

Δρ. Πασχάλης Κ. Γκότσης

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εισαγωγή και ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (Η/Υ) άνοιξε νέους ορίζοντες στις επιστήμες. Αναπτύχθηκαν θεωρίες προσαρμοσμένες στον Η/Υ υπό μορφή μητρώων ή σειρών καθώς και υπολογιστικές μέθοδοι για να επιλύουν προβλήματα που ήταν αδύνατον να λυθούν παλαιότερα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements method) αναπτύχθηκε λόγω των Η/Υ και χρησιμεύει για την επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής, της Θερμότητας, της Ρευστομηχανικής, του Ηλεκτρομαγνητισμού και άλλων.

Στο παρόν βιβλίο έμφαση δίνεται κυρίως στην μεθοδολογία και επίλυση των προβλημάτων της μηχανικής των κατασκευών (structural mechanics) και κατά δεύτερο λόγο στην μετάδοση θερμότητας με αγωγιμότητα (heat conduction). Γίνεται η παραδοχή ότι το υλικό του στερεού έχει συμπεριφορά ελαστική και γραμμική, και ότι οι μετατοπίσεις και στροφές της κατασκευής είναι μικρές, όπως είναι οι περισσότερες εφαρμογές στην πράξη. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα λυμένα με πολλά σχήματα που κάνουν το βιβλίο ευχάριστο, καθαρό, απλό και κατανοητό. Με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων λύνονται πολύ εύκολα οι υπερστατικοί φορείς (ή στατικά αόριστοι φορείς) των δικτυωμάτων δοκών και πλαισίων.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι δημοφιλής, δυνατή και χρησιμοποιείται στις κατασκευές και μελέτες αεροσκαφών, πλοίων, αυτοκινήτων, παντός είδους μηχανημάτων, γεφυρών, σηράγγων, πολυκατοικιών, θεμελιώσεων, οδοστρωμάτων και άλλων εφαρμογών.

Τα πεπερασμένα στοιχεία εισάγουν την νέα τεχνολογία και την επανάσταση στην επιστήμη και στην βιομηχανία, και για αυτό τον λόγο διδάσκονται ως **βασικό μάθημα** σε όλα τα Ανώτατα ιδρύματα, των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, της Ευρώπης και της Ελλάδας.

Επίσης όλα τα Ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα, οι βιομηχανίες, οι τεχνικές εταιρείες και οι μελετητές μηχανικοί, χρησιμοποιούν εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων για την λύση των προβλημάτων των.

Το βιβλίο είναι χρήσιμο σε όσους θέλουν να μάθουν τα πεπερασμένα στοιχεία και τις εφαρμογές τους, τους προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές των Ανωτάτων Ιδρυμάτων της χώρας καθώς και των μηχανικών της πράξης αεροναυπηγών, μηχανολόγων, πολιτικών, ναυπηγών και γεωλόγων.

Στο σημείο αυτό θεωρώ υποχρέωσή μου να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους εξής:

Τον αδελφό μου Δρ. Χρήστο Κ. Γκότση, καθηγητή του Χημικού τμήματος στο Αριστοτέλειο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για την βοήθεια που μου παρείχε πνευματικά και οικονομικά κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (ΗΠΑ), καθώς και για τις χρήσιμες συμβουλές του στις υπολογιστικές μεθόδους και στα θέματα της θερμότητας που διαπραγματεύομαι στο παρόν πόνημα.

Τον διακεκριμένο επιστήμονα Dr. Christos C. Chamis, ο οποίος υπήρξε πνευματικός μου πατέρας στην επιστήμη κατά τη διάρκεια των οκτώ ετών που συνεργάστηκα μαζί του στο NASA Glenn (Lewis) Research Center, Cleveland, Ohio, USA. Ο Dr. Christos C. Chamis με την οξύνοια και ευρύτητα της σκέψης του δημιούργησε προγράμματα για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή για τη μελέτη της Μηχανικής των Σύνθετων Υλικών των Πεπερασμένων Στοιχείων, της Βελτιστοποίησης των Συνθέτων Υλικών και Κατασκευών (Structural Optimization) και Probabilistic Approaches in Composite Structures.

Τον φίλο και συνεργάτη Dr. James Guptill για τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε στην Υπολογιστική Μέθοδο Ανάπτυξης Προγραμμάτων στον H/Y κατά τη συνεργασία μας στο NASA Glenn (Lewis) Research Center, Cleveland, Ohio, USA.

Τον φίλο και συνεργάτη καθηγητή Dr. Levon Minnetyan, του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Clarkson University, New York, USA.

Τη σύζυγό μου Αλεξάνδρα και την κόρη μου Αθηνά για την ενθάρρυνση και την κατανόησή τους κατά τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου μου.

Τον εκδοτικό οίκο Ζήτη και το τεχνικό προσωπικό που εργάστηκαν για τη βέλτιστη παρουσίαση του παρόντος συγγράμματος.

Σέρρες,
Δεκέμβριος 2004

Πασχάλης Κ. Γκότσης

Βιογραφικά Στοιχεία του Συγγραφέα



Ο Πασχάλης Κ. Γκότσης γεννήθηκε και μεγάλωσε στην Θεσσαλονίκη. Είναι έγγαμος και έχει μία κόρη.

Το 1973-1978 πήρε το δίπλωμα του Πολιτικού Μηχανικού, της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και συνέχισε τις σπουδές του στην Αμερική.

Με υποτροφία από τα Αμερικάνικα πανεπιστήμια απέκτησε:

- Το Μάστερ της Επιστήμης (Master of Science) από το τμήμα **θεωρητική Μηχανική (τμήμα Engineering Mechanics and Science)**, από το πανεπιστήμιο **The Pennsylvania State University**, University Park, State College, Pennsylvania, USA. Το αντικείμενο της έρευνας του Master Thesis ήταν ‘Η Βελτιστοποίηση Λεπτών Κελυφωτών Κατασκευών με τη Χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων’.
- Το διδακτορικό δίπλωμα (**Ph.D**) από το τμήμα **Επιστήμη των Υλικών (Department of Materials Science and Engineering)** από το Πανεπιστήμιο **University of California, Los Angeles, California, USA**. Το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής ήταν ‘Η ελαστο-πλαστική ανάλυση συνθέτων υλικών με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων’.

Ο συγγραφέας έχει αρκετά μεταπτυχιακά μαθήματα που αποκτήθηκαν με βαθμολογία, κατά την διάρκεια των σπουδών, ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μάστερ και του Διδακτορικού στα πανεπιστήμια της Αμερικής.

Συνέχισε την μεταδιδακτορική του έρευνα, στο ίδιο τμήμα που πήρε το διδακτορικό του, το τμήμα της Επιστήμης των Υλικών (Department of Materials Science and Engineering) στο University of California, Los Angeles, California, USA.

Για δύο χρόνια, δίδαξε και έκανε έρευνα ως καθηγητής, στο τμήμα των Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου California State University, Long Beach, California, USA. Δίδαξε μαθήματα του κατασκευαστικού τομέα. Ως κύριος ερευνητής σε ερευνητικό πρόγραμμα χρηματοδοτήθηκε από την Αεροπορική εταιρεία TRW που εδρεύει στο Los Angeles, California, USA.

Από **1 Οκτωβρίου 1990** μέχρι της **24 Ιουνίου 1998**, εργάστηκε με τον τίτλο του Αεροναυπηγού μηχανικού, στην **NASA Glenn (Lewis) Research Center, Cleveland, Ohio, USA**, στο τμήμα Μηχανικής των Κατασκευών (Structural Mechanics) του γενικού τμήματος Structures and Acoustic Division της διεύθυνσεως Ερεύνης και Αναπτύξεως (Research and Development Directorate). Η θέση που κατείχε επί 8 χρόνια στην NASA ήταν μόνιμη . Όλο το διάστημα που εργάστηκε στην NASA συνεργαζόταν με τον γνωστό επιστήμονα Dr. Christos C. Chamis στην περιοχής της Μηχανικής των Συνθέτων Υλικών (fiber composites) καθώς και κατασκευών που αποτελούνται από σύνθετα υλικά. Μοντελοποίηση της θραύσης των υλικών και των κατασκευών και δημιουργία προγραμμάτων με τα πεπερασμένα στοιχεία. Επίσης εργάστηκε σε διαφορετικά ερευνητικά προγράμματα με τα πανεπιστήμια και την βιομηχανία.

