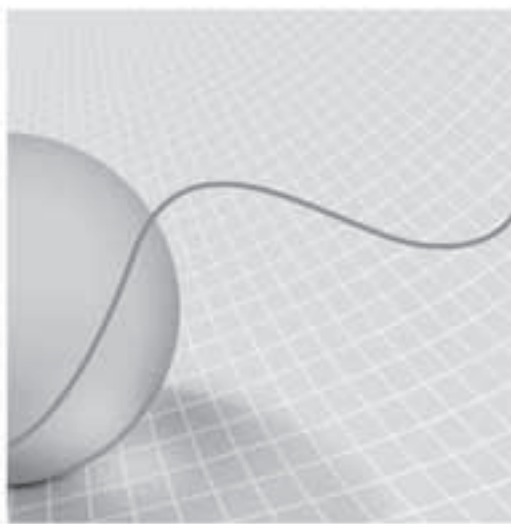


Ιγνάτιος Ιωαννίδης

Γ' ΕΠΑ.Λ.

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

- Στατιστική
- Όριο - Συνέχεια συνάρτησης
- Παράγωγοι
- Ολοκληρώματα



**Περιέχει:**

- Συνοπτική Θεωρία
- Μεθοδολογία Λύσης των Ασκήσεων
- Λυμένα Παραδείγματα
- Ασκήσεις με τις απαντήσεις τους

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για τους μαθητές της Γ΄ τάξης των ΕΠΑΛ που θα εξεταστούν Πανελλαδικά για την εισαγωγή τους στα Τ.Ε.Ι.

Περιέχει τα κεφάλαια Στατιστικής, Ορίων, Παραγώγων και Ολοκληρωμάτων.

Κάθε κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε διδακτικές ενότητες και κάθε ενότητα περιέχει την θεωρία, λυμένα παραδείγματα, ασκήσεις για λύση από τους μαθητές και απαντήσεις ή συνοπτικές λύσεις των ασκήσεων αυτών. Στα λυμένα παραδείγματα περιέχονται και επιλεγμένες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου των ΕΠΑΛ και του Ενιαίου Λυκείου.

Τα παραδείγματα γράφτηκαν όσο γίνεται πιο αναλυτικά για την καλύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές και πιστεύω ότι καλύπτουν τις σύγχρονες απαιτήσεις των Πανελλαδικών εξετάσεων. Τα τελευταία παραδείγματα κάθε ομάδας παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία στη λύση τους.

Στο κεφάλαιο της Στατιστικής ο τρόπος συμπλήρωσης των πινάκων είναι ενδεικτικός για να βοηθήσει τον μαθητή. Δεν είναι απαραίτητος, εκτός αν ζητείται στην εκφώνηση.

Οι παράγουσες είναι προτιμότερο να διδαχθούν στο τέλος του κεφαλαίου των Παραγώγων.

Προτείνω στους μαθητές να διαβάσουν προσεκτικά τα παραδείγματα και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να λύσουν τις προτεινόμενες ασκήσεις, διότι το είδος και το επίπεδο δυσκολίας των ασκήσεων αυτών είναι παρόμοιο με αυτό των παραδειγμάτων.

Με μεγάλη μου χαρά θα δεχτώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα βελτίωνε το βιβλίο αυτό.

*Καλή επιτυχία*  
*Ιγνάτιος Ιωαννίδης*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## Κεφάλαιο 1ο

### Στατιστική

7

<b>1.1</b>	Εισαγωγικές έννοιες.....	9
<b>1.2</b>	Στατιστικοί πίνακες .....	10
<b>1.3</b>	Γραφικές παραστάσεις .....	12
<b>1.4</b>	Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων .....	14
	Παραδείγματα .....	19
	Ασκήσεις .....	28
	Απαντήσεις.....	31
<b>1.5</b>	Παράμετροι θέσης.....	35
<b>1.6</b>	Παράμετροι διασποράς.....	39
<b>1.7</b>	Συντελεστής μεταβλητότητας .....	42
	Παραδείγματα .....	43
	Ασκήσεις .....	55
	Απαντήσεις.....	58

