Ε.-Α. Ηλιοπούλου

Φ. Γουλή - Ανδρέου

Εισαγωγή στη Γεωμετρία του Riemann

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο βιβλίο αυτό δίνεται μια συμπυκνωμένη έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων της θεωρίας των χώρων του Riemann. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε συστηματικά η μέθοδος των «κινουμένων συστημάτων αναφοράς», που οφείλεται στον M. Elie Cartan.

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους τεταρτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, που παρακολουθούν το μάθημα επιλογής «Γεωμετρία Riemann».

Η ανάγνωση του βιβλίου προυποθέτει βασικές γνώσεις αλγεβρικού τανυστικού λογισμού και διαφορισίμων πολλαπλοτήτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μελέτη της ανάλυσης των τανυστικών πεδίων σε Ευκλείδειους χώρους. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται επέκταση στους χώρους του Riemann της Ευκλείδειας Άλγεβρας και Ανάλυσης των τανυστικών πεδίων, με τη βοήθεια της παράστασης πρώτης και δεύτερης τάξης και της εφαπτόμενης και εγγύτατης Ευκλείδειας μετρικής. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται οι ιδιότητες του τανυστή καμπυλότητας ενός χώρου του Riemann, καθώς επίσης οι ιδιότητες των επίπεδων χώρων και των χώρων σταθερής καμπυλότητας.

Τον επιστημονικό συνεργάτη του Μαθηματικού Τμήματος Δημήτρη Χρισταφακόπουλο ευχαριστούμε θερμά, για την προσεκτική μελέτη των χειρογράφων και τις παρατηρήσεις του στα τυπογραφικά. Ευχαριστούμε ακόμη το τυπογραφείο της Π. Ζήτη, για την προσεγμένη εκτύπωση και εμφάνιση.

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 1985

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I
ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II
ΟΙ ΧΩΡΟΙ ΤΟΥ RIEMANN

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III
ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I
ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

§1.1. Παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής

Ας είναι E_n ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n πάνω στο σώμα R των πραγματικών αριθμών και (α, b) ένα διάστημα του R. Μια απεικόνιση του (α, β) στον E_n ορίζει μια διανυσματική συνάρτηση, που τη συμβολίζουμε με $\bar{x}(t)$, όπου $\alpha<t<\beta$. Αν $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ είναι μια βάση του E_n, τότε

$$\bar{x}(t) = x^1(t)\,\bar{e}_1 + x^2(t)\bar{e}_2 + \ldots + x^n(t)\,\bar{e}_n = x^i(t)\,\bar{e}_i \tag{1.1.1}$$

όπου $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ είναι οι συντεταγμένες του $\bar{x}(t)$, που είναι αριθμητικές συναρτήσεις μιάς πραγματικής μεταβλητής. Αν $\{\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \ldots, \bar{e}_{n'}\}$ είναι μια άλλη βάση του E_n, όπου

$$\bar{e}_{j'} = A_{j'}^{i}\,\bar{e}_i \tag{1.1.2}$$

τότε

$$\bar{x}(t) = x^{1'}(t)\,\bar{e}_{1'} + x^{2'}(t)\,\bar{e}_{2'} + \ldots + x^{n'}(t)\,\bar{e}_{n'} = x^{j'}(t)\,\bar{e}_{j'}$$

όπου

$$x^{j'}(t) = A_i^{j'}\,x^i(t). \tag{1.1.3}$$

Σημείωση 1.1.1. Στις σχέσεις (1.1.1), (1.1.2) και (1.1.3) χρησιμοποιήθηκε ο λεγόμενος συμβολισμός του Einstein. Σύμφωνα μ' αυτόν, αν στον ίδιο όρο μιας παράστασης ο ίδιος δείκτης εμφανίζεται δύο φορές, μια φορά ως άνω δείκτης και μιά φορά ως κάτω δείκτης, θα νοείται, ότι γίνεται άθροιση για όλες τις τιμές που αυτός ο δείκτης παίρνει. Επομένως με το συμβολισμό αυτό ένας όρος αντικαθιστά ένα άθροισμα n όρων. Για παράδειγμα ο όρος $A_j^i\,e_i$ αντικαθιστά το άθροισμα

$$A_j^1\,\bar{e}_1 + A_j^2\,\bar{e}_2 + \ldots + A_j^n\,\bar{e}_n.$$

Ορισμός 1.1.1. Θα λέμε ότι η διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}(t)$ τείνει στο μηδενικό διάνυσμα (ή πιο απλά στο μηδέν) όταν $t \to t_0$, αν οι αριθμητικές συναρτήσεις $x^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τείνουν στο μηδέν όταν $t \to t_0 \in (a, b)$. Είναι φανερό, λόγω της σχέσης (1.1.3), ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της βάσης του E_n κι επομένως έχει εσωτερικό χαρακτήρα.

