η συνάρτηση φ: $A \to B$ λέγεται

i. **ενριπτική** ή **ένα προς ένα**, αν $\ker\varphi = 1_A$.

ii. **επιρριπτική** ή **επί**, αν $R(\varphi) = B$.

iii. **αμφιμονότιμη**, αν είναι ενριπτική και επιρριπτική.

Ισοδύναμα, η φ είναι ενριπτική αν

$$(\alpha, \beta) \in \varphi \quad \text{και} \quad (\alpha', \beta) \in \varphi \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha'$$

ή

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha'$$

ή

$$\alpha \neq \alpha' \;\Rightarrow\; \varphi(\alpha) \neq \varphi(\alpha')$$

Αν η φ είναι ενριπτική, η αντίστροφη σχέση φ^{-1} είναι επίσης ενριπτική μερική συνάρτηση με $D(\varphi^{-1}) = R(\varphi)$ και $R(\varphi^{-1}) = D(\varphi)$. Τότε η φ^{-1} λέγεται **αντίστροφη** συνάρτηση της φ.

Ισοδύναμα, η συνάρτηση φ είναι επί, αν για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει ένα $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\alpha) = \beta$.

Θεωρούμε το σύνολο $N_0 = N \cup \{0\}$.

Για κάθε $n \in N_0$ ορίζουμε ένα **διατακτικό αριθμό** συμβολικά n, ο οποίος είναι το σύνολο $n = \{x \in N_0 \mid x < n\}$. Άρα έχουμε $0=\varnothing$, $1=\{0\}$, $2 = \{0, 1\}, \ldots, n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Εδώ πρέπει να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ των συνόλων $\varnothing$ και $\{\varnothing\}$. Το πρώτο είναι το κενό σύνολο, ενώ το δεύτερο δεν είναι κενό, αλλά περιέχει ένα στοιχείο.

Κάποιος αντιλαμβάνεται ένα καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ως το σύνολο των n-άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ με $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_n \in A_n$. Αν θεωρήσουμε το διατακτικό αριθμό n, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \ldots \times A_n$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των συναρτήσεων

$$\varphi\colon n \to A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

με $\varphi(k) \in A_{k+1}$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi = \big(\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)\big).$$

Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times A \ldots \times A$ (n φορές) είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\varphi : n \to A$ και συμβολίζεται με A^n. Παρατηρούμε ότι $A^0 = \{\varnothing\}$, διότι $\varnothing$ είναι η μόνη απεικόνιση από το κενό σύνολο $\varnothing$ στο A. Αλλά η συνάρτηση $\varphi\colon A^0 \to A$ δεν είναι κενή και ορίζεται πλήρως από τη μοναδική εικόνα της $\varphi(\varnothing) = \alpha \in A$. Αν $\varphi\colon A^n \to A$ είναι μια συνάρτηση, τότε η φ αντιστοιχεί σε κάθε n-άδα
$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ένα μοναδικό στοιχείο του A, το οποίο γράφεται $\varphi(x)$ ή $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Ας είναι $\varphi : A^n \to A$ μια συνάρτηση.

Ένα υποσύνολο B του A λέγεται **κλειστό** ως προς την φ, αν

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B \quad \text{για κάθε } \alpha_1 \ldots, \alpha_n \in B.$$

Αν B είναι κλειστο, τότε η φ ορίζει τη συνάρτηση

$$\varphi \mid B : B^n \to B, \quad \text{όπου } \varphi \mid B = \varphi \cap (B^n \times B),$$

και η $\varphi \mid B$ λέγεται **περιορισμός** της φ στο B. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ από το A^n στο A και τη συνάρτηση $g : A^k \to A$.

Ονομάζουμε **σύνθεση** των συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ με τη g, συμβολικά $g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$, τη συνάρτηση

$$g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) : A^n \to A$$

που ορίζεται όπως παρακάτω

$$g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g\big(\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$$

για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$.

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι υποσύνολα του A, τότε έχουμε

$$\varphi(A_1, \ldots, A_n) = \{\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_n \in A_n\},$$

δηλαδή η παραπάνω συνάρτηση $\varphi\colon A^n \to A$ επεκτείνεται στο σύνολο των υποσυνόλων του A, το οποίο λέγεται δυναμοσύνολο του A.

Θεωρούμε πάλι τις συναρτήσεις

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k : A^n \to A$$

Τότε έχουμε μία συνάρτηση

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) : A^n \to A^k$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \big(\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \varphi_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$$

Οι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ λέγονται συντεταγμένες συναρτήσεις της φ.