## Κεφάλαιο 2ο

### Όριο-Συνέχεια συνάρτησης

61

<b>2.1</b>	Όριο συνάρτησης .....	63
	Παραδείγματα .....	71
	Ασκήσεις .....	87
	Απαντήσεις.....	91
<b>2.2</b>	Συνέχεια συνάρτησης .....	93
	Παραδείγματα .....	95
	Ασκήσεις .....	106
	Απαντήσεις.....	109

## Κεφάλαιο 3ο

### Παράγωγοι

111

<b>3.1</b>	Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο .....	113
<b>3.2</b>	Συνέχεια και παραγωγισιμότητα.....	113
	Παραδείγματα .....	114
	Ασκήσεις .....	119
	Απαντήσεις.....	120
<b>3.3</b>	Παράγωγος συνάρτησης.....	121
<b>3.4</b>	Κανόνες παραγωγίσης .....	121
<b>3.5</b>	Παράγωγοι ανώτερης τάξης .....	121
<b>3.6</b>	Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων .....	121
	Παραδείγματα .....	123
	Ασκήσεις .....	131
	Απαντήσεις.....	132
<b>3.7</b>	Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων .....	133
	Παραδείγματα .....	134
	Ασκήσεις .....	137

	Απαντήσεις .....	138
<b>3.8</b>	<b>Ρυθμός μεταβολής.....</b>	<b>139</b>
<b>3.9</b>	<b>Παράγουσα συνάρτηση .....</b>	<b>140</b>
	Παραδείγματα .....	141
	Ασκήσεις .....	147
	Απαντήσεις.....	148
<b>3.10</b>	<b>Μονοτονία συνάρτησης.....</b>	<b>149</b>
<b>3.11</b>	<b>Ακρότατα συνάρτησης.....</b>	<b>149</b>
<b>3.12</b>	<b>Πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων συνάρτησης.....</b>	<b>149</b>
<b>3.13</b>	<b>Μελέτη τοπικών ακρότατων συνάρτησης.....</b>	<b>150</b>
	Κριτήριο 1ης Παραγώγου .....	150
	Παραδείγματα .....	151
	Ασκήσεις .....	161
	Απαντήσεις.....	163
<b>3.14</b>	<b>Μελέτη τοπικών ακρότατων συνάρτησης.....</b>	<b>165</b>
	Κριτήριο 2ης Παραγώγου .....	165
	Παραδείγματα .....	166
	Ασκήσεις .....	169
	Απαντήσεις.....	170

Κεφάλαιο 4ο	<i><b>Ολοκληρώματα</b></i>	171
-------------	----------------------------	-----

<b>4.1</b>	<b>Το ορισμένο ολοκλήρωμα.....</b>	<b>173</b>
<b>4.2</b>	<b>Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.....</b>	<b>173</b>
	Παραδείγματα .....	175
	Ασκήσεις .....	179
	Απαντήσεις.....	180
<b>4.3</b>	<b>Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος.....</b>	<b>181</b>
	<b>A. 1ος τρόπος υπολογισμού-Αναζήτηση μιας παράγουσας.....</b>	<b>181</b>
	<b>α) Ορισμένα ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων .....</b>	<b>181</b>
	Παραδείγματα .....	183
	Ασκήσεις .....	195
	Απαντήσεις.....	197
	<b>β) Ορισμένα ολοκληρώματα σύνθετων συναρτήσεων.....</b>	<b>199</b>
	Παραδείγματα .....	200
	Ασκήσεις.....	209
	Απαντήσεις.....	211
	<b>B. 2ος τρόπος υπολογισμού - Παραγοντική ολοκλήρωση.....</b>	<b>212</b>
	Παραδείγματα .....	213
	Ασκήσεις .....	223
	Απαντήσεις.....	224
<b>4.4</b>	<b>Εμβαδό επίπεδου χωρίου.....</b>	<b>225</b>
	<b>A Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από μια συνάρτηση.....</b>	<b>225</b>
	Παραδείγματα .....	227
	Ασκήσεις .....	237
	Απαντήσεις.....	239
	<b>B Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις.....</b>	<b>240</b>
	Παραδείγματα .....	243
	Ασκήσεις.....	249
	Απαντήσεις.....	250

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο****ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ****1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ****Παρατήρηση 1**

**Στατιστική** είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος έχει ως έργο:

- ▶ Το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων.
- ▶ Την ταξινόμηση και κατάλληλη παρουσίασή τους.
- ▶ Την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων για την εξυπηρέτηση διαφόρων σκοπών.

