Ε.-Α. Ηλιοπούλου Δ. Δημητροπούλου - Ψωμοπούλου

αλγεβρικός τανυστικός λογισμός

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εξέλιξη των μαθηματικών και η ανάπτυξή τους οφείλεται σε πολλούς παράγοντες. Σε πολλές περιπτώσεις μια ατυχής εκλογή συμβόλων επιβράδυνε μια θεωρία, ενώ άλλες φορές η επιτυχής εκλογή τους συνέβαλε στη θεαματική ανάπτυξη κάποιας θεωρίας. Ο τανυστικός λογισμός αποδείχτηκε μια απ' τις πιο αποτελεσματικές τεχνικές στην οργάνωση, ταξινόμηση και διατύπωση μεγάλου αριθμού θεωριών με τη βοήθεια όσο το δυνατόν λιγότερων εννοιών και συμβόλων. Για τους Μαθηματικούς, ο τανυστικός λογισμός αποτελεί μια βαθύτερη μελέτη της θεωρίας των διανυσματικών χώρων. Για τον Φυσικό έγινε ένα εργαλείο απαραίτητο σε πολλές θεωρίες, όπως ελαστικότητα, σχετικότητα, ηλεκτρομαγνητισμός κλπ. Η πρώτη συστηματική εμφάνιση του τανυστικού λογισμού έγινε το 1900, όταν οι Levi-Civita και Ricci ανέπτυξαν την έννοια της παράλληλης μεταφοράς χρησιμοποιόντας την κλασσική γλώσσα των τανυστών. Η εμφάνιση της θεωρίας της σχετικότητας του Einstein, που δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς την προηγούμενη ύπαρξη του τανυστικού λογισμού, του έδωσε με τη σειρά του μια τεράστια ώθηση. Σήμερα, ο τανυστικός λογισμός αποτελεί μια απ' τις βασικότερες τεχνικές της μοντέρνας Θεωρητικής Φυσικής. Εξάλλου, με τις εφαρμογές του στη Γεωμετρία, όχι μόνον απλοποίησε ουσιαστικά γνωστά θεωρήματα της Διαφορικής Γεωμετρίας, αλλά ακόμη, έδωσε τη δυνατότητα γενίκευσης πολλών θεωρημάτων σε χώρους μεγαλύτερης διάστασης και τελικά οδήγησε στη δημιουργία νέων γεωμετριών και νέων χώρων. Μπορεί λοιπόν να πει κανείς, ότι ο τανυστικός λογισμός αποτελεί θεμελιώδες τμήμα τόσο των Μαθηματικών, όσο και της Φυσικής.

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στον αλγεβρικό τανυστικό λογισμό και περιέχει την ύλη που διδάσκεται στο μάθημα επιλογής «Τανυστικός Λογισμός» του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Το πρώτο κεφάλαιο αφιερώνεται αποκλειστικά στους συμβολισμούς που μεταχειριζόμαστε και δίνεται μια σύντομη εφαρμογή τους στις ορίζουσες. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζονται οι τανυστές πρώτης τάξης. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του τανυστικού γινομένου. Στο τέταρτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται η θεωρία πάνω στους τανυστές ανώτερης τάξης. Τέλος, το πέμπτο κεφάλαιο μελετά την εξωτερική άλγεβρα των τανυστών. Τα κεφάλαια αυτά συμπληρώνονται με απλές εφαρμογές και παραδείγματα απ' την Φυσική και τη Γεωμετρία, καθώς επίσης και με απλές ασκήσεις για τον αναγνώστη.

Τον επιστημονικό συνεργάτη του τμήματος Μαθηματικών Δημήτρη Χριστοφακόπουλο, ευχαριστούμε θερμά για τις παρατηρήσεις του στη διόρθωση των τυπογραφικών. Ακόμη, ευχαριστούμε το τυπογραφείο Π. Ζήτη για την προσεγμένη εκτύπωση και εμφάνιση.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 1984

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΤΕΛΕΙΩΣ ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I
ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1. Εισαγωγή

Ο τανυστικός λογισμός ενδιαφέρεται, πρώτα απ' όλα, για τον τρόπο που μετασχηματίζονται σε μια αλλαγή βάσης, οι συνιστώσες των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου και γενικότερα ενός «γινομένου διανυσματικών χώρων» όπως ακριβέστερα θα οριστεί σε επόμενα κεφάλαια. Ο βαθύτερος σκοπός αυτής της συστηματικής μελέτης είναι η εξακρίβωση μιας «εσωτερικής φυσικής ιδιότητας» (intrinséque) αυτών των μετασχηματισμών. Η παραπάνω έκφραση σημαίνει ότι οι σχέσεις είναι ανεξάρτητες του συστήματος συνεταγμένων που μεταχειριζόμαστε για να τις εκφράσουμε, έτσι ώστε τα στοιχεία αυτά να μπορούν να παραστήσουν ένα φυσικό μέγεθος.