Τον Ιούνιο του 1998 επέστρεψε από την Αμερική στην Ελλάδα.

Από τις **28 Ιουνίου 1998 μέχρι τώρα** εργάζεται ως καθηγητής στο τμήμα των Μηχανολόγων του ΤΕΙ Σερρών. Επίσης είναι διευθυντής του Κέντρου Τεχνολογικής Έρευνας στις Σέρρες.

Ο συγγραφέας έχει πλήθος εργασιών σε διεθνή περιοδικά και διεθνή συνέδρια. Τα αντικείμενα της ερευνάς του είναι:

- Η μηχανική των συνθέτων υλικών (fiber composite laminate materials) micromechanics και macromechanics, καθώς επίσης και η μηχανική των κατασκευών που αποτελούνται από σύνθετα υλικά (fiber composite laminate materials).
- Μοντελοποίηση της θραύσης
 - α) των συνθέτων υλικών (fiber composite laminate materials) και
 - β) των κατασκευών που αποτελούνται από σύνθετα υλικά. Η πρόβλεψη έναρξης της θραύσης, της διάδοσης και της καταστροφής με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων.
- Η Βελτιστοποίηση συνθέτων υλικών καθώς και κατασκευών (Structural Optimization).
- Προγραμματισμός και ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Γενικά περί των Πεπερασμένων Στοιχείων

1.1	Εισαγωγή	17
1.2	Η ιστορία των πεπερασμένων στοιχείων	20
1.3	Σύντομη περιγραφή του βιβλίου	21
1.4	Η ολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος	22
1.5	Η μέθοδος του Rayleigh - Ritz	35
1.6	Η μέθοδος του Galerkin.....	53

Παραδείγματα

Π1.1	Ένα ελατήριο με σταθερά δύναμη F	23
Π1.2	Τρία ελατήρια στην σειρά.....	24
Π1.3	Σύστημα ελατηρίων	26
Π1.4	Ράβδος με αξονικό φορτίο, αρχική παραμόρφωση και αρχική τάση (residual stress)	30
Π1.5	Ράβδος δικτύματος	32
Π1.6	Rayleigh-Ritz. Μονόπακτη ράβδος	37
Π1.7	Rayleigh-Ritz. Υπερστατικός φορέας.....	41
Π1.8	Rayleigh-Ritz. Πεπερασμένα στοιχεία ράβδου	43
Π1.9	Galerkin. Υπερστατικός φορέας	54
Π1.10	Galerkin. Μοντέλο του Kelvin - Voight.....	57

2. Η Άλγεβρα των Μητρώων και οι Βασικές Αρχές της Θεωρίας Ελαστικότητας

2.1	Η Άλγεβρα των μητρώων	65
2.2	Θεωρία της ελαστικότητας	80
2.3	Σχέση παραμόρφωσης - μετατόπισης.....	86
2.4	Σχέση τάσης - παραμόρφωσης	88
2.5	Αρχικές τάσεις και παραμορφώσεις. Επιρροή της θερμοκρασίας.....	92

Παραδείγματα

Π2.1	Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων	73
------	---	----

Π2.2	Γραμμικές εξισώσεις.....	78
Π2.3	Οριακές συνθήκες τάσεων και μετατοπίσεων	83

3. Προβλήματα μιας Διάστασης. Αξονικός Εφελκυσμός. Ράβδος σε Στρέψη

3.1	Εισαγωγή.....	95
3.2	Στοιχείο με δύο κόμβους	98
3.3	Τάσεις και παραμορφώσεις	103
3.4	Η δυναμική ενέργεια του συστήματος.....	105
3.5	Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας του συστήματος.....	109
3.6	Στοιχείο με τρεις κόμβους	120
3.7	Θερμικά φορτία και θερμικές τάσεις.....	125
3.8	Ράβδος σε στρέψη.....	140

Παραδείγματα

Π3.1	Συναρτήσεις μορφής και μετατοπίσεις	102
Π3.2	Ράβδος με μεταβλητή διατομή.....	110
Π3.3	Υπερστατικός φορέας με μηχανικό φορτίο	116
Π3.4	Υπερστατικός φορέας με θερμικά και μηχανικά φορτία.....	128
Π3.5	Περιστροφή ράβδου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα	132
Π3.6	Ράβδος συνδεδεμένη με ελατήριο.....	138
Π3.7	Υπερστατικός φορέας σε στρέψη	144

4. Δικτύωματα

4.1	Εισαγωγή.....	149
4.2	Τοπικό και καθολικό σύστημα συντεταγμένων.....	153
4.3	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας	155
4.4	Υπολογισμός των τάσεων της ράβδου.....	156
4.5	Θερμικά φορτία	157
4.6	Εξισώσεις ισορροπίας.....	159
4.7	Δικτύωμα στον χώρο	160

Παραδείγματα

Π4.1	Υπερστατικό δικτύωμα	163
Π4.2	Δικτύωμα με θερμικά φορτία.....	170
Π4.3	Μετακίνηση στήριξης δικτύωματος	174

5. Δοκοί και πλαίσια

5.1	Εισαγωγή	181
5.2	Δυναμική ενέργεια της δοκού.....	184
5.3	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου	184
5.4	Ισοδύναμα κομβικά φορτία του στοιχείου.....	191
5.5	Υπολογισμός των δυνάμεων και ροπών	195
5.6	Ελαστικές στηρίξεις.....	199
5.7	Πλαίσια στο επίπεδο	204
5.8	Υπολογισμός των αντιδράσεων	210

Παραδείγματα

Π5.1	Ισοστατικός φορέας	197
Π5.2	Υπερστατικός φορέας με συνεχές φορτίο στο ένα άνοιγμα	210
Π5.3	Υπερστατικός φορέας με ομοιόμορφο φορτίο.....	216
Π5.4	Πλαίσιο	222
Π5.5	Υπερστατικός φορέας με ελατήριο στο ελεύθερο άκρο	227
Π5.6	Υπερστατικός φορέας με ελατήριο στο μέσον της δοκού	230

6. Προβλήματα δυο διαστάσεων. Τρίγωνο με σταθερή παραμόρφωση

6.1	Εισαγωγή	237
6.2	Εμβαδικές συντεταγμένες. Ισοπαραμετρικό στοιχείο	243
6.3	Σχέση παραμόρφωσης - μετατόπισης	247
6.4	Το μητρώο δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου	251
6.5	Υπολογισμός των ισοδύναμων κομβικών δυνάμεων.....	253
6.6	Εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής	263
6.7	Υπολογισμός των τάσεων στο στοιχείο 1, 2, 3.....	263

Παραδείγματα

Π6.1	Συναρτήσεις μορφής για τριγωνικό στοιχείο.....	265
Π6.2	Ιακωβιανό μητρώο τριγωνικού στοιχείου.....	266
Π6.3	Υπολογισμός του μητρώου παραμόρφωσης B, της επίπεδης πλάκας	267
Π6.4	Μηχανικά φορτία και τάσεις σε πλάκα.....	268
Π6.5	Θερμικές και μηχανικές τάσεις.....	273

7. Τετράπλευρα και τριγωνικά στοιχεία υψηλότερης τάξης. Αριθμητική ολοκλήρωση

7.1	Εισαγωγή.....	279
7.2	Ισοπαραμετρικό τετράπλευρο στοιχείο.....	279
	Συναρτήσεις μορφής ή συναρτήσεις παρεμβολής.....	280
	Παραμόρφωση και τάση.....	285
	Δυναμική ενέργεια του σώματος.....	288
	Μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.....	289
7.3	Διανυσματικά φορτία του στοιχείου.....	290
	Δυνάμεις βαρύτητας.....	290
	Επιφανειακές δυνάμεις.....	291
	Αρχικές τάσεις (residual stresses).....	292
7.4	Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο του Gauss Quadrature.....	292
	Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας.....	292
	Υπολογισμός των τάσεων και παραμορφώσεων.....	298
7.5	Στοιχεία υψηλότερης τάξης.....	301
	Τετράπλευρο στοιχείο δευτέρου βαθμού (quadratic element).....	302
	Τριγωνικό στοιχείο δευτέρου βαθμού (quadratic triangle element).....	305