**Παρατήρηση 2**

**Πληθυσμός** λέγεται το σύνολο των αντικειμένων (εμφύχων ή αφύχων) του οποίου τα στοιχεία εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

**Παρατήρηση 3**

**Μεταβλητή** είναι το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε τον πληθυσμό. Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε σε:

- ▶ **ποιοτικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
- ▶ **ποσοτικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται σε:
  - **διακριτές** μεταβλητές, στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές.
  - **συνεχείς** μεταβλητές στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να αντιστοιχηθεί σε οποιαδήποτε πραγματική τιμή που ανήκει σε διάστημα των πραγματικών αριθμών ή ένωση διαστημάτων.

**Παρατήρηση 4**

**Δείγμα** είναι μια αντιπροσωπευτική μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού και **δειγματοληψία**, η εξέτασή του.

**Παρατήρηση 5**

- ▶ Οι τιμές  $t_1, t_2, \dots, t_n$  που παίρνουμε από την μελέτη ενός δείγματος μεγέθους  $n$  μιας μεταβλητής  $X$ , λέγονται **παρατηρήσεις**.
- ▶ Οι τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k \leq n$ ) λέγονται **τιμές της μεταβλητής  $X$**  και είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους παρατηρήσεις.

## 1.2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

### α Πίνακας Συχνοτήτων ( $v_i$ )

#### Παρατήρηση 6

- ▶ Στην τιμή  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) αντιστοιχίζεται η συχνότητα  $v_i$ , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή  $x_i$ , στο σύνολο των παρατηρήσεων και είναι  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k = v$ .
- ▶ Ρωτήσαμε π.χ. 40 μαθητές, να μας πούνε τον αριθμό των αδελφών που έχουν και πήραμε τους αριθμούς:
- ▶ Παρατηρήσεις  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 40$ ) είναι όλοι οι αριθμοί.
- ▶ Τιμές  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) της μεταβλητής  $X$  είναι οι αριθμοί  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$
- ▶ Αν όλοι οι αριθμοί είχαν την ίδια συχνότητα, τότε οι παρατηρήσεις  $t_i$  και οι τιμές  $x_i$  θα ήταν ίδιες ( $i = v$ ).

0	1	2	1	1	1	2	0	0	1
3	2	1	1	1	2	3	3	1	0
1	2	1	0	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	0	0	0

- ▶ Ο διπλανός πίνακας μας δίνει την κατανομή των συχνοτήτων για τη μεταβλητή «αριθμός αδελφών».
- ▶ Το μέγεθος του δείγματος είναι:  

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 8 + 22 + 7 + 3 = 40$$

Αριθμός Αδελφών $x_i$	Συχνότητα $v_i$
0	8
1	22
2	7
3	3
Άθροισμα	40

### β Πίνακας Αθροιστικών Συχνοτήτων ( $N_i$ )

#### Παρατήρηση 7

- ▶ Η αθροιστική συχνότητα εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .
- ▶  $N_1 = v_1 = 8$
- ▶  $N_2 = N_1 + v_2 = 8 + 22 = 30$
- ▶  $N_3 = N_2 + v_3 = 30 + 7 = 37$
- ▶  $N_4 = N_3 + v_4 = 37 + 3 = 40$

Αριθμός Αδελφών $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$
0	8	8
1	22	30
2	7	37
3	3	40
Άθροισμα	40	-

**γ Πίνακας Σχετικών Συχνοτήτων (  $f_i$  )**

**Παρατήρηση 8**

▶ Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $v_i$  με το μέγεθος  $v$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ , δηλαδή  $f_i = \frac{v_i}{v}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ), με  $0 \leq f_i \leq 1$  και  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ .

▶ Συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό, δηλαδή  $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 = 100 \cdot f_i$  και ισχύει  $f_1\% + f_2\% + \dots + f_k\% = 100\%$ .