Οι τύποι αλλαγής βάσεων, ήδη δύσχρηστοι για ένα απλό διανυσματικό χώρο, γίνονται ακόμα πολυπλοκότεροι για το γινόμενο διανυσματικών χώρων που εισάγεται παρακάτω. Έτσι ήταν πρακτικά αναπόφευκτες, ορισμένες συμπυκνώσεις στον τρόπο γραφής τους, συμβολισμοί δηλαδή, έτσι ώστε να γίνουν εύχρηστοι.

1.2. Συμβολισμοί

Στη διδιάστατη αναλυτική γεωμετρία συμβολίζουμε, συνήθως, τις συντεταγμένες ενός σημείου με (x, y), στην τριδιάστατη γεωμετρία με (x, y, z). Στον n-διάστατο χώρο δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιούμε διάφορα γράμματα για να παραστήσουμε τις διάφορες συντεταγμένες. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε ένα μοναδικό γράμμα εφοδιασμένο με ένα κάτω δείκτη που διατρέχει όλες τις τιμές από 1 μέχρι n. Δηλαδή γράφουμε, (1.2.1) $$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n$$

ή πιο σύντομα,

(1.2.2) $$x_k\,,\quad k = 1,\ 2,\ldots,\ n\,.$$

Για λόγους που θα φανούν αργότερα, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό,

(1.2.3) $$x^k\,,\quad k = 1,\ 2,\ldots,\ n\,,$$

δηλαδή ο δείκτης θα γράφεται στην άνω θέση.

Παρατήρηση 1.2.1. Για να μην γίνεται σύγχυση, όταν πρόκειται για δυνάμεις, θα χρησιμοποιούμε παρενθέσεις, δηλαδή

(1.2.4) $$(\alpha)^p$$

εκφράζει την p-οστή δύναμη του α.

Όπως μπορεί να συμπεράνει κανείς απ' την εισαγωγή, σε πολλές περιπτώσεις θα είμαστε αναγκασμένοι την ίδια στιγμή να χρησιμοποιούμε δύο ή περισσότερα συστήματα συντεταγμένων. Θα πρέπει επομένως, να συμφωνήσουμε πως θα συμβολίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου σ' αυτή την περίπτωση. Υπάρχουν πολλές δυνατότητες για να εκφράσει κανείς τις συντεταγμένες ενός σημείου στα διάφορα συστήματα. Έτσι, αν αλλάξουμε το γράμμα x στη σχέση (1.2.3), τότε

(1.2.5) $$y^k \quad ή \quad z^k\,,\quad k = 1,\ 2,\ldots,\ n$$

παριστά τις συντεταγμένες σ' άλλο σύστημα. Όμως, ένας άλλος πιο βολικός τρόπος είναι να εφοδιάσουμε τον δείκτη k της σχέσης (1.2.3) μ' ένα τόνο, δηλαδή

(1.2.6) $$x^{k'}\,,\quad k = 1,\ 2,\ldots,\ n\,.$$

Στα επομένα κεφάλαια, θα συμβολίζουμε την αλλαγή συντεταγμένων με τον παραπάνω τρόπο.

1.3. Συμβολισμός του Einstein

Στον τανυστικό λογισμό συχνά χρησιμοποιούμε αθροίσματα γινομένων. Είναι, όμως, εξαιρετικά πολύπλοκο το να γράψουμε όλα τα αθροιστικά σύμβολα με τους αθροιστικούς τους δείκτες. Για την απλούστευση της γραφής τους υιοθετούμε τον συμβολισμό του Einstein, που διατυπώνεται με τον παρακάτω τρόπο:

«Αν σ' ένα μονώνυμο εμφανίζεται ο ίδιος δείκτης δυο φορές, σ' ένα παράγοντα στην άνω θέση και σ' άλλον παράγοντα στην κάτω θέση, τότε έχουμε άθροιση ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη».