Παραδείγματα

Π7.1	Υπολογισμός ολοκληρώματος μιας διάστασης.....	295
Π7.2	Υπολογισμός των τάσεων με εσωτερική ή εξωτερική παρεμβολή.....	299
Π7.3	Υπολογισμός των συναρτήσεων μορφής τετραπλεύρου στοιχείου με 8 και 9 κόμβους αντιστοίχως.....	302
Π7.4	Αριθμητική ολοκλήρωση σε τριγωνικό στοιχείο με τρεις κόμβους.....	309
Π7.5	Υπολογισμός του k_e στοιχείου με εννέα κόμβους.....	310
Π7.6	Υπολογισμός καθολικών και τοπικών συντεταγμένων.....	310
Π7.7	Υπολογισμός του J , B και σ σε τετράπλευρο στοιχείο.....	312
Π7.8	Υπολογισμός ισοδυνάμου κομβικού φορτίου, επιφανειακού φορτίου τετραπλεύρου στοιχείου.....	314
Π7.9	Υπολογισμός του μητρώου B τετραπλεύρου στοιχείου.....	317
Π7.10	Τετράπλευρο στοιχείο φορτιζόμενο με θερμικό φορτίο.....	320
Π7.11	Οκτακομβικό στοιχείο φορτιζόμενο με επιφανειακό φορτίο.....	323
Π7.12	Υπολογισμός σύνθετης κατασκευής.....	326
Π7.13	Στοιχείο με πέντε κόμβους και διδόμενες τάσεις.....	331

8. Συμμετρικά εκ περιστροφής σώματα με συμμετρικά εκ περιστροφής φορτία

8.1	Εισαγωγή	333
8.2	Εξισώσεις ελαστικότητας	335
8.3	Ισοπαραμετρικό τριγωνικό στοιχείο	337
8.4	Μητρώο δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου	341
8.5	Ισοδύναμα κομβικά φορτία	345
8.6	Υπολογισμός τάσεων	352
8.7	Εφαρμογές	353

Παραδείγματα

P8.1	Κύλινδρος μεγάλου μήκους με εσωτερική πίεση	355
P8.2	Υπολογισμός τάσεων σε κύλινδρο με εσωτερική πίεση	360

9. Στερεά στο χώρο. Ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

9.1	Εισαγωγή	363
9.2	Τετράεδρο πεπερασμένο στοιχείο	365
9.3	Μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου	372
9.4	Πρισματικό ή εξάεδρο στοιχείο (brick element)	378

10. Η δυναμική των κατασκευών

10.1	Εισαγωγή	383
10.2	Δυναμικές εξισώσεις του σώματος	385
	Κινητική ενέργεια	389
	Υπολογισμός της μάζας στρεπτικού πεπερασμένου στοιχείου	390
10.3	Συμβιβαστό ή συνεπές μητρώον μάζας του στοιχείου (consistent mass matrix)	392
	Στοιχείο ράβδου μίας διάστασης	393
	Στοιχείο δικτύωματος	394
	Τριγωνικό στοιχείο για επίπεδο τάση και επίπεδο παραμόρφωση	395
	Τριγωνικό στοιχείο, σώματος και φορτίου συμμετρικά εκ περιστροφής	396
	Τετράπλευρο στοιχείο	397
	Στοιχείο δοκού σε κάμψη	398
	Στοιχείο πλαισίου	399

Τετραεδρικό στοιχείο	401
10.4 Συγκεντρωμένο η διακριτό μητρώο μάζας στοιχείου (lumped mass) ...	403
Πεπερασμένο στοιχείο ράβδου μιας διάστασης	403
Στοιχείο δικτύωματος	404
Στοιχείο δοκού	404
10.5 Ελεύθερη ταλάντωση.....	405
Ιδιότητες των ιδιοδιανυσμάτων (eigenvectors)	407

Παραδείγματα

Π10.1 Αξονική ταλάντωση ελεύθερης ράβδου	408
Π10.2 Αξονική ταλάντωση πακτωμένης ράβδου	412
Π10.3 Αξονικό και συνεχές δυναμικό φορτίο	414
Π10.4 Ράβδος σε στρέψη.....	415
Π10.5 Δικτύωμα	419
Π10.6 Ελεύθερη ταλάντωση δικτύωματος	422
Π10.7 Ταλάντωση δοκού σε κάμψη	424
Π10.8 Ελεύθερη ταλάντωση μονώροφου πλαισίου.....	428
Π10.9 Ελεύθερη ταλάντωση δώροφου πλαισίου.....	431
Π10.10 Δοκός σε κάμψη συνδεδεμένος με ελατήρια και στερεό δίσκο	434

11. Προβλήματα Πεδίων. Η μέθοδος του Galerkin.

Μεταφορά Θερμότητας. Στρέψη ράβδου τυχαίας διατομής

11.1 Εισαγωγή.....	439
11.2 Μεταφορά θερμότητας	441
11.3 Μεταφορά θερμότητας με αγωγιμότητα, σε μια διάσταση.....	443
Πεπερασμένα στοιχεία μίας διάστασης	446
Συναρτησιακή μέθοδος (Functional approach).....	449
11.4 Η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό της ροής θερμότητας με αγωγιμότητα σε μια διάσταση	453
11.5 Ροή θερμότητας σε λεπτά πτερύγια. Πρόβλημα μιας διάστασης	462
11.6 Μεταφορά θερμότητας με αγωγή στο επίπεδο. Η εξίσωση της θερ- μικής διάχυσης.....	467
Τριγωνικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο	470
11.7 Η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό της ροής θερμότητας με αγωγιμότητα σε δύο διαστάσεις.....	472
11.8 Στρέψη σε ράβδο με αυθαίρετη διατομή	490

Ισοπαραμετρικό τριγωνικό στοιχείο.....	491
Η μέθοδος του Galerkin για τη λύση του προβλήματος της στρέψης.....	493
Πίνακας 11.1. Παραδείγματα στα προβλήματα πεδίων	440

Παραδείγματα

Π11.1 Ροή θερμότητας με αγωγιμότητα σε τοίχο με διαφορετικά υλικά. Πρόβλημα μιας διάστασης.....	455
Π11.2 Ροή θερμότητας με αγωγιμότητα σε ομοιογενή πλάκα εκτιθέμενη σε θερμό αέρα. Πρόβλημα μιας διάστασης.	459
Π11.3 Υπολογισμός της ροής θερμότητας σε πτερύγιο αεροπλάνου. Πρόβλημα μιας διάστασης.....	481
Π11.4 Μεταφορά θερμότητας σε ράβδο μεγάλου μήκους και ορθογωνικής διατομής. Πρόβλημα μιας διάστασης	485
Π11.5 Ράβδος ορθογωνικής διατομής φορτιζόμενη με στρεπτική ροπή. Πρόβλημα δύο διαστάσεων	497

12. Προβλήματα με περιορισμούς στις οριακές συνθήκες

12.1 Εισαγωγή	505
12.2 Η μέθοδος απαλειφής	507
12.3 Η μέθοδος ποινής (penalty method)	515
12.3 Σύνθετοι περιορισμοί (multipoint constraints)	524

Παραδείγματα

Π12.1 Μέθοδος απαλειφής. Ράβδος με περιορισμό στην μετατόπιση	512
Π12.2 Μέθοδος ποινής. Ράβδος με περιορισμό στην μετατόπιση	520
Π12.3 Μέθοδος ποινής. Άκαμπτη άτρακτος εντός σωλήνα	521
Π12.4 Μέθοδος ποινής. Εύκαμπτη άτρακτος εντός σωλήνα.....	527
Π12.5 Λοξή στήριξη - κύλιση	530
Π12.6 Άκαμπτη ράβδος εξαρτώμενη από εύκαμπτους ράβδους.....	533

