Ε. - Α. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΥ

ΟΜΑΔΕΣ ΤΟΥ LIE

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία των ομάδων του Lie στηρίζεται σε τέσσερις βασικούς κλάδους των μαθηματικών: την άλγεβρα, ανάλυση, τοπολογία και τη γεωμετρία. Αυτό οφείλεται, κύρια, στο ότι μια ομάδα του Lie είναι ταυτόχρονα ομάδα (με την αλγεβρική έννοια), τοπολογικός χώρος και διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Έχει λοιπόν τρία είδη δομών που συνδέονται μεταξύ τους.

Αυτό το τεύχος απευθύνεται στους τεταρτοετείς φοιτητές των μαθηματικών που παρακολουθούν το μάθημα επιλογής «Ομάδες του Lie». Είναι όμως χρήσιμο και σε φοιτητές που ενδιαφέρονται για θεωρητική φυσική μια και η χρήση των ομάδων και των αλγεβρών του Lie έχει σήμερα πολλές εφαρμογές σε κλάδους της θεωρητικής φυσικής. Φυσικά σ' αυτό το τεύχος δίνονται μόνο βασικές γνώσεις των αλγεβρών και των ομάδων του Lie, χωρίς εφαρμογές στη Φυσική.

Η ανάγνωση του βιβλίου προϋποθέτει βασικές γνώσεις γραμμικής άλγεβρας, θεωρίας ομάδων και στοιχείων τοπολογίας.

Προσπάθησα να κάνω το τεύχος ανεξάρτητο από τις ειδικές γνώσεις των διαφορισίμων πολλαπλοτήτων, γι' αυτό το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στις αναλυτικές πολλαπλότητες.

Ευχαριστώ θερμά τον επιστημονικό συνεργάτη του μαθηματικού τμήματος κ. Δημήτρη Χρισταφακόπουλο για την προσεκτική μελέτη του χειρογράφου και τη διόρθωση των τυπογραφικών δοκιμίων. Ευχαριστώ επίσης το τυπογραφείο Π. Ζήτη για τις προσπάθειες που κατέβαλε, για την αρτιότερη εμφάνιση του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1984

Ε-Α. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ ΤΟΥ LIE

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΔΟΜΗ ΟΜΑΔΑΣ ΤΟΥ LIE

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ ΤΟΥ LIE

§Ι.1. Ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ Ι.1. Μια άλγεβρα E πάνω σ' ένα σώμα K είναι ένας διανυσματικός χώρος E πάνω στο K για τον οποίο μια διγραμμική απεικόνιση $(x, y) \to xy$ του $E \times E \to E$ έχει οριστεί. Δηλ. θα έχουμε

(1) $\quad (x_1+x_2)\, y = x_1 y + x_2 y, \quad x\,(y_1+y_2) = xy_1 + xy_2$

(2) $\quad \lambda\,(xy) = (\lambda x)\, y = x\,(\lambda y), \quad \forall\, \lambda \in K, \quad \forall\, x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in E.$

Λέμε τότε ότι ο E είναι εφοδιασμένος με τον πολλαπλασιασμό $(x, y) \to xy$. Η άλγεβρα θα λέγεται **προσεταιριστική** άλγεβρα πάνω στο K, αν ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, δηλ. αν επαληθεύει την

(3) $$(xy)\, z = x\,(yz) \quad \forall\, x, y, z \in E.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ι.2. Μια άλγεβρα E πάνω στο K εφοδιασμένη με το πολλαπλασιασμό $(x, y) \to xy$ λέγεται άλγεβρα του Lie αν ο πολλαπλασιασμός της ικανοποιεί επιπλέον τις συνθήκες του Lie :

(4) $$x^2 = x\,x = 0, \; x\,(yz) + y\,(zx) + z\,(xy) = 0$$

Η δεύτερη από τις συνθήκες (4) λέγεται **ταυτότητα του Jacobi.** Ο πολλαπλασιασμός της άλγεβρας του Lie συμβολίζεται με την παρένθεση $[x, y]$ δηλ. $xy = [x, y]$ και λέγεται παρένθεση του Lie. Τότε οι συνθήκες (4) γράφονται