Οι παραπάνω ορισμοί αποτελούν φυσική συνέπεια συναρτήσεων της μορφής

$$G: A^k \to R \quad \text{και} \quad F: A^n \to R^k, \text{ όπου } A^n \subseteq R^n$$

και R^n, R^k είναι εφοδιασμένα με τη δομή διανυσματικού χώρου επί του σώματος των πραγματικών αριθμών R. Το R είναι διανυσματικός χώρος επί του R διάστασης ένα με βάση τη μονάδα. Αν λοιπόν $e_1, e_2, \ldots, e_k$ είναι μια βάση του R^k, τότε η εικόνα $F(x)$ του στοιχείου $x = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \in A^n$ γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$$

όπου οι συντεταγμένες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι μοναδικές ως προς τη θεωρούμενη βάση και εξαρτώνται από το x, δηλαδή ορίζουν πραγματικές συναρτήσεις $\varphi_i : A^n \to R$ $(i = 1, 2, \ldots, \kappa)$ έτσι,ώστε $\varphi_i(x) = \lambda_i$. Οι συναρτήσεις φ_i λέγονται συντεταγμένες συναρτήσεις της F.

Αν η παραπάνω βάση είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του R^k

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

τότε έχουμε τη μορφή

$$F(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)\big)$$

και άρα έχουν νόημα και ο συμβολισμός

$$F = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$$

και ο ορισμός

$$F(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)\big)$$

Όταν έχουμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k : A^n \to R$$

τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$F = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) : A^n \to R^k$$

με σύνολο τιμών $R(F) = A^k \subseteq R^k$.

Η σύνθεση των συναρτήσεων $G : A^k \to R$ και $F : A^n \to R^k$ είναι η συνάρτηση

$$G \circ F = G \circ (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) : A^n \to R$$

που ορίζεται με τη σχέση

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x))$$

και άρα έχουν νόημα και ο συμβολισμός

$$G(F) = G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k))$$

και ο ορισμός

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)(x) = G(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x))$$

Θεωρούμε δύο σύνολα Α και Β. Μία **πολυσήμαντη απεικόνιση φ από το Α στο Β, συμβολικά $\varphi : A \to B$**, είναι μία αντιστοιχία $\alpha \to \varphi(\alpha)$, όπου $\alpha \in A$ και $\varphi(\alpha)$ είναι ένα υποσύνολο του Β.

Το σύνολο ορισμού της φ είναι

$$D(\varphi) = \{\alpha \in A \mid \varphi(\alpha) \neq \varnothing\}$$

και το σύνολο τιμών της $R(\varphi) = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$.

Το **γράφημα** της φ είναι η σχέση

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in A \times B \mid \alpha \in A, \beta \in \varphi(\alpha)\}$$

Η **αντίστροφος** της φ, συμβολικά $\varphi^{-1}: B \to A$, ορίζεται με $\varphi^{-1}(\beta) = \{\alpha \in D(\varphi) \mid \beta \in \varphi(\alpha)\}$ και έχει σύνολο ορισμού το $R(\varphi)$ και σύνολο τιμών το $D(\varphi)$.

Αν είναι $A_1 \subseteq A$ και $B_1 \subseteq B$, τότε έχουμε

$$\varphi(A_1) = \bigcup_{\alpha \in A_1} \varphi(\alpha), \quad \varphi^{-1}(B_1) = \{\alpha \in A \mid \varphi(\alpha) \cap B_1 \neq \varnothing\}$$

Η φ^{-1} λέγεται **ψευδοαντίστροφος** της φ όταν είναι

$$\varphi^{-1}(B_1) = \{\alpha \in D(\varphi) \mid \varphi(\alpha) \subseteq B_1\}.$$

Η φ είναι **επιρριπτική**, όταν $\varphi(D(\varphi)) = B$, και **ενριπτική**, όταν ισχύει η σχέση

$$\varphi(\alpha_1) \cap \varphi(\alpha_2) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

για κάθε $\alpha_1, \alpha_2 \in D(\varphi)$.

Η φ λέγεται **σταθερά**, όταν υπάρχει ένα υποσύνολο B_1 του Β τέτοιο, ώστε να είναι $\varphi(\alpha) = B_1$ για κάθε $\alpha \in D(\varphi)$.

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

i. $\varphi(\varnothing) = \varnothing$, $\varphi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

ii. Αν $A_1 \subseteq A_2$, τότε $\varphi(A_1) \subseteq \varphi(A_2)$.

iii. Αν η φ είναι επί, τότε $B - \varphi(A_1) \subseteq \varphi(A - A_1)$.