▶  $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{8}{40} = 0,2$

▶  $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{22}{40} = 0,55$

▶  $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{7}{40} = 0,175$

▶  $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{3}{40} = 0,075$

Αριθμός Αδελφών $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0	8	0,200	20,0
1	22	0,550	55,0
2	7	0,175	17,5
3	3	0,075	7,5
<b>Άθροισμα</b>	<b>40</b>	<b>1,000</b>	<b>100,0</b>

**δ Πίνακας Αθροιστικών Σχετικών Συχνοτήτων (  $F_i$  )**

**Παρατήρηση 9**

▶ Η αθροιστική σχετική συχνότητα  $F_i$  εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .

▶ Συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό:  $F_i\% = 100 \cdot F_i$ .

▶  $F_1 = f_1 = 0,200$

▶  $F_2 = F_1 + f_2 = 0,200 + 0,550 = 0,750$

▶  $F_3 = F_2 + f_3 = 0,750 + 0,175 = 0,925$

▶  $F_4 = F_3 + f_4 = 0,925 + 0,075 = 1,000$

Αριθμός Αδελφών $x_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
0	0,200	0,200	20,0
1	0,550	0,750	75,0
2	0,175	0,925	92,5
3	0,075	1,000	100,0
<b>Άθροισμα</b>	<b>1,000</b>	<b>-</b>	<b>-</b>

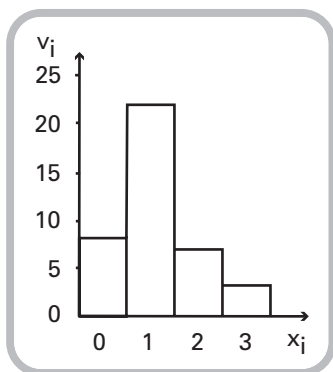
## 1.3 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

### α Ραβδόγραμμα

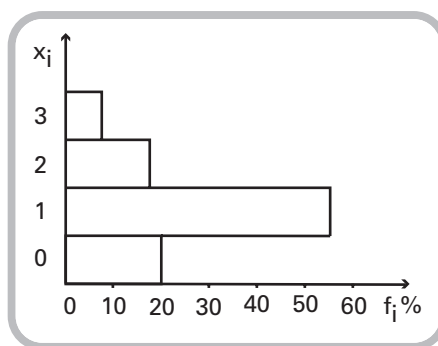
#### Παρατήρηση 10

Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής ή ποσοτικής μεταβλητής.

- ▶ Αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο άξονα (**κατακόρυφο ραβδόγραμμα**), ή στον κατακόρυφο άξονα (**οριζόντιο ραβδόγραμμα**).
- ▶ Σε κάθε τιμή της μεταβλητής  $X$  αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα, σχετική συχνότητα κλπ. Έχουμε έτσι το κατακόρυφο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων κλπ.
- ▶ Με παρόμοιο τρόπο έχουμε το οριζόντιο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων κλπ.
- ▶ Η απόσταση μεταξύ των στηλών και το μήκος των βάσεων τους καθορίζεται αυθαίρετα, είναι όμως ίδια για όλα.
- ▶ Μπορούμε να μην αφήνουμε κενό ανάμεσα στις στήλες.
- ▶ Για τον πίνακα της παρατήρησης 8 έχουμε τα ραβδογράμματα:



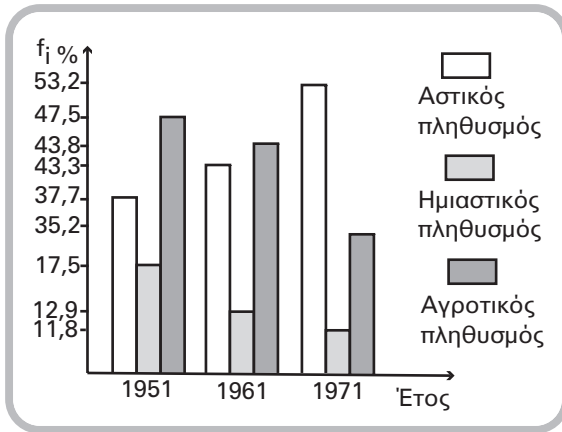
**Κατακόρυφο ραβδόγραμμα  
συχνοτήτων  $v_i$**



**Οριζόντιο ραβδόγραμμα  
σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$**

- ▶ Μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο ή περισσότερα ραβδογράμματα μαζί συγκρίνοντας έτσι διαφορετικές μεταβλητές.