(4΄) $$[x, x] = 0, \; [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι.1. Σε μια άλγεβρα του Lie έχουμε

(5) $$[x, y] = -[y, x]$$

Απόδειξη: Αν $x, y \in E$, έχουμε

$$0 = [x+y, x+y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

Επομένως

$$[x, y] + [y, x] = 0 \quad \text{ή} \quad [x, y] = -[y, x]$$

Αντίστροφα,

$$\text{αν} \quad [x, y] = -[y, x] \quad \text{τότε} \quad [x, x] = -[x, x]$$

ή $2[x, x] = 0$. Αν το σώμα έχει χαρακτηριστικό $\neq 2$ τότε $[x, x]=0$. Επομένως για άλγεβρες χαρακτηριστικού $\neq 2$ η συνθήκη (5) μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί για την πρώτη των (4΄).

§Ι.2. Παραδείγματα

1. Ας είναι Π μια προσεταιριστική άλγεβρα πάνω στο K με πολλαπλασιασμό $(x, y) \to xy$. Τότε ορίζουμε το **γινόμενο Lie** ή **αντιμεταθέτη** των x και y ως το

$$[x, y] = xy - yx$$

Είναι φανερό ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (1) και (2) του ορισμού (Ι.1) και επιπλέον

$$[x, x] = x^2 - x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & x[y, z] - [y, z]x + y[z, x] - [z, x]y + z[x, y] - [x, y]z = \\ & = x(yz-zy) - (yz-zy)x + y(zx-xz) - (zx-xz)y + z(xy-yx) - \\ & - (xy-yx)z = 0. \end{aligned}$$

(Επαληθεύεται η ταυτότητα του Jacobi).

Έτσι βλέπουμε πως το γινόμενο $[x, y]$ ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του γινομένου μιας άλγεβρας του Lie. Η άλγεβρα του Lie που κατασκευάζεται κατ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται **η άλγεβρα του Lie της προσεταιριστικής άλγεβρας Π.**

2. Ας είναι W ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K και L (W) η προσεταιριστική άλγεβρα των ενδομορφισμών του W. Η L (W) εφοδιασμένη με την παρένθεση που ορίστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλ. με $[\varphi, f] = \varphi \circ f - f \circ \varphi$, όπου $\varphi, f \in L(W)$, είναι μια άλγεβρα του Lie Π.

3. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $M_n(K)$ των τετραγωνικών πινάκων τάξης n, αποτελεί μια προσεταιριστική άλγεβρα με πράξη πολλαπλασιασμού το συνηθισμένο πολλαπλασιασμό των πινάκων XY. Την άλγεβρα αυτή τη συμβολίζουμε επίσης με $M_n(K)$. Η $M_n(K)$ εφοδιασμένη με την παρένθεση

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in M_n(K))$$

γίνεται μια άλγεβρα του Lie Π.

4. Αβελιανές άλγεβρες του Lie. Ας είναι A ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, $y \in A$ έχουμε $[x, y]=0$. Η A γίνεται μια άλγεβρα του Lie που θα την ονομάζουμε **Αβελιανή**.

Θα λέμε ότι δύο στοιχεία x, y μιας άλγεβρας του Lie είναι **αντιμεταθετικά** αν $[x, y]=0$. Δύο υποσύνολα A_1, A_2 μιας άλγεβρας του Lie είναι αντιμεταθετικά αν $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$ για $\forall\ \alpha_1 \in A_1$ και $\forall\ \alpha_2 \in A_2$.

Είναι φανερό ότι η άλγεβρα του Lie που αντιστοιχεί σε μια προσεταιριστική άλγεβρα είναι αβελιανή αν η προσεταιριστική άλγεβρα είναι αβελιανή και μόνο τότε. Πραγματικά,

$$[x, y] = xy - yx = 0 \Leftrightarrow xy = yx$$

§I.3. Σταθερές δομής

Ονομάζουμε βάση και διάσταση μιας άλγεβρας του Lie, μια βάση και τη διάσταση του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου.