13. Επίπεδες πλάκες σε κάμψη

13.1 Συμπεριφορά της πλάκας. Η θεωρία του Kirchhoff για λεπτές πλάκες.....	537
13.2 Πεπερασμένα στοιχεία για λεπτή πλάκα	550
13.3 Παχιές πλάκες, θεωρία του Mindlin	553

13.4	Ισοπαραμετρικό στοιχείο παχειάς πλάκας.....	557
13.5	Υπολογισμός των τάσεων του στοιχείου.....	562
13.6	Ισοδύναμα κομβικά φορτία του στοιχείου.....	562
13.7	Οριακές συνθήκες.....	563

Παραδείγματα

Π13.1	Υπολογισμός ροπών λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής.....	547
Π13.2	Σχέση μεταξύ βέλους w και d	548

<i>Βιβλιογραφία.....</i>	<i>565</i>
--------------------------	------------

<i>Ευρετήριο Όρων</i>	<i>569</i>
-----------------------------	------------

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Γενικά περί των Πεπερασμένων Στοιχείων

9.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχουν διαφορετικοί μέθοδοι (ή διαφορετικές φιλοσοφίες) για την ανάπτυξη της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο παρόν βιβλίο αναπτύσσονται οι παρακάτω δύο μέθοδοι:

▶ **Η ενεργειακή μέθοδος**, βασίζεται στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος (ή της κατασκευής) (total potential energy), μαζί με την μέθοδο των μετατοπίσεων, την οποία θα αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια. Η μέθοδος είναι απλή και **δεν απαιτεί** την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων και χρησιμοποιείται σε όλα τα κεφάλαια.

Επίσης στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας χρησιμοποιείται η ενεργειακή μέθοδος, όταν υπάρχει η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας, η οποία μετονομάζεται και λέγεται συναρτησιακή ενέργεια (functional)

Η ενεργειακή μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί, **όταν υπάρχει η δυνατότητα** να εκφρασθεί η ολική δυναμική ενέργεια του προβλήματος στα στερεά ή η functional στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας. Αν δεν γνωρίζουμε την ολική δυναμική ενέργεια, τότε χρησιμοποιούνται άλλοι μέθοδοι, όπως η μέθοδος του Galerkin.

▶ **Η μέθοδος του Galerkin** ανήκει στην γενική κατηγορία των Σταθμικών Υπολοίπων (methods of Weighted Residuals). Η μέθοδος Galerkin είναι γενική, δυνατή και εφαρμόζεται **απ' ευθείας** στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο 11 χρησιμοποιείται η μέθοδος του Galerkin για τον υπολογισμό των προβλημάτων της θερμότητας καθώς και του προβλήματος της στρέψης ράβδου με τυχαία διατομή.

Σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι η χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, στην επίλυση προβλημάτων:

- στη μηχανική των κατασκευών (structural mechanics) και
- στη μηχανική των στερεών (solid mechanics).

Στο κεφάλαιο 11, μελετάται επίσης η διάδοση της θερμότητας με αγωγιμότητα.

Ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδόν ο ίδιος σε όλες τις περιοχές που εφαρμόζεται. Για παράδειγμα για την επίλυση μιας κατασκευής σχεδιάζουμε πρώτα την κατασκευή κατόπιν την χωρίζουμε σε μικρά γεωμετρικά σχήματα π.χ. τρίγωνα ή τετράπλευρα, τα οποία λέγονται πεπερασμένα στοιχεία. Οι ιδιότητες του υλικού και οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το υλικό εξετάζονται στα πεπερασμένα στοιχεία σαν συνάρτηση των αγνώστων μετατοπίσεων στις κορυφές του πεπερασμένου στοιχείου (μέθοδος των μετατοπίσεων). Λαμβάνουμε υπ' όψιν τις οριακές συνθήκες καθώς και τα φορτία (μηχανικά και θερμικά) και καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων ως προς τους αγνώστους, οι οποίοι είναι οι κομβικές μετατοπίσεις είναι η ζητούμενη προσεγγιστική λύση. Γνωστών των κομβικών μετατοπίσεων υπολογίζονται στα διάφορα σημεία της κατασκευής οι τάσεις (σ), οι παραμορφώσεις (ϵ) και οι αντιδράσεις (R) των στηρίξεων.

Λόγοι ανάπτυξης της μεθόδου

Προβλήματα που δεν μπορούσαν να τα αγγίξουν οι επιστήμονες έως τώρα και τα θεωρούσαν άλυτα, με την χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (H/Y) και των υπολογιστικών μεθόδων όπως των πεπερασμένων στοιχείων τα λύνουν σε μικρό χρόνο.

Στις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής, στην Ευρώπη, και στις ανεπτυγμένες χώρες, η βιομηχανία, ο στρατός και το κράτος χρηματοδοτούν τα ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα και τις ερευνητικές εταιρείες, με σκοπό την ανάπτυξη προγραμμάτων.

Η ανάγκη της βιομηχανίας και των προβλημάτων της πράξης, οδήγησε την ανάπτυξη γραφικών προγραμμάτων, τα οποία συνοδεύουν την ανάλυση-υπολογισμό που παρέχουν τα πεπερασμένα στοιχεία. Ο συνδυασμός των γραφικών με την ανάλυση-υπολογισμό των πεπερασμένων στοιχείων υψώνουν την επιστήμη, την απλοποιούν, την κάνουν προσιτή και δημιουργική (state of the art).

Προϊόν της συστηματικής εργασίας των ερευνητών είναι η ανάπτυξη των εμπορικών προγραμμάτων για τον Η/Υ. Τα εμπορικά προγράμματα αποτελούνται από δύο μεγάλα προγράμματα: Τα γραφικά και την ανάλυση.

α) Γραφικά προγράμματα

Τα γραφικά προγράμματα χρησιμοποιούνται πριν από την ανάλυση (Pre-processing) και μετά την ανάλυση (Post-processing).

- *Pre-processing*. Με την χρήση του γραφικού προγράμματος το σώμα ή η κατασκευή σχεδιάζεται και κατόπιν διακριτοποιείται στα πεπερασμένα στοιχεία.
- *Post-processing*. Μετά την ανάλυση γίνονται γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων όπως είναι η παραμόρφωση του σώματος, η διανομή των τάσεων εντός του σώματος και άλλων.

β) Πρόγραμμα για την ανάλυση-υπολογισμό

Το πρόγραμμα της ανάλυσης χρησιμοποιείται για την μελέτη ποικίλων προβλημάτων που μπορεί να αφορούν την μηχανική των στερεών ή των κατασκευών, στα ρευστά, στην θερμότητα, στην ακουστική, στην κατεργασία των μετάλλων, στον ηλεκτρισμό και ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες περιοχές.

Όλα τα ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα, η βιομηχανία, οι τεχνικές εταιρείες, οι μηχανικοί της πράξης, οι προ-πτυχιακοί και οι μεταπτυχιακοί φοιτητές, χρησιμοποιούν εμπορικά προγράμματα για τον Η/Υ όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω:

ANSYS,	ABAQUS,	NASTRAN,	
MARC,	ADINA,	SAP90	COSMOS

για την μοντελοποίηση (ή προσομοίωση) προβλημάτων. Τα προγράμματα παρέχουν υπορουτίνες (subroutines), ώστε ο χρήστης να μπορεί να προσθέσει το δικό του πρόγραμμα συνήθως σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN ή C, για να προσθέσει πληροφορίες που δεν υπάρχουν στο εμπορικό πρόγραμμα, όπως για παράδειγμα να τροποποιήσει, να βελτιώσει ή να προσθέσει νέες καταστατικές εξισώσεις (constitutive equations).