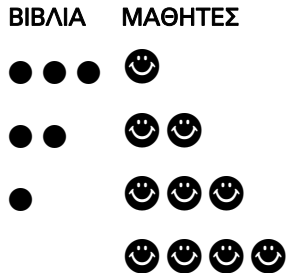


Στο διπλανό σχήμα είναι το κατακόρυφο ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$ , από την απογραφή του αστικού, ημιαστικού και αγροτικού πληθυσμού τα έτη 1951,1961,1971.

**β Εικονόγραμμα**

**Παρατήρηση 11**

► Χρησιμοποιείται στην μελέτη μεγάλων δειγμάτων.  
 π.χ  
 Από μια έρευνα σε δείγμα 10000 μαθητών για το πλήθος των βιβλίων που διαβάζουν σε ένα χρόνο, προέκυψε ότι οι 4000 δεν διάβασαν κανένα βιβλίο, οι 3000 διάβασαν 1 βιβλίο, οι 2000 διάβασαν 2 βιβλία και οι 1000 διάβασαν 3 βιβλία, έχουμε το διπλανό εικονόγραμμα.



**γ Κυκλικό Διάγραμμα**

**Παρατήρηση 12**

► Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των ποιοτικών και ποσοτικών μεταβλητών, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.  
 ► Είναι ένας κυκλικός δίσκος, χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ισοδύναμα τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  ή τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής  $X$ .

► Αν  $\alpha_i$  τα τόξα, τότε  $\alpha_i = \frac{v_i}{v} \cdot 360^\circ = 360^\circ \cdot f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \kappa$ ).

**Προσοχή :** Οι τιμές  $f_i$  στον τύπο δεν είναι επί τοις εκατό.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

### 1

Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές; Από τις ποσοτικές να διακρίνετε ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς.

- α) Οι αρχικοί μισθοί πτυχιούχων Μαθηματικών.
- β) Ο μήνας κατά τον οποίο ένας υπάλληλος παίρνει άδεια.
- γ) Οι απουσίες ενός μαθητή σε όλο το σχολικό έτος.
- δ) Οι προτιμήσεις των μαθητών στα μουσικά συγκροτήματα.
- ε) Το αγαπημένο χρώμα ενός τμήματος μαθητών.

**Λύση**

- α) Ποσοτική – συνεχής. Οι μισθοί μπορούν να κυμαίνονται σε ένα διάστημα.
- β) Ποιοτική. Οι τιμές είναι οι μήνες του έτους.
- γ) Ποσοτική – διακριτή. Οι απουσίες είναι οι φυσικοί αριθμοί 0, 1, 2, ....
- δ) Ποιοτική. Οι τιμές είναι ονόματα συγκροτημάτων και όχι αριθμοί.
- ε) Ποιοτική. Τα χρώματα δεν είναι αριθμοί.

### 2

Έγινε μια δειγματοληπτική έρευνα για το βάρος των εμπορευμάτων μιας αποθήκης λαχανικών. Βρήκαμε ότι τα βάρη 10 κιβωτίων σε κιλά είναι:

17, 12, 12, 15, 18, 22, 24, 25, 19, 20

- α) Ποιος είναι ο πληθυσμός;      β) Ποιες είναι οι μονάδες;
- γ) Ποιο είναι το δείγμα;      δ) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις;
- ε) Ποια είναι η μεταβλητή και ποιες οι τιμές της;

**Λύση**

- α) Πληθυσμός είναι το σύνολο  $K$  των κιβωτίων.
- β) Μονάδες είναι τα κιβώτια  $k_1, k_2, \dots, k_{10}$  που ζυγίσαμε.
- γ) Δείγμα είναι το σύνολο  $\Delta = \{k_1, k_2, \dots, k_{10}\}$ .
- δ) Παρατηρήσεις είναι όλοι οι αριθμοί.
- ε) Μεταβλητή είναι το βάρος των κιβωτίων και το σύνολο τιμών της είναι  $\Sigma = \{12, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25\}$ .



Τα 16 τμήματα ενός Λυκείου έχουν τους εξής μαθητές:

31,29,27,29,28,28,30,28,29,30,31,29,31,27,27,29.