Ορισμός 1.1.2. Θα λέμε,ότι η διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}(t)$ τείνει στο σταθερό διάνυσμα $\bar{\alpha} \in E_n$, όταν $t \to t_0 \in (\alpha, b)$, αν η διαφορά $\bar{x}(t)-\bar{\alpha}$ τείνει στο μηδέν, όταν $t \to t_0$.

Ορισμός 1.1.3. Θα λέμε,ότι η διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t στο σημείο $t_0 \in (\alpha, b)$, αν η διανυσματική συνάρτηση $\Delta\bar{x}=\bar{x}(t_0+\Delta t)-\bar{x}(t_0)$ τείνει στο μηδέν, όταν $\Delta t \to 0$.

Είναι φανερό, ότι ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τη συνέχεια των συντεταγμένων συναρτήσεων στο t_0.

Αν η συνάρτηση $\bar{x}(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t_0 \in (\alpha, b)$, τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο διάστημα (α, b).

Ορισμός 1.1.4. Αν υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}'(t)$ τέτοια ώστε, η συνάρτηση $\dfrac{\Delta\bar{x}}{\Delta t} - \bar{x}'(t)$ να τείνει στο μηδέν όταν $\Delta t \to 0$, τότε θα λέμε ότι η $\bar{x}(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, b).

Η συνάρτηση $\bar{x}'(t)$ ονομάζεται **παράγωγος** της $\bar{x}(t)$ στο (α, b) και συμβολίζεται και με $\dfrac{d\bar{x}}{dt}$.

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{dx^1(t)}{dt}\bar{e}_1 + \ldots + \frac{dx^n(t)}{dt}\bar{e}_n = \frac{dx^i(t)}{dt}\bar{e}_i.$$

Με τη μέθοδο της αναγωγής, από την παράγωγο $\dfrac{d\bar{x}}{dt}$ ορίζονται οι παράγωγοι $\dfrac{d^2\bar{x}}{dt^2}, \dfrac{d^3\bar{x}}{dt^3}, \ldots, \dfrac{d^p\bar{x}}{dt^p}, \ldots$

Ορισμός 1.1.5. Θα λέμε,ότι η διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}(t)$ είναι τάξης C^k, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της μέχρι τάξης k κι αν η συνάρτηση $\dfrac{d^k\bar{x}}{dt^k}$ είναι συνεχής.

Είναι φανερό, ότι το να είναι η συνάρτηση $\bar{x}$ (t) τάξης C^k, είναι ισοδύναμο με το να είναι οι συντεταγμένες της συναρτήσεις τάξης C^k.

Ορισμός 1.1.6. Ας είναι $\bar{x}$ (t) συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b). Η διανυσματική συνάρτηση $d\bar{x}=\bar{x}'dt$ ονομάζεται διαφορικό της $\bar{x}$ (t). Ο ορισμός αυτός δικαιολογεί και τη γραφή $\bar{x}'=\dfrac{d\bar{x}}{dt}$.

Οι παραπάνω ορισμοί γενικεύουν ανάλογους ορισμούς των αριθμητικών συναρτήσεων.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

I. Αν $\bar{x}_i$ (t), i=1, 2, ..., k, είναι k διανυσματικές συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο (α, b), τότε και η συνάρτηση $\sum\limits_{i=1} \lambda_i \bar{x}_i(t)$, όπου λ_i είναι πραγματικοί αριθμοί, είναι παραγωγίσιμη στο (α, b) και

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{x}_i(t)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{d}{dt}\bar{x}_i(t).$$