Παράδειγμα 1.3.1. Ας υποθέσουμε ότι δίνεται το άθροισμα,

(1.3.1) $$\alpha^1 b_1 + \alpha^2 b_2 + \cdots + \alpha^n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i b_i .$$

Είναι ένα άθροισμα γινομένων δυο παραγόντων. Απ' αυτούς, ο πρώτος εξαρτάται από ένα άνω δείκτη i, που παίρνει όλες τις τιμές από 1 μέχρι n και ο άλλος από ένα όμοιο αλλά κάτω δείκτη. Το άθροισμα αυτό, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Einstein, γράφεται

(1.3.2) $$\alpha^i b_i ,$$

δηλαδή παραλείπεται το σύμβολο της άθροισης Σ.

Επομένως, κάθε φορά που θα χρησιμοποιούμε εκφράσεις της μορφής (1.3.2) θα ξέρουμε ότι πρόκειται για άθροισμα γινομένων (πολυώνυμο) και όχι για απλό γινόμενο δυο παραγόντων (μονώνυμο).

Όμοια, ένα άθροισμα γινομένων,

(1.3.3) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b^i c^j$$

γράφεται,

(1.3.4) $$\alpha_{ij} b^i c^j .$$

Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες λέγονται **βωβοί δείκτες** γιατί σαν δείκτες αθροιστικοί δεν παίζουν κανένα ρόλο, μια και το γράμμα που τους παριστά μπορεί ν' αντικατασταθεί οποτεδήποτε από άλλο. Έτσι θα έχουμε,

(1.3.5) $$\alpha_i b^i = \alpha_j b^j = \alpha_k b^k .$$

Όμοια,

(1.3.6) $$\alpha_{ijk} b^{ij} c^k = \alpha_{\rho\sigma\tau} b^{\rho\sigma} c^\tau .$$

Τα μονώνυμα (1.3.2), (1.3.4), (1.3.6) λέγονται **ψευδή μονώνυμα**, γιατί στην πραγματικότητα είναι πολυώνυμα με n όρους όταν έχουν ένα βωβό δείκτη, n^2 όρους όταν έχουν δυο βωβούς δείκτες κλπ.

Οι δείκτες που δεν είναι θωβοί λέγονται **ελεύθεροι δείκτες** και συνεπώς δεν μπορεί ν' αλλάζει η ονομασία τους.

Παράδειγμα 1.3.2. Στο σύμβολο,

$$\alpha^{ij}\, b_i \tag{1.3.7}$$

ο δείκτης i είναι θωβός ενώ ο j είναι ελεύθερος δείκτης. Επομένως η σχέση (1.3.7) μπορεί να γραφεί,

$$\alpha^{kj}\, b_k \quad \text{ή} \quad \alpha^{\rho j}\, b_\rho \quad \text{κλπ.} \tag{1.3.8}$$

Παρατήρηση 1.3.1. α) Αν θέλουμε να παραστήσουμε ένα ψευδές μονώνυμο που έχει ελεύθερους δείκτες μ' ένα μόνο γράμμα, το εφοδιάζουμε με τους ίδιους ελεύθερους δείκτες που έχει το μονώνυμο. Έτσι,

$$\alpha_j^{\,i}\, x^j = q^i\,, \quad b_j^{\,i}\, y^j\, z^k = q^{ik} \quad \text{κλπ.} \tag{1.3.9}$$

β) Ποτέ δεν επαναλαμβάνουμε σ' ένα ψευδές μονώνυμο κάποιον απ' τους θωβούς δείκτες. Επομένως, το σύμβολο

$$\alpha_j^{\,i}\, b_i\, x^i\,, \tag{1.3.10}$$

δεν έχει κανένα νόημα, εν αντιθέσει προς τα

$$\alpha_j^{\,h}\, b_h\, x^i \quad \text{και} \quad \alpha_j^{\,i}\, b_h\, x^h\,, \tag{1.3.11}$$

ενώ το σύμβολο

$$\alpha_{ii}\, x^i\, x^i \tag{1.3.12}$$

σημαίνει μια φορά μόνον άθροιση ως προς i δηλαδή,

$$\alpha_{11}\,(x^1)^2 + \alpha_{22}\,(x^2)^2 + \dots + \alpha_{nn}\,(x^n)^2. \tag{1.3.13}$$