α) Να κατασκευάσετε τους πίνακες: συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων % και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β) Να κάνετε τα κατακόρυφα ραβδόγραμμα συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

**Λύση**

α)

Μαθητές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
27	3	3	18,75	18,75
28	3	6	18,75	37,50
29	5	11	31,25	68,75
30	2	13	12,50	81,25
31	3	16	18,75	100,00
<b>Αθροισμα</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>100,00</b>	<b>-</b>

$$\triangleright f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{3}{16} \cdot 100 = 18,75$$

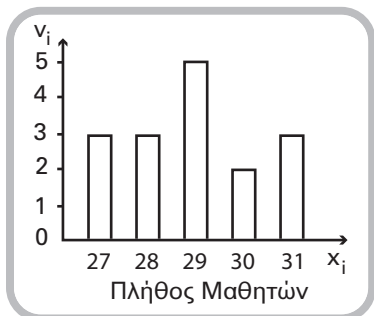
$$\triangleright f_2\% = \frac{v_2}{v} \cdot 100 = \frac{3}{16} \cdot 100 = 18,75$$

$$\triangleright f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{5}{16} \cdot 100 = 31,25$$

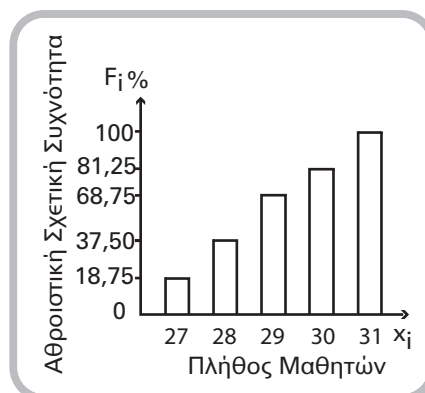
$$\triangleright f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{2}{16} \cdot 100 = 12,50$$

$$\triangleright f_5\% = \frac{v_5}{v} \cdot 100 = \frac{3}{16} \cdot 100 = 18,75$$

β)



Κατακόρυφο ραβδόγραμμα  
συχνοτήτων  $v_i$



Κατακόρυφο ραβδόγραμμα  
αθρ. σχετικών συχνοτήτων  $F_i\%$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στη Στατιστική. Πήραμε τις βαθμολογίες 15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17.
  - α) Ποιος είναι ο πληθυσμός;
  - β) Ποια είναι τα άτομα;
  - γ) Ποια είναι η μεταβλητή;
  - δ) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις;
  - ε) Η ποσοτική αυτή μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή;
2. Μελετάμε τους μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου ως προς την διαγωγή τους, τον αριθμό των απουσιών τους, την ειδικότητα που παρακολουθούν και το βάρος τους. Να βρείτε ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές και από τις ποσοτικές μεταβλητές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς.
3. Οι παρακάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	3	6	2	3	1	2	4	5	5
1	2	1	1	3	3	5	5	5	2
1	6	4	4	4	6	4	5	2	6

Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων

4. Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία επί 30 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε βαθμού Κελσίου) τους παρακάτω αριθμούς:

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και το κατακόρυφο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
- β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν:
  - i) Μικρότερη από  $23^{\circ}\text{C}$ .
  - ii) Μεγαλύτερη από  $24^{\circ}\text{C}$ .
  - iii) Τουλάχιστον  $24^{\circ}\text{C}$ .

5. Ο διπλανός πίνακας δίνει την κατανομή συχνοτήτων 50 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους.

Αριθμός Παιδιών $x_i$	Αριθμός Οικογενειών $v_i$
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3
Άθροισμα	50

α) Να τον συμπληρώσετε με τους πίνακες αθροιστικών συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων % και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β) Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

i) Τουλάχιστον 1 παιδί.

ii) Πάνω από 3 παιδιά.

iii) Από 3 έως 5 παιδιά.

iv) Το πολύ 6 παιδιά.

v) Ακριβώς 6 παιδιά.

6. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής ενός δείγματος με οθόνες τηλεόρασης από την παραγωγή ενός εργοστασίου.

Διάρκεια Ζωής (σε ώρες)	Συχνότητα $v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i \%$
[400,500)		15		
[500,600)		60		
[600,700)		120		
[700,800)		195		
[800,900)		265		
[900,1000)		325		
[1000,1100)		375		
[1100,1200)		400		
Άθροισμα		-		-

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε:

i) Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

ii) Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.