Υπάρχουν επίσης ειδικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω:

HITCAN (Metal matrix composites analyzer) και
CODSTRAN (polymer composites analyzer),

τα οποία έχουν αναπτυχθεί στο ερευνητικό κέντρο NASA Glenn (Lewis) Research Center, Cleveland, Ohio, USA υπό την επίβλεψη και δημιουργού αυτών Dr. Christos C. Chamis. Τα προγράμματα αυτά, χρησιμοποιούν τα πεπερασμένα στοιχεία και την μηχανική των συνθέτων υλικών (fiber composite materials).

Γιατί πρέπει να γνωρίζουμε τα πεπερασμένα στοιχεία;

Η θεωρητική γνώση των πεπερασμένων στοιχείων βοηθά να αναπτύξει ο φοιτητής, ο ερευνητής ή ο μηχανικός της πράξης την αυτοπεποίθηση και την ικανότητα να λύνει, να λειτουργεί και να ερμηνεύει σωστά τα αποτελέσματα που λαμβάνει από ένα πρόγραμμα, και αν χρειασθεί να γράψει το δικό του πρόγραμμα.

1.2 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Το 1909 ο Γερμανός μαθηματικός Ritz ανέπτυξε τις αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1915 ο Ρώσος μαθηματικός Galerkin ανέπτυξε σε βάθος την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η απουσία του ηλεκτρονικού υπολογιστή καθυστέρησε την διάδοση και περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου και παρέμεινε στάσιμη μέχρις της ανακαλύψεως του υπολογιστή. Με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή η μέθοδος έγινε γνωστή και διαδόθηκε στους ερευνητές.

Η ιδέα της ανάπτυξης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων γεννήθηκε στην αεροναυπηγική από την ανάγκη της εύρεσης λύσης στα δύσκολα προβλήματα που αντιμετώπιζαν στην κατασκευή των αεροσκαφών.

Το 1941 ο Hrenikoff εισήγαγε την καλούμενη framework method (μέθοδο του πλαισίου) με την οποία ένα επίπεδο ελαστικό μέσο μπορούσε να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο σύστημα ράβδων και δοκών.

Το 1943 ο Γερμανός μαθηματικός Courant έλυσε το πρόβλημα της στρέψης χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία με την αρχή της ελαχίστης δυναμικής ενέργειας (minimum potential energy) και την ονόμασε Rayleigh-Ritz μέθοδο. Επειδή τότε δεν υπήρχε ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, η θεωρία του Courant δεν μπορούσε να εφαρμοσθεί και ξεχάστηκε μέχρι που ανακαλύφθηκε ο υπολογιστής και οι επιστήμονες ξανά θεμελίωσαν την μέθοδο.

Το 1955 ο Έλληνας Ι. Αργύρης έγραψε ένα βιβλίο με θέμα 'Ενεργειακά

θεωρήματα και η μέθοδος των μητρώων' και εισήγαγε τις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1956 οι Αμερικανοί Turner, Clough, Martin και Top υπολόγισαν το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου και άλλων στοιχείων.

Το 1960 ο I. Αργύρης και ο Kelsey δημοσίευσαν την εργασία τους η οποία βασιζόταν στις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1960 ο Clough καθηγητής του πανεπιστημίου 'University of California, Berkeley' της Αμερικής, χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το όνομα 'Πεπερασμένα στοιχεία' (Finite elements) στην εργασία του και από τότε όλοι χρησιμοποιούν την παραπάνω ονομασία.

Το 1967 οι Zienkiewicz και Chung έγραψαν το πρώτο βιβλίο των πεπερασμένων στοιχείων.

Από τότε ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων και βιβλίων ακολούθησε με αντικείμενο την εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων στην μηχανική, στα ρευστά, τη θερμότητα, την ακουστική, την κατεργασία των μετάλλων, τον ηλεκτρισμό και ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες επιστήμες.

1.3 ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Στο βιβλίο χρησιμοποιείται η δυναμική ενέργεια (Potential energy) του συστήματος και η μέθοδος των μετατοπίσεων για την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η ανάπτυξη της μεθόδου εφαρμόζεται στα στερεά και στις κατασκευές. Εξάιρεση αποτελεί το κεφάλαιο 11, στο οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος του Gallerkin για την λύση των προβλημάτων της θερμότητας και του προβλήματος της στρέψης τυχαίας διατομής.

Η παρούσα ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στις παραδοχές της ελαστικής και γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών, και των μικρών μετατοπίσεων και στροφών της κατασκευής.

Το βιβλίο είναι χρήσιμο για όσους θέλουν να μάθουν τα πεπερασμένα στοιχεία, τους φοιτητές των ανωτάτων ιδρυμάτων και τους μηχανικούς της πράξης, και καλύπτει τις περισσότερες ειδικότητες των μηχανικών καθώς και των γεωλόγων που ασχολούνται με προβλήματα μηχανικής (rock mechanics).

Στο βιβλίο υπάρχουν πολλά σχήματα και αρκετά παραδείγματα τα οποία λύνονται με λεπτομέρεια και σαφήνεια.

Ας σημειωθεί ότι το κείμενο και οι εξισώσεις έχουν γραφεί από τον ίδιο τον συγγραφέα του βιβλίου, όπως επίσης και τα σχήματα τα οποία έγιναν με τη χρήση του γραφικού προγράμματος Corel Draw 10.

Σύντομα θα περιγραφούν οι παρακάτω μέθοδοι: η μέθοδος της δυναμικής ενέργειας, η ιστορική μέθοδος του Rayleigh-Ritz και η μέθοδος του Galerkin.

1.4 Η ΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.

α) Σύστημα ελατηρίων

Η δυναμική ενέργεια Π ενός συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W \quad (1.4.1)$$

όπου : U = η ενέργεια παραμόρφωσης

W = το εξωτερικό μηχανικό έργο

Για παράδειγμα ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου K , στηρίζεται στο ένα άκρο και στο άλλο άκρο ασκείται δύναμη P . Λόγω του φορτίου το ελατήριο επιμηκύνεται κατά x , και έχουμε

$$U = \frac{1}{2}(Kx)x = \frac{Kx^2}{2},$$

$$W = Px$$

και
$$\Pi = \frac{Kx^2}{2} - Px.$$

Συντηρητικό λέγεται ένα σύστημα όταν το μηχανικό έργο που παράγεται είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο που απαιτείται να πάει από την αρχική θέση A , στην τελική θέση B .

Η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας είναι: Σε ένα συντηρητικό σύστημα, από το πλήθος των επιτρεπτών μετατοπίσεων, εκείνες που αντιστοιχούν στην ισορροπία του συστήματος ελαχιστοποιούν την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Έστω x_i , $i=1,2, \dots, n$ είναι οι μετατοπίσεις ενός συστήματος οι οποίες εκφράζουν και τους βαθμούς ελευθερίας. Το σύστημα λέμε ότι είναι σε ισορροπία όταν η ολική ενέργεια του συστήματος $\Pi(x)$ γίνει ελάχιστη. Το

$\Pi(x)$ γίνεται ελάχιστο όταν είναι:

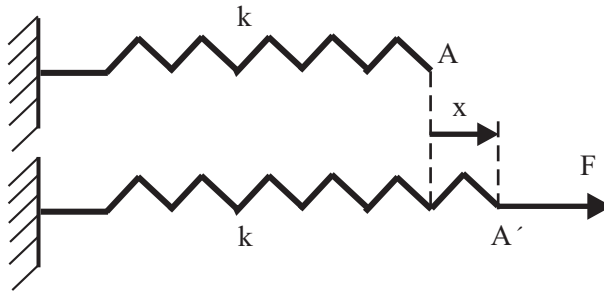
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{εξισώσεις ισορροπίας} \quad (1.4.2)$$

Οι n εξισώσεις της (1.4.2) αποτελούν της εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, οι οποίες υπό μορφή μητρώου είναι:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{εξισώσεις ισορροπίας} \quad (1.4.3)$$

Παράδειγμα 1.1: Ένα ελατήριο με σταθερά δύναμη F

Δίδεται ένα ελατήριο με σταθερά k , και εφαρμόζεται μια δύναμη F στο ελεύθερο άκρο του, σχήμα Π1.1 Να ευρεθεί η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος.