Ας είναι A μια άλγεβρα με πεπερασμένη διάσταση n, και $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ μια βάση της A. Αν

$$x = \lambda^i e_i, \quad y = \mu^j e_j, \quad \text{(με συμβολισμό Einstein)},$$

είναι δύο τυχόντα στοιχεία της A, τότε

$$xy = (\lambda^i e_i)(\mu^j e_j) = \lambda^i \mu^j (e_i e_j).$$

Αν τώρα γνωρίζουμε τον **πίνακα πολλαπλασιασμού**, δηλ. τις σταθερές $c_{ij}^{\ k}$ που προκύπτουν από τα γινόμενα πολλαπλασιασμού των στοιχείων της βάσης ανά δύο:

$$e_i e_j = c_{ij}^{\ k} e_k, \tag{6}$$

τότε
$$xy = c_{ij}^{\ k} \lambda^i \mu^j e_k,$$

κι έτσι γνωρίζουμε τον πολλαπλασιασμό στην άλγεβρα A.

Αντίστροφα, ας είναι A ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n πάνω στο σώμα K, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ μια βάση του A, κι ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένας πίνακας από n^3 στοιχεία του K, $c_{ij}^{\ k}$. Ας βάλουμε:

$$e_i\, e_j = c_{ij}^{\ k}\, e_k$$

Είναι εύκολο να επαληθέψουμε ότι ορίζεται μια δομή άλγεβρας στον A. Οι σταθερές $c_{ij}^{\ k}$ λέγονται **σταθερές δομής** (ως προς τη βάση που εκλέξαμε).

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Ας είναι $(e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'})$ μια καινούργια βάση της άλγεβρας A. Τότε:

$$e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{i}\, e_i, \quad e_{\mu'} = A_{\mu'}^{j} e_j, \quad e_k = A_k^{\rho'}\, e_{\rho'}$$

όπου $(A_{\kappa'}^{i})$ είναι ο πίνακας αλλαγής της βάσης. Έχουμε

$$(e_{\lambda'}\, e_{\mu'}) = A_{\lambda'}^{i}\, A_{\mu'}^{j}\, e_i\, e_j = A_{\lambda'}^{i}\, A_{\mu'}^{j}\, c_{ij}^{\ k}\, e_k = A_{\kappa}^{\rho'}\, A_{\lambda'}^{i}\, A_{\mu'}^{j}\, c_{ij}^{\ k}\, e_{\rho'}$$

Αν τώρα οι σταθερές δομής για την νέα βάση $(e_{\rho'})$ είναι $c_{\lambda'\mu'}^{\rho'}$, θα έχουμε

$$e_{\lambda'}\, e_{\mu'} = c_{\lambda'\mu'}^{\rho'}\, e_{\rho'}$$

επομένως

$$c_{\lambda'\mu'}^{\rho'} = A_{\kappa}^{\rho'}\, A_{\lambda'}^{i}\, A_{\mu'}^{j}\, c_{ij}^{\ k} \tag{7}$$

Από τη σχέση (7) φαίνεται ότι οι σταθερές δομής είναι συνιστώσες τανυστή τύπου $\binom{1}{2}$ ως προς το διανυσματικό χώρο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι.2. Μια άλγεβρα A με βάση $\{e_i\}$ είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν

$$(e_i\, e_j)\, e_k = e_i\, (e_j\, e_k) \tag{8}$$

ή, χρησιμοποιόντας σταθερές δομής, αν

$$c_{ij}^{\ h}\, c_{hk}^{\ l} = c_{jk}^{\ h}\, c_{ih}^{\ l}, \quad \forall\ i, j, k, l. \tag{9}$$

Απόδειξη: Αν $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j$, $z = z^k e_k$ και ισχύει η (8) πολλαπλασιάζοντας με $x^i y^j z^k$ και αθροίζοντας ως προς τους δείκτες έχουμε

$$(xy)\, z = x\, (yz) \tag{8'}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η (8′) για όλα τα $x, y, z \in A$ τότε ισχύει και η (8).