II. Αν $\bar{x}$ (t) είναι διανυσματική συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, b) και α (t) μια αριθμητική συνάρτηση παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα, τότε και η συνάρτηση α (t) $\bar{x}$ (t) είναι παραγωγίσιμη στο (α, b) και

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t)\,\bar{x}(t)\big) = \frac{d\alpha}{dt}\bar{x}(t) + \alpha(t)\frac{d\bar{x}}{dt}.$$

III. Ας υποθέσουμε, ότι ο διανυσματικός χώρος E_n είναι Ευκλείδειος και ας συμβολίσουμε με $<\bar{x}(t), \bar{y}(t)>$ το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών συναρτήσεων $\bar{x}$ (t), $\bar{y}$ (t), που είναι ορισμένες στο διάστημα (a, b). Αν οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) τότε και η αριθμητική συνάρτηση $<\bar{x}(t), \bar{y}(t)>$ είναι παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα και

$$\frac{d}{dt}<\bar{x}(t), \bar{y}(t)> = <\frac{d\bar{x}(t)}{dt}, \bar{y}(t)> + <\bar{x}(t), \frac{d\bar{y}(t)}{dt}>.$$

Θα δείξουμε την ιδιότητα III. Η απόδειξη των ιδιοτήτων I και II ας γίνει σαν άσκηση.

Ας είναι $(\bar{e}_i)$ μια βάση του E_n. Τότε

$$\bar{x}(t) = x^i(t)\,\bar{e}_i, \quad \bar{y}(t) = y^i(t)\,\bar{e}_i$$

Συνεπώς

$$<\bar{x}(t), \bar{y}(t)> = g_{ij}\, x^i(t)\, y^j(t)$$

όπου τέθηκε $g_{ij} = <\bar{e}_i, \bar{e}_j>$. Τότε

$$\frac{d}{dt}<\bar{x}(t), \bar{y}(t)> = g_{ij}\frac{d}{dt}\left(x^i(t)\, y^j(t)\right) = g_{ij}\left(\frac{dx^i}{dt} y^j(t) + x^i(t)\frac{dy^j}{dt}\right) =$$

$$= g_{ij}\frac{dx^i}{dt} y^j(t) + g_{ij}\, x^i(t)\frac{dy^j}{dt} = <\frac{d\bar{x}(t)}{dt}, \bar{y}(t)> + <\bar{x}(t), \frac{d\bar{y}(t)}{dt}>.$$

§1.2. Διανυσματική συνάρτηση πολλών αριθμητικών μεταβλητών

Όπως και στη στοιχειώδη διανυσματική ανάλυση, ένα διάνυσμα $\bar{x}$ μπορεί να είναι συνάρτηση πολλών πραγματικών μεταβλητών t_α, $\alpha=1, 2, \ldots, k$. Η έννοια της μερικής παραγώγου μεταφέρεται και στην περίπτωση μιας τέτοιας διανυσματικής συνάρτησης. Κι εδώ ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t_\alpha\, \partial t_\beta} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t_\beta\, \partial t_\alpha},$$

αρκεί να υπάρχει συνέχεια των παραπάνω μερικών παραγώγων.

Ορισμός 1.2.1. Θα λέμε ότι το διάνυσμα $\bar{x}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ είναι τάξης C^p, αν οι συντεταγμένες του συναρτήσεις, ως προς κάποια βάση του χώρου, είναι συναρτήσεις τάξης C^p ως προς τις μεταβλητές t_α, μ' άλλα λόγια, αν έχουν μερικές παραγώγους συνεχείς ως προς το σύνολο των μεταβλητών t_α, μέχρι και την τάξη p.

Το διαφορικό αυτής της διανυσματικής συνάρτησης θα είναι

$$d\bar{x} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t_\alpha}\, dt_\alpha.$$

Αν $\bar{x}$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής u μέσω των ενδιαμέσων συναρτήσεων $t_1(u), t_2(u), \ldots, t_k(u)$, τότε

$$\frac{d\bar{x}}{du} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t_\alpha}\frac{dt_\alpha}{du}.$$