Σχήμα Π1.1 Ελατήριο με σταθερή δύναμη F

Λύση

Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας, την μετατόπιση x του ελατηρίου. Η δυναμική ενέργεια Π του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W \\ &= \frac{1}{2} kx^2 - xF \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται ελάχιστη όταν ελαχιστοποιήσουμε την Π ως προς το x και είναι

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \quad (\alpha)$$

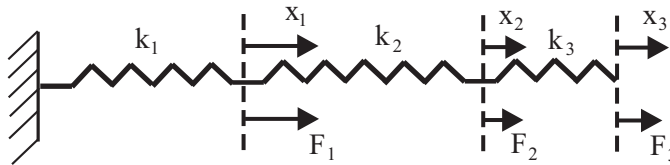
Η εξίσωση ισορροπίας προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση (α) και είναι:

$$kx - F = 0 \quad \text{ή} \quad kx = F$$

είναι η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος.

Παράδειγμα 1.2: Τρία ελατήρια στη σειρά

Να υπολογισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας και οι μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 , του συστήματος των ελατηρίων σχήμα Π1.2. Δίνονται οι σταθερές των ελατηρίων k_i από $i = 1, 2, 3$ και τα συγκεντρωμένα φορτία F_1 , F_2 και F_3 .



Σχήμα Π1.2 Τρία ελατήρια στην σειρά

Λύση

Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W$$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad \Pi &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - x_1 F_1 \quad (\text{το ελατήριο } k_1, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_1) \\ &+ \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - x_2 F_2 \quad (\text{το ελατήριο } k_2, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_2 - x_1) \\ &+ \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 - x_3 F_3 \quad (\text{το ελατήριο } k_3, \text{ έχει ολική επιμήκυνση } x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται ελάχιστη όταν ελαχιστοποιήσουμε την Π ως προς τους 3 βαθμούς ελευθερίας x_1 , x_2 και x_3 και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν από το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 - k_2(x_2 - x_1) - F_1 = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0$$

$$\text{ή} \quad (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) - F_2 = \\ &= -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - F_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = F_2 \quad (\beta)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = k_3(x_3 - x_2) - F_3 = 0$$

$$-k_3x_2 + k_3x_3 = F_3 \quad (\gamma)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας (α), (β) και (γ) υπό μορφή μητρώων είναι

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{K D} = \mathbf{F} \quad (\delta)$$

όπου: $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$, το μητρώο δυσκαμψίας του συστή-

ματος

Το \mathbf{K} είναι συμμετρικό μητρώο και είναι διαστάσεων 3×3 (όπου 3 είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος).

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων}$$

και $\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$, το διάνυσμα του εξωτερικού φορτίου,

Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων \mathbf{D} , από το σύστημα (δ) έχουμε:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

όπου \mathbf{K}^{-1} = ο αντίστροφος πίνακας του \mathbf{K} .

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται οι μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 .

Γενική παρατήρηση

Όσον αφορά την δυναμική ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να γραφεί υπό γενική μορφή:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{F} \quad (1.4.4)$$

όπου: \mathbf{K} είναι το μητρώον δυσκαμψίας,

\mathbf{D} είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων και

\mathbf{F} είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων της κατασκευής.

Από την μερική παραγωγήση

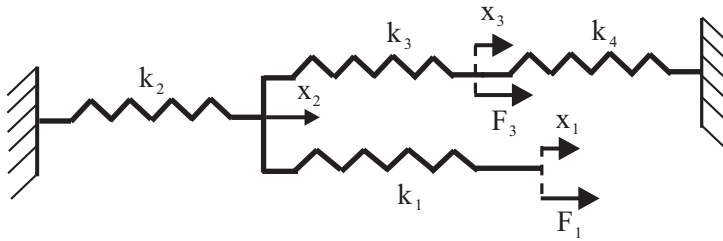
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} = 0 \quad (1.4.5)$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (1.4.6)$$

Παράδειγμα 1.3: Σύστημα ελατηρίων

Να υπολογισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής σχήμα Π1.3. Δίνονται οι σταθερές των ελατηρίων k_i από $i=1, 2, 4$ και τα συγκεντρωμένα φορτία F_1 και F_3 .



Σχήμα Π1.3 Σύστημα ελατηρίων

Λύση

Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\Pi = U - W$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος U είναι το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των τεσσάρων ελατηρίων

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

όπου $U_1 = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2$ (το ελατήριο k_1 , έχει ολική επιμήκυνση $x_1 - x_2$)

$U_2 = \frac{1}{2}k_2x_2^2$ (το ελατήριο k_2 , έχει ολική επιμήκυνση x_2)

$U_3 = \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2$ (το ελατήριο k_3 , έχει ολική επιμήκυνση $x_3 - x_2$)

$U_4 = \frac{1}{2}k_4x_3^2$ (το ελατήριο k_4 , έχει ολική επιμήκυνση x_3)

Το εξωτερικό έργο είναι

$$W = x_1F_1 + x_3F_3$$

Η δυναμική ενέργεια Π γίνεται

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_4x_3^2}_U - \underbrace{x_1F_1 - x_3F_3}_W$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος υπολογίζονται από τις μερικές παράγωγους της Π ως προς τους 3 βαθμούς ελευθερίας x_1 , x_2 και x_3 και είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1(x_1 - x_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -k_1(x_1 - x_2) + k_2x_2 - k_3(x_3 - x_2) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = k_3(x_3 - x_2) + k_4x_3 - F_3 = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας υπό μορφή μητρώων είναι:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K} \ 3 \times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D} \ 3 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F} \ 3 \times 1} \quad (\alpha)$$

Οι άγνωστες μετατοπίσεις x_1 , x_2 και x_3 υπολογίζονται από την λύση του συστήματος (α).

Παρατηρούμε ότι το μητρώο \mathbf{K} του συστήματος είναι συμμετρικό της τάξεως 3×3 , όπου 3 είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

β) Ελαστικό σώμα

Σε ένα σώμα όταν ασκούνται φορτία, αναπτύσσονται τάσεις και παραμορφώσεις. Θεωρούμε ότι το σώμα έχει συμπεριφορά ελαστική και γραμμική και αποτελείται από ισότροπο υλικό.

Η σχέση της τάσης-παραμόρφωσης (σ - ϵ), σε ένα σημείο εντός του σώματος (Κεφάλαιο 2) είναι:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} - [E] \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (1.4.7)$$

όπου $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ οι τάσεις

$[E]$ = το μητρώο ελαστικότητας ή το μητρώο του υλικού είναι συμμετρικό μητρώο, διαστάσεων 6×6

$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$ οι παραμορφώσεις $\{\epsilon_0\}$ οι αρχικές παραμορφώσεις και

$\{\sigma_o\}$ οι αρχικές τάσεις (residual stresses) π.χ. λόγω θερμικής κατεργασίας μετάλλου

Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου είναι

$$U_o = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \left(\frac{\text{έργο}}{\text{όγκο}} \quad \text{ή} \quad \frac{F \cdot L}{L^3} \right) \quad (1.4.8)$$

και εκφράζει το έργο των εσωτερικών τάσεων και αποταμιεύεται σαν ενέργεια σε ένα ελαστικό σώμα.