Για να φτάσουμε στην (9) αντικαθιστούμε το $(e_i\, e_j)$ με $c_{ij}^{\ h}\, e_h$ και το $(e_j\, e_k)$ με $c_{jk}^{\ h}\, e_h$ οπότε

$$c_{ij}^{\ h}\,(e_h\, e_k) = c_{jk}^{\ h}\,(e_i\, e_h)$$

ή $c_{ij}^{\ h}\, c_{hk}^{\ l}\, e_l = c_{jk}^{\ h}\, c_{ih}^{\ l}\, e_l$ και ακολουθεί η (9).

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι.3. Μια άλγεβρα A με βάση $\{e_i\}$ είναι του Lie αν και μόνο αν $e_i^2 = 0$, $[e_i\, e_j = -\, e_j\, e_i]$

(10) $$e_i\,(e_j\, e_k) + e_j\,(e_k\, e_i) + e_k\,(e_i\, e_j) = 0.$$

για $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Η παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με

(11) $c_{ij}^{\ k} = 0$ αν $i = j$, $\forall\, k$. $c_{ij}^{\ k} = -c_{ji}^{\ k}$, $c_{jk}^{\ \rho}\, c_{i\rho}^{\ \sigma} + c_{ki}^{\ \rho}\, c_{j\rho}^{\ \sigma} + c_{ij}^{\ \rho}\, c_{k\rho}^{\ \sigma} = 0.$

Απόδειξη: $x^2 = 0 \;\; \forall\, x \in A$. Πραγματικά, $x = x^i e_i \Rightarrow x^2 = x^i x^j (e_i\, e_j)$ ή $x^2 = x^i x^i (e_i\, e_i) + \sum_{i \neq j} x^i x^j (e_i\, e_j)$. Ο πρώτος όρος είναι 0 αφού $e_i^2 = 0$, ο δεύτερος όρος είναι άθροισμα γινομένων της μορφής $x^i x^j (e_i\, e_j)$ όπου το $x^i x^j$ είναι συμμετρικό ως προς i, j και το $e_i\, e_j$ αντισυμμετρικό ως προς i, j, άρα το άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης $xy = -yx \;\; \forall\, x, y \in A$ $(x \neq y)$. Πραγματικά αν $x = x^i e_i$ και $y = y^j e_j$, τότε

$$xy = (x^i e_i)(y^j e_j) = x^i y^j (e_i e_j) = -x^i y^j (e_j\, e_i) = -(y^j e_j)(x^i e_i) = -yx$$

Τέλος ας είναι $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j$, $z = z^k e_k$, τότε

$$\begin{aligned} x\,(yz) &= (x^i e_i)\,[(y^j e_j)(z^k e_k)] = x^i y^j z^k \left\{ e_i\,(e_j\, e_k) \right\} \\ y\,(zx) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x^i y^j z^k \left\{ e_j\,(e_k\, e_i) \right\} \\ z\,(xy) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x^i y^j z^k \left\{ e_k\,(e_i\, e_j) \right\} \end{aligned}$$

Επομένως

$$x\,(yz) + y\,(zx) + z\,(xy) = x^i y^j z^k \left\{ e_i\,(e_j\, e_k) + e_j\,(e_k\, e_i) + e_k\,(e_i\, e_j) \right\} = 0$$

και η A είναι άλγεβρα του Lie και $xy = [x, y]$.

Οι συνθήκες (11) προκύπτουν εύκολα από τις (10) με απλές αντικαταστάσεις.

§Ι.4. Άλγεβρες του Lie μικρών διαστάσεων

α. Διάσταση 1. Ας είναι $e \neq 0$ μια βάση μιας άλγεβρας του Lie A διάστασης 1. Κάθε στοιχείο της A είναι της μορφής λe, και για κάθε ζευγάρι στοιχείων λe, μe της A έχουμε:

$$[\lambda e, \mu e] = \lambda\mu\,[e, e] = 0$$

Αυτό δείχνει ότι η A είναι κατ' ανάγκη Αβελιανή. Επομένως, κατά προσέγγιση ισομορφισμού, υπάρχει μόνο μια άλγεβρα του Lie διάστασης 1.