§1.3. Διάνυσμα παραγώγου ενός σημείου

Ας είναι A_n n-διάστατος αφινικός (ομοπαραλληλικός) χώρος. Αν σε κάθε σημείο t ενός διαστήματος (α, b) του R αντιστοιχίσουμε ένα σημείο M του A_n, ορίζουμε μια συνάρτηση, που τη συμβολίζουμε με M (t) και λέμε, ότι το σημείο M είναι συνάρτηση της μεταβλητής t στο διάστημα (α, b). Αν διαλέξουμε στο χώρο A_n μια αρχή O, το διάνυσμα $\bar{x}=\overline{OM}$ είναι συνάρτηση της μεταβλητής t. Ας υποθέσουμε ότι η διανυσματική συνάρτηση $\bar{x}$ (t) είναι παραγωγίσιμη. Ας είναι $\bar{x}'(t)$ η παράγωγός της. Είναι φανερό, ότι η συνάρτηση $\bar{x}'(t)$ δεν εξαρτάται από το σταθερό σημείο O, αλλά μόνο από το σημείο M. Πραγματικά αν O' είναι ένα άλλο αυθαίρετο σταθερό σημείο, τότε $\overline{OM} = \overline{OO'}+\overline{O'M}$ και επειδή το διάνυσμα $\overline{OO'}$ είναι σταθερό

$$\frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\overline{O'M}}{dt} = \bar{x}'.$$

Στο διάνυσμα $\bar{x}'$ δίνουμε το όνομα **διάνυσμα παραγώγου** του σημείου M και το παριστάνουμε με το σύμβολο $\overline{M}'$.

Ονομάζουμε **διαφορικό** του σημείου M το διάνυσμα $d\overline{M}=\overline{M}'dt$.

Έτσι μπορούμε να γράφουμε συμβολικά $\overline{M}'=\dfrac{d\overline{M}}{dt}$.

Ορισμός 1.3.1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση M (t) είναι τάξης C^k, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της μέχρι τάξης k και αν η συνάρτηση $\dfrac{d^k\overline{M}}{dt^k}$ είναι συνεχής.

Ένα σημείο M μπορεί να είναι συνάρτηση πολλών πραγματικών μεταβλητών t_α, $\alpha=1, 2, \dots, k$. Αν διαλέξουμε στο χώρο A_n μια αρχή O, τότε το διάνυσμα $\bar{x}=\overline{OM}$ είναι συνάρτηση των μεταβλητών t_α. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος της συνάρτησης $\bar{x}$ ως προς τη μεταβλητή t_α.

Ορισμός 1.3.2. Ονομάζουμε μερική παράγωγο του σημείου M ως προς τη μεταβλητή t_α τη διανυσματική συνάρτηση $\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial t_\alpha}$.

Η μερική παράγωγος του M ως προς t_α συμβολίζεται με $\dfrac{\partial\overline{M}}{\partial t_\alpha}$.

Δηλαδή

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t_\alpha}$$

Ορισμός 1.3.3. Θα λέμε ότι το σημείο M $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ είναι τάξης C^p, αν το διάνυσμα $\bar{x}$ $(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \overline{OM}$ $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ είναι τάξης C^p.

§1.4. Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Προσαρτημένο σύστημα αναφοράς

Στο εξής θ' ασχοληθούμε μ' ένα n-διάστατο αφινικό χώρο $\mathcal{E}_n$, που έχει αντίστοιχο διανυσματικό χώρο τον Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο E_n.

Ας αναφέρουμε το χώρο $\mathcal{E}_n$ σ' ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς (A), που ορίζεται από το ζεύγος $(O, \{\bar{e}_i\})$, όπου O είναι τυχαίο σημείο του $\mathcal{E}_n$ και $\{\bar{e}_i\}$ μια βάση του E_n. Μπορούμε να μιλούμε για ένα σύστημα n αξόνων του (A), που ορίζονται από τα διανύσματα $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\ldots$, $\bar{e}_n$. Το διάνυσμα $\bar{e}_i$ ορίζει έναν άξονα, που είναι ο μονοδιάστατος διανυσματικός υποχώρος του E_n, $\{\lambda \bar{e}_i\}$. Για κάθε σημείο $M \in \mathcal{E}_n$ έχουμε τις συντεταγμένες (x^i) $(i=1, 2, \ldots, n)$, που ορίζονται από τη σχέση $\overline{OM} = x^i\, \bar{e}_i$. Αντίστροφα, σε κάθε n-άδα πραγματικών αριθμών $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ αντιστοιχεί ένα σημείο M και μόνο ένα του χώρου $\mathcal{E}_n$, που ορίζεται από τη σχέση $\overline{OM} = x^i\, \bar{e}_i$. Αυτές τις συντεταγμένες, που ορίζονται ως προς το (A), τις ονομάζουμε **ευθύγραμμες** ή **καρτεσιανές** συντεταγμένες, τους δε άξονες για τους οποίους μιλήσαμε παραπάνω **ευθύγραμμους** ή **καρτεσιανούς** άξονες.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις n συναρτήσεις φ^i $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ των n μεταβλητών u^i, $i=1, 2, \ldots, n$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι τάξης C^k, όπου k είναι αρκετά μεγάλος αριθμός.