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω ότι δίνεται το άθροισμα,

$$\begin{aligned} & k^{11}\,(x_1)^2 + k^{12}\, x_1\, x_2 + k^{13}\, x_1\, x_3 + \\ & + k^{21}\, x_2 x_1 + k^{22}\,(x_2)^2 + k^{23}\, x_2\, x_3 + \\ & + k^{31}\, x_3\, x_1 + k^{32}\, x_3\, x_2 + k^{33}\,(x_3)^2. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Χρησιμοποιόντας τον συμβολισμό του Einstein, γράφεται

$$k^{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.3.15}$$

Παράδειγμα 1.3.4. Το σύστημα,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \alpha_{13} x^3, \\
(1.3.16) \qquad y_2 &= \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \alpha_{23} x^3, \\
y_3 &= \alpha_{31} x^1 + \alpha_{32} x^2 + \alpha_{33} x^3,
\end{aligned}
$$

σύντομα γράφεται,

$$(1.3.17) \qquad y_i = \alpha_{ij} x^j , \quad i, j = 1, 2, 3.$$

1.4. Πράξεις στα ψευδή μονώνυμα

Η σπουδαιότητα του συμβολισμού του Einstein φαίνεται στις πράξεις που πραγματοποιούνται στα ψευδή μονώνυμα. Σ' αυτές συμπεριφέρονται όπως ακριβώς τα πραγματικά μονώνυμα.

i) Η πρόσθεση, για λόγους που θα δούμε παρακάτω, θεωρούμε ότι γίνεται σε ψευδή μονώνυμα που έχουν τον ίδιο ή τους ίδιους ελεύθερους δείκτες στην ίδια θέση. Δηλαδή, αν

$$(1.4.1) \qquad p^i = \alpha_j^{\ i} x^j \quad \text{και} \quad q^i = b_j^{\ i} c_k^{\ j} y^k ,$$

τότε εξ ορισμού,

$$(1.4.2) \qquad s^i = p^i + q^i .$$

Είναι φανερό ότι η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική, όπως συμβαίνει με τα πραγματικά μονώνυμα.

ii) Ο πολλαπλασιασμός γίνεται σε δυο τυχόντα ψευδή μονώνυμα, με τον μοναδικό περιορισμό, όταν γράφεται το γινόμενο των αντίστοιχων πραγματικών μονώνυμων, να μην παραβαίνουμε τον κανόνα β) της παρατήρησης (1.3.1), δηλαδή να μην επαναλαμβάνουμε θωβούς δείκτες. Έτσι, αν

$$(1.4.3) \qquad p^i = \alpha_h^{\ i} x^h \quad \text{και} \quad q_{jk} = b_{jh} y_k^{\ h} = b_{jr} y_k^{\ r},$$

τότε εξ ορισμού,

$$(1.4.4) \qquad p^i q_{jk} = \alpha_h^{\ i} x^h b_{jr} y_k^{\ r}.$$

Η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.

Παράδειγμα 1.4.1. Ας εξετάσουμε την ισότητα,

$$(1.4.5) \qquad g_{ij} x^i x^j + h_{rs} x^r x^s = (g_{ij} + h_{ij}) x^i x^j , \quad i, j, r, s = 1, 2, \ldots, n.$$

α) Σε κανένα μέλος της σχέσης (1.4.5) δεν υπάρχει ελεύθερος δείκτης.

β) Στον όρο $h_{rs} x^r x^s$ του πρώτου μέλους, οι δείκτες r και s είναι θωβοί. Επομένως μπορούμε να θέσουμε όπου r τον i και όπου s τον j, δηλαδή,

$$h_{rs} x^r x^s = h_{ij} x^i x^j .$$

Επομένως το πρώτο μέλος της (1.4.5) γίνεται,

$$g_{ij} x^i x^j + h_{ij} x^i x^j ,$$

που προφανώς ισούται με το δεύτερο μέλος της (1.4.5).

1.5. Ασκήσεις

1.5.1. Να εξεταστεί αν ισχύουν οι ισότητες:

α) $\alpha_{ij} x^i + b_{rs} x^s = (\alpha_{ij} + b_{ij}) x^i$, $\quad i, j, r, s = 1, 2, \ldots, n$,

b) $\alpha_{ij} b^{jk} c_{kh} = \alpha_{ir} b^{rs} c_{sh}$, $\quad i, j, k, h, r, s = 1, 2, \ldots, n$,

c) $(\alpha^i b_i)^2 (c^i d_i)^2 = (\alpha^i c^i)^2 (b_i d_i)^2$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$.