Η μεταβολή της dU_o είναι:

$$dU_o = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} d\gamma_{zx}$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση και έχουμε:

$$\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \dots, \quad \frac{\partial U_o}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}$$

Υπό μορφή μητρώων είναι:

$$\left\{ \frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon} \right\} = \{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} - [E] \{\varepsilon_o\} + \{\sigma_o\}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ως προς την μεταβλητή $\{\varepsilon\}$ και έχουμε:

$$U_o = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \quad (1.4.9)$$

Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος όγκου V είναι

$$\begin{aligned} U &= \int_V U_o dV \\ &= \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \right) dV \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Το εξωτερικό έργο W δημιουργείται από τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται επί του σώματος όγκου V και είναι

$$W = \int_V \{u\}^T \{F\} dV + \int_S \{u\}^T \{T\} dS + \{D\}^T \{P\} \quad (1.4.11)$$

όπου $\{u\}^T = [u \ v \ w]$ οι μετατοπίσεις ενός σημείου ως προς τους άξονες X, Y και Z και είναι $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ και $w = w(x, y, z)$

$\{F\} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ οι δυνάμεις πεδίου (δύναμη ανά όγκο, $\frac{F}{L^3}$),

Όπως για παράδειγμα οι δυνάμεις της βαρύτητας και οι φυγοκεντρικές δυνάμεις:

$\{T\} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ οι δυνάμεις επιφανείας (δύναμη ανά επιφάνεια, $\frac{F}{L^2}$)

S = εμβαδόν επιφανείας σώματος

$\{P\}$ = συγκεντρωμένο φορτίο στους κόμβους (μονάδα δύναμη, F)

$\{D\}$ οι κομβικές μετατοπίσεις (μονάδα μήκος, L)

Η ολική δυναμική ενέργεια Π δίνεται από την εξίσωση (1.4.1) είναι:

$$\Pi = U - W$$

$$\text{ή} \quad \Pi = \int_V U_o dV - W$$

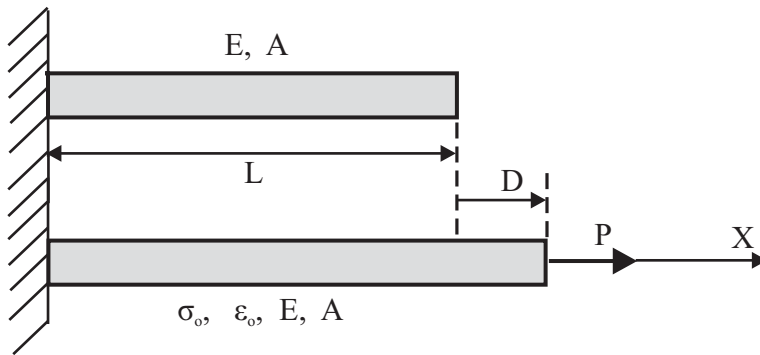
$$= \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \right) dV -$$

$$- \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{T\} dS - \{D\}^T \{P\} \quad (1.4.12)$$

Η εξίσωση (1.4.12) είναι γενική και θα την χρησιμοποιήσουμε στα περισσότερα κεφάλαια του βιβλίου. Ακολουθούν παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.4: Ράβδος με αξονικό φορτίο και με προϋπάρχουσες σ_o και ε_o

Δίδεται η ράβδος του σχήματος Π1.4, με εμβαδόν διατομής A, μέτρο ελαστικότητας E και μήκος L. Στο ελεύθερο άκρο ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο P κατά την αξονική κατεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος έχει προϋπάρχουσα τάση (residual stress) σ_o και ανηγμένη παραμόρφωση ε_o . Να υπολογισθεί η επιμήκυνση D στο άκρο της ράβδου, καθώς και η αναπτυσσόμενη τάση σ_x .



Σχήμα ΠΙ.4 Ράβδος με αρχική παραμόρφωση ε_0 , αρχική τάση σ_0 (residual stress) και με αξονικό φορτίο P.

Λύση

Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου δίνεται από την (1.4.15) και είναι:

$$\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon^T E \varepsilon - \varepsilon^T E \varepsilon_0 + \varepsilon^T \sigma_0 \right) dV - DP \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε όπου $\varepsilon_x = D / L$ στην (1) και έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{D^2}{L^2} E - \frac{D}{L} E \varepsilon_0 + \frac{D}{L} \sigma_0 \right) dV - DP \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{D^2}{L^2} E - \frac{D}{L} E \varepsilon_0 + \frac{D}{L} \sigma_0 \right) AL - DP \end{aligned}$$

Η εξίσωση ισοροπίας προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D} = 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial D} = \left(\frac{1}{2} \frac{2DE}{L^2} - \frac{1}{L} E \varepsilon_0 + \frac{1}{L} \sigma_0 \right) AL - P = 0$$

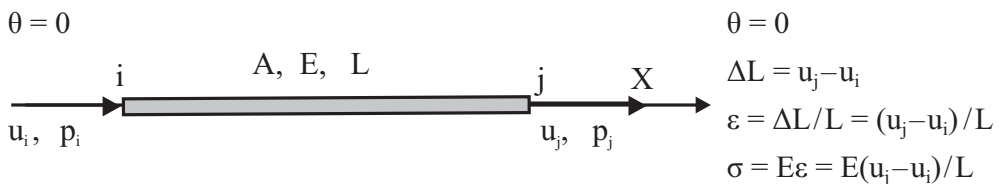
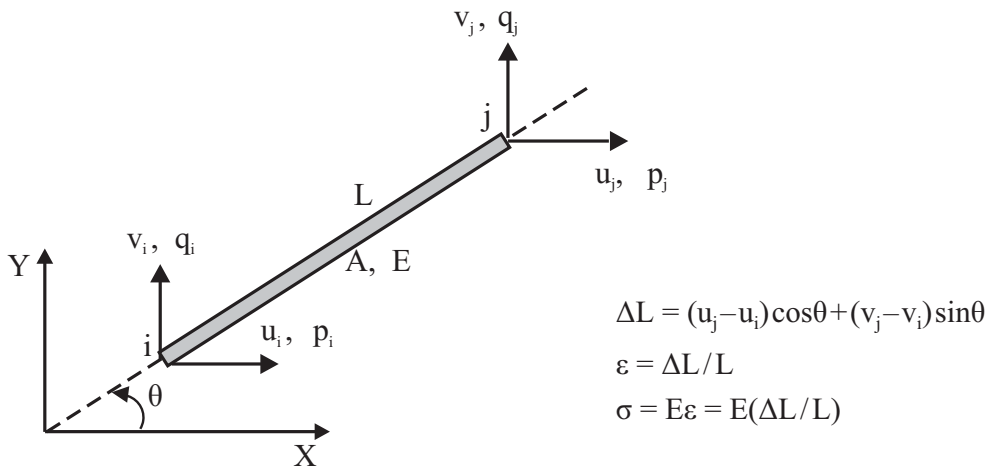
$$\text{ή} \quad D = \frac{PL}{AE} + L \varepsilon_0 - \frac{L \sigma_0}{E}$$

Η τάση σ_x δίδεται από την σχέση (1.4.7)

$$\sigma_x = E \varepsilon - E \varepsilon_0 + \sigma_0 = E \frac{D}{L} - E \varepsilon_0 + \sigma_0 = \frac{P}{A}$$

Παράδειγμα 1.5: Ράβδος δικτυώματος

Στη ράβδο δικτυώματος ij ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις σχήμα Π1.5α. Στον κόμβο i ασκούνται οι δυνάμεις p_i και q_i , και στον κομβο j οι δυνάμεις p_j και q_j . Δίδονται τα εξής στοιχεία της ράβδου: το μήκος L , η διατομή A , το μέτρο ελαστικότητας E , η γωνία θ και ο συντελεστής θερμικής διαστολής α .



Σχήμα Π1.5 Ράβδος δικτυώματος α) σε γωνία θ και β) σε γωνία $\theta=0$.

- α) Να ευρεθούν:
- οι εξισώσεις ισορροπίας,
 - το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου,
 - οι κομβικές μετατοπίσεις u_i, v_i, u_j και v_j και
 - η παραμόρφωση και η τάση.
- β) Όταν η γωνία είναι $\theta=0$ να ευρεθούν
- το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου,
 - η παραμόρφωση και η τάση.

γ) Όταν είναι $\theta=0$ και επιπλέον των μηχανικών φορτίων έχουμε μεταβολή της θερμοκρασίας κατά T° βαθμούς, να ευρεθεί η παραμόρφωση και η τάση.