Θέτουμε

$$x^i = \varphi^i\,(u^1, u^2, \ldots, u^n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1.4.1}$$

Υποθέτουμε, ότι οι συναρτήσεις φ^i είναι ανεξάρτητες, έτσι ώστε όταν οι μεταβλητές u^i μεταβάλλονται σ' ένα πεδίο τιμών Δ', το σύστημα (1.4.1) να μπορεί να λυθεί ως προς u^i και ν' αποκτήσουμε τις

$$u^i = g^i\,(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1.4.2}$$

Το σημείο M με συντεταγμένες (x^i) μεταβάλλεται σ' ένα ορισμένο πεδίο Δ του $\mathcal{E}_n$ κι αφού οι συναρτήσεις φ^i είναι ανεξάρτητες, η συναρτησιακή ορίζουσα

$$(1.4.3) \qquad \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{D(u^1, u^2, \ldots, u^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial u^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^n} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial u^n} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial u^n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Το ίδιο θα ισχύει και για την αντίστροφη της παραπάνω ορίζουσας την $\frac{D(u^1, u^2, \ldots, u^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}$.

Υπάρχει επομένως μια αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων M του Δ και των συστημάτων των μεταβλητών (u^i), που ανήκουν στο πεδίο Δ'. Αν οι συναρτήσεις φ^i δεν είναι γραμμικές, δεν είναι δυνατό να θεωρησουμε τις u^i σαν ένα σύστημα ευθύγραμμων συντεταγμένων. Το σημείο M είναι στην περίπτωση αυτή συνάρτηση, τάξης C^k, των n αριθμητικών μεταβλητών (u^i). Θα λέμε τότε, ότι ο χώρος $\mathcal{E}_n$ αναφέρεται στο πεδίο Δ **στο σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων** u^i.

Ορισμός 1.4.1. Ονομάζουμε **συντεταγμένες καμπύλες** τις καμπύλες, που είναι γεωμετρικοί τόποι των σημείων M του $\mathcal{E}_n$, για τα οποία μόνο μία από τις μεταβλητές (u^i) μεταβάλλεται, ενώ οι άλλες παραμένουν σταθερές.

Στην περίπτωση καρτεσιανών συντεταγμένων οι καμπύλες αυτές είναι ευθείες, δηλαδή οι ευθύγραμμοι άξονες.

Ας είναι (u^i) σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων του $\mathcal{E}_n$ και $M \in \mathcal{E}_n$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$(1.4.4) \qquad \bar{e}_i = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^i} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Η ορίζουσα του συστήματος (1.4.4) ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς (A) είναι η (1.4.3), που είναι διάφορη του μηδενός. Επομένως τα διανύσματα $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.4.2. Ονομάζουμε φυσικό σύστημα αναφοράς του συστήματος (u^i) στο M, το σύστημα αναφοράς, που έχει αρχή το M και διανύσματα αυτά, που δίνονται από τις σχέσεις (1.4.4).

Τα n διανύσματα $\bar{e}_i$ είναι συγγραμικά με τις εφαπτόμενες των n συντεταγμένων καμπύλων, οι οποίες περνούν από το σημείο M. Σύμφωνα με τις (1.4.4) το διάνυσμα $d\bar{M}$ δίνεται από τη σχέση :

$$(1.4.5) \qquad d\bar{M} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^i}\, du^i = \bar{e}_i\, du^i$$

Δηλαδή οι n ποσότητες du^i είναι οι αντιαλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος $d\bar{M}$, ως προς το φυσικό σύστημα αναφοράς του συστήματος (u^i) στο σημείο M.