β. Διάσταση 2. Ας είναι (e_1, e_2) μια βάση της A και ας πάρουμε το μη αβελιανό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από την

$$[e_1, e_2] = e_3 \neq 0.$$

Αν $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 \varepsilon_2$ και $\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 e_2$ είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία της A θα έχουμε:

$$[\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,\ \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2] = [\lambda_1 e_1, \mu_2 e_2] + [\lambda_2 e_2, \mu_1 e_1] = \lambda_1\mu_2\,[e_1, e_2] +$$
$$+ \lambda_2\mu_1\,[e_2, e_1] = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,[e_1, e_2] = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,e_3.$$

Δηλ. η παρένθεση δύο τυχόντων στοιχείων της A είναι ανάλογη προς το e_3.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια άλλη βάση $(e_{1'}, e_{2'})$ της A τέτοια ώστε:

$$[e_{1'}, e_{2'}] = e_{3'} \neq 0$$

Από τη γνωστή σχέση αλλαγής βάσεων

$$e_i = A_i^{k'}\, e_{k'}$$

βρίσκουμε ότι

$$[e_i, e_j] = A_i^{k'} A_j^{\lambda'}\,[e_{k'}, e_{\lambda'}]$$

και στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$[e_1, e_2] = (A_1^{1'} A_2^{2'} - A_1^{2'} A_2^{1'})\,[e_{1'}, e_{2'}] = \alpha \cdot e_{3'}$$

όπου η ορίζουσα

$$\alpha = \begin{vmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Δηλ. $e_3 = \alpha\, e_{3'}$. Επομένως κατά προσέγγιση ισομορφισμού υπάρχει μόνο μία μη αβελιανή άλγεβρα του Lie διάστασης 2.

γ. Διάσταση 3. Ας είναι (e_1, e_2, e_3) μια βάση της A. Εκτός της αβελιανής περίπτωσης θα εξετάσουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

1. Ας υποθέσουμε ότι $e_i\, e_j = -e_j\, e_i$ $(i \neq j)$ και $e_i\, e_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Επίσης ότι οι σταθερές δομής ορίζονται από τις σχέσεις $e_1e_2 = +e_3$, $e_1\, e_3=0$, $e_2e_3=0$. Είναι τότε φανερό ότι

$$e_1\,(e_2e_3) + e_2\,(e_3e_1) + e_3\,(e_1\, e_2) = 0$$

Δηλ. η ταυτότητα του Jacobi επαληθεύεται από τα στοιχεία της βάσης, και επομένως από οποιαδήποτε στοιχεία. Έχουμε μια Άλγεβρα του Lie που ορίζεται από

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον συνηθισμένο τριδιάστατο διανυσματικό χώρο E^3 με πολλαπλασιασμό δύο στοιχείων του $\vec{x}, \vec{y}$ το διανυσματικό γινόμενο $\vec{x} \times \vec{y}$. Ας υποθέσουμε ότι $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι μια βάση του E_3 τέτοια ώστε

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

Είναι γνωστό από το στοιχειώδη διανυσματικό λογισμό ότι

$$\vec{x} \times \vec{x} = 0 \quad \forall\ \vec{x} \in E_3, \quad \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_3.$$

Επίσης από τον υπολογισμό του παρακάτω αθροίσματος

$$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \vec{e}_2 \times (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + \vec{e}_3 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$$

βρίσκουμε αποτέλεσμα μηδέν.

Ο E_3 γίνεται μια άλγεβρα του Lie με παρένθεση $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y}$.