1.5.2. Να δειχθεί η ισότητα:

$$(2\alpha_{ijh} - \alpha_{hij}) x^i x^j = (\alpha_{ijh} + \alpha_{jih} - \alpha_{hij}) x^i x^j .$$

1.5.3. Αν $\alpha_{ij} x^i x^j = 0$ για όλες τις τιμές $x^1, x^2, \ldots, x^n$, τότε να δειχθεί ότι: $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$.

1.5.4. Αν $\alpha_{ij} x^i x^j = b_{ij} x^i x^j$ για όλες τις τιμές των $x^1, x^2, \ldots, x^n$, τότε να δειχθεί ότι: $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$.

1.6. Το σύμβολο δ

Πολύ συχνά θα χρησιμοποιούμε αυτό που λέμε **«δέλτα του** Kronecker». Είναι το σύμβολο δ^i_j που εξαρτάται απ' τους δείκτες i και j με τιμές από 1 μέχρι n και ορίζεται απ' τις σχέσεις:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ όταν } i = j \\ 0 \text{ όταν } i \neq j. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Επομένως είναι.

$$\begin{aligned} &\delta_1{}^1 = \delta_2{}^2 = \cdots = \delta_n{}^n = 1, \\ (1.6.2) \qquad &\delta_2{}^1 = \delta_3{}^2 = \cdots = \delta^r_{r+1} = 0, \\ &\delta_\alpha{}^\alpha = \delta_1{}^1 + \delta_2{}^2 + \cdots + \delta_n{}^n = n. \end{aligned}$$

Για το δέλτα του Kronecker μεταχειριζόμαστε και τα σύμβολα δ_{ij} και δ^{ij}. Ορίζονται όμοια απ' τις σχέσεις,

$$(1.6.3) \qquad \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{όταν } i = j \\ 0 & \text{όταν } i \neq j \end{cases}.$$

Παρατήρηση 1.6.1. Έστω

$$(1.6.4) \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Είναι φανερό ότι το γενικό του στοιχείο είναι το δ_j^i, δηλαδή

$$(1.6.5) \qquad I_n = (\delta_j^i).$$

Παράδειγμα 1.6.1. Έστω ότι δίνεται το μονώνυμο,

$$(1.6.6) \qquad \delta_j^i\, \alpha^j.$$

Στην πραγματικότητα είναι,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \delta_j^i\, \alpha^j &= \delta_1{}^i\, \alpha^1 + \delta_2{}^i\, \alpha^2 + \dots + \delta_i{}^i\, \alpha^i + \dots + \delta_n{}^i\, \alpha^n = \\ &= 0\, \alpha^1 + 0\, \alpha^2 + \dots + 1\alpha^i + \dots + 0\, \alpha^n, \end{aligned}$$

άρα,

$$(1.6.7) \qquad \delta_j^i\, \alpha^j = \alpha^i .$$

1.7. Ασκήσεις

1.7.1. Αν x^i είναι πραγματικός αριθμός, να λυθεί η εξίσωση:

$$\delta_{ij}\, x^i\, x^j\, x^k = \delta_{ik}\, x^i\, x^k\, x^j .$$

1.7.2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα,

α) $\delta_{ij}\, \alpha^i \alpha^j$, $i, j = 1, 2,\dots, n$,

b) $\delta_i^{\,j}\, b_{jk}$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$,

c) $\delta_i^{\,j}\, \delta_k^{\,\lambda}\, \alpha_{j\lambda}$, $i, j, \kappa, \lambda = 1, 2,\dots, n$.

1.7.3. Όμοια τα αθροίσματα,

α) $\delta^{ij}\, \alpha_{jk}\, b^{kh}$, $i, j, k, h = 1, 2,\dots, n$,

b) $\delta_j^{\,i}\, \delta_k^{\,j}\, \alpha^k\, b_h$, $i, j, k, \ = 1, 2,\dots, n$,

c) $\delta_j^{\,i}\, \delta_k^{\,j}$, $i,j, k = 1, 2,\dots, n$,

d) $\delta_j^{\,i}\, \delta_i^{\,j}$, $i, j = 1, 2,\dots,n$,

e) $\delta^{ij}\, \alpha_{ij}$, $i, j = 1, 2,\dots, n$,

f) $\delta_{ij}\, \alpha^{jk}\, b^i$, $i, j, k = 1, 2,\dots, n$.