Θα λέμε, ότι πραγματοποιούμε μια αλλαγή καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές (u^i) μ' ένα καινούργιο σύστημα μεταβλητών $(u^{j'})$, που να συνδέεται με τις (u^i) με τους τύπους :

$$(1.4.6) \qquad u^{j'} = u^{j'}(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'})$$

όπου $u^{j'}$ είναι συναρτήσεις τάξης C^k των (u^i), k αρκετά μεγάλος αριθμός και $\dfrac{D(u^1, u^2, \ldots, u^n)}{D(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'})} \neq 0$.

Όταν πραγματοποιούμε μια τέτοια αλλαγή στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, τότε αντί του φυσικού συστήματος αναφοράς $(M, \bar{e}_i)$ του συστήματος (u^i) έχουμε ένα καινούργιο φυσικό σύστημα αναφοράς $(M, \bar{e}_{j'})$ του συστήματος $(u^{j'})$, όπου $\bar{e}_{j'} = \dfrac{\partial \bar{M}}{\partial u^{j'}}$.

Επομένως

$$\bar{e}_{j'} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^{j'}} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}} = \bar{e}_k \frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}.$$

Δηλαδή

$$\bar{e}_{j'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}\, \bar{e}_k \quad (\text{άθροιση ως προς } k).$$

Αντίστροφα βρίσκουμε

$$\bar{e}_k = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^k}\, \bar{e}_{j'} \quad (\text{άθροιση ως προς } j').$$

Έχουμε επομένως αντικαταστήσει τη βάση $(\bar{e}_i)$ του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου, που αντιστοιχεί στον $\mathcal{E}_n$, με τη βάση $(\bar{e}_{j'})$, που προκύπτει από τους γραμμικούς μετασχηματισμούς :

$$(1.4.7) \qquad \bar{e}_k = A_k^{j'}\, \bar{e}_{j'}, \quad \bar{e}_{j'} = A_{j'}^k\, \bar{e}_k$$

όπου

$$A_{k}^{j'} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^{k}}, \quad A_{j'}^{k} = \frac{\partial u^{k}}{\partial u^{j'}}. \tag{1.4.8}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα :

Θεώρημα 1.4.1. Σε κάθε αλλαγή του συστήματος των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στον $\mathcal{E}_n$, που δίνεται από τις σχέσεις (1.4.6), αντιστοιχεί η αλλαγή του φυσικού συστήματος αναφοράς στο σημείο $M \in \mathcal{E}_n$, που ορίζεται από τους τύπους (1.4.7) και (1.4.8).

Σημείωση. Η ουσιαστική διαφορά ανάμεσα σ' ένα σύστημα ευθύγραμμων συντεταγμένων και σ' ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων είναι, ότι το φυσικό σύστημα αναφοράς στο τελευταίο είναι συνάρτηση της θέσης, ενώ στο πρώτο είναι σταθερό.

§1.5. Παράδειγμα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων

Ας πάρουμε την περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}_3$ της συνηθισμένης Γεωμετρίας και μέσα σ' αυτόν ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς OXYZ. Τό σύστημα των πολικών συντεταγμένων είναι ένα παράδειγμα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

Το σύστημα αυτό ορίζεται από τις σχέσεις :

$$x = r\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\psi, \quad y = r\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\psi, \quad z = r\,\sigma\upsilon\nu\theta. \tag{1.5.1}$$

Συνεπώς

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \psi, \theta)} = -r^2\,\eta\mu\theta.$$

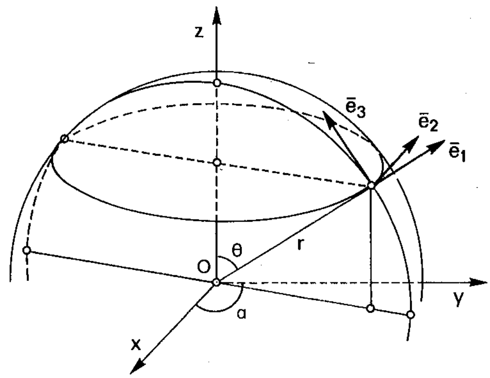
Επομένως, αν οι μεταβλητές r, ψ, θ μεταβάλλονται στο πεδίο $\Delta' = \mathcal{E}^3 - \{(0, \psi, 0)\}$, τότε το σύστημα των μεταβλητών αυτών ορίζει ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στον $\mathcal{E}_3$.