Παίρνουμε τώρα μια άλγεβρα A με $\dim A=3$ και μια βάση (e_1, e_2, e_3). Ας υποθέσουμε ότι :

$$e_i\, e_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad e_i\, e_j = -e_j\, e_i \quad (i \neq j)$$

και με σταθερές δομής που ορίζονται από τις σχέσεις :

$$e_1\, e_2 = e_3\,, \quad e_1\, e_3 = -e_2\,, \quad e_2\, e_3 = e_1$$

Είναι τότε φανερό ότι

$$e_1\,(e_2e_3) + e_2\,(e_3e_1) + e_3\,(e_1e_2) = e_1e_1 + e_2\, e_2 + e_3\, e_3 = 0$$

Η ταυτότητα του Jacobi επαληθεύεται για τα στοιχεία της βάσης, άρα γενικά έχουμε :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

όπου $[x, y] = xy$ είναι η παρένθεση του Lie και A είναι μια άλγεβρα του Lie.

Στην περίπτωση γ θα ξαναγυρίσουμε όταν ασχοληθούμε με τους ομομορφισμούς αλγεβρών του Lie.

§I.5. Υποάλγεβρες και ιδεώδη αλγεβρών του Lie

ΟΡΙΣΜΟΣ I.3. Ας είναι A μια άλγεβρα του Lie, B ένα υποσύνολο της A. Θα λέμε ότι B είναι μια υποάλγεβρα του Lie της άλγεβρας A αν

1. B είναι διανυσματικός υποχώρος του A.
2. $(x, y \in B) \Rightarrow [x, y] \in B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α. Ας είναι B το υποσύνολο της $M_n(K)$ που σχηματίζεται από τους πίνακες με ίχνος μηδέν. (Το ίχνος του πίνακα α το συμβολίζουμε με $Tr(\alpha)$). Επειδή

$$Tr(X+Y) = Tr(X) + Tr(Y) \quad \text{και} \quad Tr(\lambda X) = \lambda Tr(X), \quad \forall\, \lambda \in K$$

είναι φανερό ότι $Tr(X)$ είναι γραμμική μορφή πάνω στο $M_n(K)$. B είναι διανυσματικός υποχώρος του $M_n(K)$ και επιπλέον

$$Tr([X, Y]) = Tr(XY-YX) = Tr(XY) - Tr(YX) = 0.$$

$[X, Y] \in B$ και B είναι άλγεβρα του Lie, υποάλγεβρα του Lie της άλγεβρας του Lie Π που αντιστοιχεί στη $M_n(K)$.

β. Ας είναι A το υποσύνολο του $M_n(K)$ που αποτελείται από τους πίνακες α που είναι αντισυμμετρικοί, δηλ. τέτοιοι ώστε $\alpha = -{}^t\alpha$ όπου ${}^t\alpha$ είναι ο ανάστροφος του α. Είναι εύκολο να δούμε ότι A είναι διανυσματικός υποχώρος του $M_n(K)$ και ότι αν $\alpha, \beta \in A$, τότε $[\alpha, \beta] \in A$. Πραγματικά, αν $\alpha = -{}^t\alpha$ και $\beta = -{}^t\beta$, τότε

$$\begin{aligned}{}^t[\alpha, \beta] &= {}^t(\alpha\beta-\beta\alpha) = {}^t(\alpha\beta) - {}^t(\beta\alpha) = {}^t\beta\,{}^t\alpha - {}^t\alpha\,{}^t\beta = \\ &= -({}^t\alpha\,{}^t\beta-{}^t\beta\,{}^t\alpha) = -[{}^t\alpha, {}^t\beta] = -[-\alpha, -\beta] = -[\alpha, \beta]\end{aligned}$$

Επομένως A είναι μια άλγεβρα του Lie, υποάλγεβρα του Lie της άλγεβρας B του παραδείγματος α.

Σημ. Ας μη ξεχνάμε ότι για κάθε αντισυμμετρικό πίνακα α έχουμε $Tr(\alpha)=0$.

γ. Ας είναι T το υποσύνολο του $M_n(K)$ που αποτελείται από τους τριγωνικούς πίνακες $n \times n$, δηλ. τέτοιους ώστε αν $\alpha = (a_{ij})$ τότε $a_{ij}=0$ για $i>j$. T είναι μια υποάλγεβρα του Lie της Π, αφού το γινόμενο δύο τριγωνικών πινάκων είναι τριγωνικό και επομένως κι η παρένθεση είναι τριγωνικός πίνακας.