1.8. Το γενικευμένο σύμβολο δ και το σύμβολο ε

Ένα ακόμη σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε συχνά είναι το γενικευμένο δέλτα του Kronecker $\delta^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$, που λέγεται **«σύμβολο του Kronecker»** και ορίζεται ως εξής:

i) Οι k σε πλήθος άνω και κάτω δείκτες παίρνουν οποιαδήποτε τιμή από 1 μέχρι n.

ii) Αν τουλάχιστον δυο άνω ή κάτω δείκτες έχουν την ίδια τιμή, ή αν οι κάτω δείκτες είναι διαφορετικό σύνολο αριθμών απ' ότι οι άνω δείκτες, τότε η τιμή του είναι μηδέν.

iii) Αν όλοι οι άνω δείκτες είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και οι κάτω δείκτες είναι ίδιοι με τους άνω δείκτες αλλά σε διαφορετική θέση, τότε η τιμή του σύμβολου του Kronecker είναι +1 ή −1, ανάλογα αν χρειάζεται άρτιος ή περιττός αριθμός μεταθέσεων για να αποκτήσουν οι κάτω δείκτες την ίδια θέση με τους άνω δείκτες, δηλαδή

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} = \begin{cases} +1\,, & \text{αν η ακολουθία } \{j_1, j_2,\dots, j_k\} \text{ είναι άρτια} \\ & \text{μετάθεση της ακολουθίας } \{i_1, i_2,\dots, i_k\}\,, \\ -1\,, & \text{αν η ακολουθία } \{j_1, j_2,\dots, j_k\} \text{ είναι περιτ-} \\ & \text{τή μετάθεση της ακολουθίας } \{i_1, i_2,\dots, i_k\}\,, \\ 0\,, & \text{σ' οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \tag{1.8.1}$$

1.10. Εφαρμογές στους τετραγωνικούς πίνακες και στις ορίζουσες

Θα δούμε, ήδη, πως εφαρμόζονται οι προηγούμενοι συμβολισμοί στη θεωρία πινάκων και οριζουσών.

Σ' ένα τετραγωνικό πίνακα Α με n γραμμές και n στήλες, θα συμβολίζουμε $\alpha_j^{\,i}$ το στοιχείο που βρίσκεται στην i γραμμή και στη j στήλη και θα γράφουμε

$$(1.10.1)\qquad A = (\alpha_j^{\,i}).$$

α) Ο συμβολισμός αυτός επιτρέπει μια πιο βολική παράσταση του γινομένου δυο πινάκων Α και Β του παραπάνω τύπου. Δηλαδή, αν $B = (\beta_j^{\,i})$ και

$$(1.10.2)\qquad AB = C,$$

τότε

$$(1.10.3)\qquad c_j^{\,i} = \alpha_h^{\,i}\, \beta_j^{\,h}\,.$$

Ειδικότερα, δυο πίνακες Α και Β θα είναι αντίστροφοι (και συνεπώς και οι δυο ομαλοί), αν ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη,

$$(1.10.4)\qquad \alpha_h^{\,i}\, \beta_j^{\,h} = \delta_j^{\,i}\,.$$

β) Εξάλλου, το σύμβολο ε μας επιτρέπει να εκφράσουμε την τιμή της ορίζουσας πιο σύντομα. Έτσι, αν $|A|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα Α, δηλαδή

$$(1.10.5)\qquad |A| = |\alpha_j^{\,i}| = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\,1} & \alpha_2^{\,1} & \dots & \alpha_n^{\,1} \\ \alpha_1^{\,2} & \alpha_2^{\,2} & \dots & \alpha_n^{\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{\,n} & \alpha_2^{\,n} & \dots & \alpha_n^{\,n} \end{vmatrix},$$

τότε

$$(1.10.6)\qquad |A| = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}\, \alpha_{i_1}^{1}\, \alpha_{i_2}^{2} \dots \alpha_{i_n}^{n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\, \alpha_1^{i_1}\, \alpha_2^{i_2} \dots \alpha_n^{i_n}\,.$$

Έχουμε άθροισμα n^n όρων. Απ' αυτούς μόνον n! όροι, είναι διάφοροι του μηδενός. Το πρόσημο του όρου $\alpha_{i_1}^{1}\, \alpha_{i_2}^{2} \dots \alpha_{i_n}^{n}$ εξαρτάται απ' το αν η μετάθεση $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ της $\{1, 2, \dots, n\}$ είναι άρτια ή περιττή.

Μια άλλη έκφραση της ορίζουσας $|A|$ προκύπτει, αν χρησιμοποιήσουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της. Πραγματικά, απ'