Ας γράψουμε $u^1=r$, $u^2=\psi$, $u^3=\theta$ και ας είναι M τυχαίο σημείο του $\mathcal{E}_3$. Αν στις (1.5.1) θέσουμε $u^2=\alpha$, $u^3=\beta$, όπου α, β είναι σταθερές, βρίσκουμε :

$$x = r\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta, \quad y = r\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta, \quad z = r\,\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Δηλαδή η πρώτη συντεταγμένη καμπύλη είναι η διανυσματική ακτίνα $\overline{OM}$.

Όμοια βρίσκουμε, ότι η δεύτερη συντεταγμένη καμπύλη είναι η περιφέρεια κύκλου, που περνά από το Μ, έχει κέντρο το σημείο τομής του επιπέδου του καθέτου από το Μ στον άξονα ΟΖ με τον ΟΖ και ακτίνα rημθ. Τέλος η τρίτη συντεταγμένη καμπύλη στο Μ είναι ο μεσημβρινός κύκλος, που περνά από το Μ, έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r. (Βλέπε σχήμα).



Τα διανύσματα του φυσικού συστήματος αναφοράς στο σημείο Μ θα είναι τα

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^2} \quad \text{και} \quad \bar{e}_3 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u^3}.$$

Συνεπώς

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial r} = (\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\psi,\ \eta\mu\theta\ \eta\mu\psi,\ \sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial \psi} = (-r\ \eta\mu\theta\ \eta\mu\psi,\ r\ \eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\psi,\ 0)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} = (r\ \sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu\psi,\ r\ \sigma\upsilon\nu\theta\ \eta\mu\psi,\ -r\ \eta\mu\theta).$$

§1.6. Τανυστικά πεδία

Είναι γνωστό ότι στο σημειακό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{E}_n$ είναι προσαρτημένος ένας Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος E_n. Κάθε σύστημα αναφοράς του $\mathcal{E}_n$ ορίζει μια βάση του E_n και επομένως και βάσεις για τις διάφορες τανυστικές δυνάμεις του E_n. Για συντομία θα λέμε, ότι οι συνιστώσες ενός Ευκλείδειου τανυστή ως προς μια τέτοια βάση είναι οι συνιστώσες του ως προς το αντίστοιχο σύστημα αναφοράς του $\mathcal{E}_n$.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι σε κάθε σημείο M του $\mathcal{E}_n$ αντιστοιχούμε ένα Ευκλείδειο τανυστή τάξης p, που ορίζεται από τις συνιστώσες του ως προς το φυσικό σύστημα αναφοράς του συστήματος (u^i) στο σημείο M. Θα λέμε τότε, ότι μας έχει δοθεί ένα **πεδίο τανυστών** τάξης p στο σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u^i).

Έχουμε δει, ότι σε κάθε αλλαγή των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων αντιστοιχεί μια αλλαγή του φυσικού συστήματος αναφοράς στο M, που ορίζεται από τους τύπους (1.4.7) και (1.4.8). Επομένως, ένα σύνολο από n^{p+q} συναρτήσεις $t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ των μεταβλητών (u^i) θα είναι οι συνιστώσες τύπου $\binom{p}{q}$ ενός τανυστικού πεδίου τάξης p+q ακριβώς τότε, όταν αυτές μετασχηματίζονται σε μια αλλαγή των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων σύμφωνα με τους τύπους :

$$t^{r_1' r_2' \dots r_p'}_{m_1' m_2' \dots m_q'} = A^{r_1'}_{i_1} A^{r_2'}_{i_2} \dots A^{r_p'}_{i_p} A^{j_1}_{m_1'} A^{j_2}_{m_2'} \dots A^{j_q}_{m_q'} t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \tag{1.6.1}$$

όπου οι συναρτήσεις $A_{m'}^{i}$ ορίζονται από τους τύπους (1.4.8).

Ένα παράδειγμα τανυστικού πεδίου μας δίνουν οι ποσότητες g_{ij}, που ορίζονται σε κάθε σημείο $M \in \mathcal{E}_n$ από τα γινόμενα $<\bar{e}_i, \bar{e}_j>$. Πραγματικά ας είναι $(u^{k'})$ ένα νέο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στον $\mathcal{E}_n$. Τότε στο σημείο M οι ποσότητες g_{ij} θα μετασχηματισθούν στις ποσότητες $g_{k's'} = <\bar{e}_{k'}, \bar{e}_{s'}>$. Ή λόγω των (1.4.7) και (1.4.8),

$$g_{k's'} = <A_{k'}^{i} \bar{e}_i, A_{s'}^{j} \bar{e}_j> = A_{k'}^{i} A_{s'}^{j} <\bar{e}_i, \bar{e}_j> = A_{k'}^{i} A_{s'}^{j} g_{ij} .$$

Δηλαδή οι ποσότητες g_{ij} είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες ενός τανυστικού πεδίου δεύτερης τάξης. Το πεδίο αυτό ονομάζεται **θεμελιώδης τανυστής** του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}_n$.

§1.7. Το γραμμικό στοιχείο του χώρου

Ας υποθέσουμε ότι ο σημειακός Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}_n$ αναφέρεται σ' ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u^i). Αν $M \in \mathcal{E}_n$, τότε σύμφωνα με την (1.4.5) το διάνυσμα $d\overline{M}$ έχει ανταλλοίωτες συνιστώσες ως προς το φυσικό σύστημα αναφοράς στο M, $du^1, du^2, \dots, du^n$.

Επομένως

$$(d\bar{M})^2 = <d\bar{M}, d\bar{M}> = <\bar{e}_i\, du^i, \bar{e}_j\, du^j> = du^i\, du^j <\bar{e}_i, \bar{e}_j>.$$

Δηλαδή

$$(d\bar{M})^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j.$$

Συνεπώς το τετράγωνο της απόστασης δύο απείρως γειτονικών σημείων του $\mathcal{E}_n$ δίνεται από τον τύπο

$$(1.7.1) \qquad ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j, \text{ όπου } g_{ij} = <\bar{e}_i, \bar{e}_j>.$$

Όταν το σημείο M μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και το φυσικό σύστημα αναφοράς $(M, \bar{e}_i)$. Επομένως και τα εσωτερικά γινόμενα g_{ij} είναι συναρτήσεις των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u^i).

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων με σύστημα αναφοράς τις πολικές συντεταγμένες, τότε τα εσωτερικά γινόμενα g_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ θα είναι :

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2 \eta\mu^2\theta, \quad g_{33} = r^2, \quad g_{ij} = 0 \text{ όταν } i \neq j.$$

Επομένως

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2\eta\mu^2\theta\, (d\psi)^2 + r^2\, (d\theta)^2.$$

Ορισμός 1.7.1. Ονομάζουμε **γραμμικό στοιχείο** ή **μετρική** του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}_n$, που αναφέρεται στο σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u^i), την τετραγωνική μορφή $g_{ij}\, du^i\, du^j$.

Αν ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}_n$ είναι γνήσιος, τότε η μετρική του θα είναι θετικά ορισμένη. Δηλαδή $ds^2 \geq 0$ για όλες τις πραγματικές τιμές των $du^1, du^2, \ldots, du^n$, ενώ $ds^2=0$ ακριβώς τότε, όταν $du^1=du^2= \ldots =du^n = 0$. Αν ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}_n$ δεν είναι γνήσιος, τότε η τετραγωνική μορφή $g_{ij}\, du^i\, du^j$ δεν είναι θετικά ορισμένη. Αυτό σημαίνει, ότι το τετράγωνο της απόστασης δύο γειτονικών σημείων είναι δυνατό να είναι αρνητικός αριθμός. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον τετραδιάστατο χώρο E_4, που μελετά η Ειδική θεωρία της Σχετικότητας, του οποίου η μετρική είναι

$$(1.7.2) \qquad ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2\, (dx^4)^2$$

όπου c είναι σταθερά.

Η μετρική αυτή είναι θετική για όλες τις καμπύλες κατά μήκος των