Λύση

Η ράβδος έχει 4 βαθμούς ελευθερίας, γιατί υπάρχουν 4 μετατοπίσεις οι εξής: στον κόμβο i είναι οι u_i , v_j , και στον κόμβο j οι u_j και v_j , σχήμα Π1.5α. Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι:

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

όπου $W = p_i u_i + q_i v_i + p_j u_j + q_j v_j$ το εξωτερικό έργο των δυνάμεων (2)

U η εσωτερική ενέργεια της ράβδου, όγκου $V = AL$,

$$U = \sigma \cdot \varepsilon \cdot V = (E\varepsilon) \varepsilon \cdot V = \left(E \frac{\Delta L}{L} \right) \left(\frac{\Delta L}{L} \right) (AL) = \frac{AE}{2} \frac{\Delta L^2}{L} \quad (3)$$

Η μεταβολή του μήκους της ράβδου ΔL είναι

$$\Delta L = (u_j - u_i) \cos\theta + (v_j - v_i) \sin\theta = (u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s$$

όπου $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$.

Αντικαθιστούμε το ΔL στην U και είναι

$$U = \frac{AE}{2L} ((u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s)^2 \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε την (2) και (3) στην (1) έχουμε

$$\Pi = \frac{AE}{2L} ((u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s)^2 - p_i u_i - q_i v_i - p_j u_j - q_j v_j \quad (5)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι 4 όσοι είναι και οι βαθμοί ελευθερίας και είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0 \quad (6)$$

Από την (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{AE}{L} (-u_j c^2 + u_i c^2 - v_j s c + v_i s c) = p_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{AE}{2L} (-u_j c s + u_i c s - v_j s^2 + v_i s^2) = q_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{AE}{L}(u_j c^2 - u_i c^2 + v_j sc - v_i sc) = p_j$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{AE}{L}(u_j cs - u_i cs + v_j s^2 - v_i s^2) = q_j$$

Όπου $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$ (7)

α) Οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας γράφονται υπό μορφή πινάκων

$$\frac{AE}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -sc \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}, 4 \times 4} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}, 4 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}, 4 \times 1} \quad (8)$$

ή $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}$

Από την εξίσωση ισορροπίας (8) υπολογίζονται οι άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις u_i, v_i, u_j και v_j .

Το μητρώον δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό της τάξεως 4×4 .

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -sc \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad \text{όπου } c = \cos\theta \text{ και } s = \sin\theta \quad (9)$$

Παρατήρηση

Το μητρώο δυσκαμψίας (stiffness matrix) στην ελληνική βιβλιογραφία το ονομάζουν μητρώο ακαμψίας ή και μητρώο στιβαρότητας.

Η παραμόρφωση ε είναι

$$\varepsilon = \Delta L/L = [(u_j - u_i)\cos\theta + (v_j - v_i)\sin\theta]/L$$

Η τάση σ είναι

$$\sigma = E\varepsilon = E(u_j - u_i) \cos\theta + (v_j - v_i) \sin\theta / L$$

β) Όταν $\theta = 0^\circ$ ($c = \cos 0^\circ = 1$ και $s = \sin 0^\circ = 0$) σχήμα Π1.5, η ράβδος έχει 2 βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις οριζόντιες μετατοπίσεις u_i και u_j . Απαλείφουμε τις γραμμές και τις στήλες που αντιστοιχούν στις κατακόρυφες μετατοπίσεις v_i και v_j εξίσωση (8) και έχουμε

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου για $\theta = 0^\circ$ είναι

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Η μεταβολή του μήκους της ράβδου ΔL είναι

$$\Delta L = u_j - u_i$$

η παραμόρφωση λόγω του συγκεντρωμένου φορτίου είναι:

$$\varepsilon = \Delta L / L = (u_j - u_i) / L$$

η τάση είναι:

$$\sigma = E\varepsilon = E(u_j - u_i) / L.$$

γ) Η παραμόρφωση ε λόγω των φορτίων και της μεταβολής της θερμοκρασίας κατά T° είναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{φορτίο}} - \varepsilon_{T^\circ} = (u_j - u_i) / L - \alpha T^\circ$$

Η τάση είναι:

$$\sigma = \sigma_{\text{φορτίο}} - \sigma_{T^\circ} = E(u_j - u_i) / L - E\alpha T^\circ.$$

1.5 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ RAYLEIGH-RITZ

Η μέθοδος του Rayleigh-Ritz είναι μια γενική μέθοδος. Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμοσθεί η μέθοδος του Rayleigh-Ritz με την χρήση της ολικής δυναμικής ενέργειας.

α) Η κλασική μέθοδος του Rayleigh-Ritz

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σώμα (ή μια κατασκευή) που έχει ελαστική συμπεριφορά, ασκούνται δυνάμεις και θέλουμε να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις του σώματος. Με την κλασική μέθοδο του Rayleigh-Ritz, οι μετατοπίσεις u , v και w οι οποίες είναι παράλληλες ως προς τους άξονες X , Y και Z θεωρούμε ότι δίνονται προσεγγιστικά από τις σχέσεις:

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i, \quad \text{όπου } f_i = f_i(x, y, z), \quad i = 1, \dots, l \quad (1.5.1)$$

$$v = \sum_{j=1}^m b_j g_j, \quad \text{όπου } g_j = g_j(x, y, z), \quad j = 1, \dots, m \quad (1.5.2)$$

$$w = \sum_{k=1}^n c_k h_k, \quad \text{όπου } h_k = h_k(x, y, z), \quad k = 1, \dots, n \quad (1.5.3)$$

όπου: f_i , g_j , h_k συνήθως είναι πολυώνυμα,

a_i , b_j και c_k είναι άγνωστοι και θα υπολογισθούν παρακάτω.

Οι προσεγγιστικές λύσεις των u , v και w πρέπει να είναι κινηματικά επιτρεπτές, δηλαδή να ικανοποιούν τις κινηματικές οριακές συνθήκες (τις μετατοπίσεις).

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι της μορφής:

$$\Pi = \Pi(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n),$$

και έχουμε τις $l+m+n$ εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (1.5.4\alpha)$$

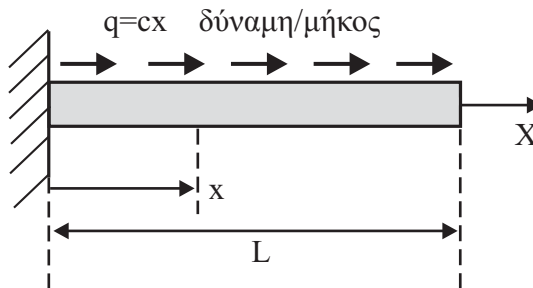
$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.5.4\beta)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.5.4\gamma)$$

Από το πλήθος των $l+m+n$ εξισώσεων, υπολογίζονται οι $l+m+n$ άγνωστοι a_i , b_j και c_k .

Παράδειγμα 1.6: Rayleigh-Ritz, Μονόπακτη ράβδος

Δίδεται ράβδος μήκους L , διατομής A και μέτρου ελαστικότητας E . Η ράβδος στο ένα άκρο είναι πακτωμένη ενώ στο άλλο είναι ελεύθερη. Ασκείται φορτίο κατά μήκος της ράβδου $q=cx$ (δύναμη/μήκος) όπου c είναι μια σταθερά με μονάδες δύναμη ανά μήκος στο τετράγωνο, σχήμα Π1.6. Να υπολογισθεί η μετατόπιση και αναπτυσσόμενη τάση στην ράβδο. Η συμπεριφορά της ράβδου είναι ελαστική και γραμμική.



Σχήμα Π1.6 Ράβδος με συνεχές φορτίο.

Λύση

Η ολική δυναμική ενέργεια της ράβδου Π είναι:

$$\Pi = U - W$$

$$\text{όπου: } W = \int_0^L q u \, dx \quad \text{και} \quad q = cx$$

$$U = \int_V U_o \, dV \quad \text{η ενέργεια παραμόρφωσης} \quad (1)$$

Η U_o είναι η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου. Για την περίπτωση της ράβδου είναι:

$$U_o = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} (E \varepsilon_x) \varepsilon_x = \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2.$$

Αντικαθιστούμε την U_o από την παραπάνω εξίσωση στην (1) και θέτουμε όπου $dV = A dx$ έχουμε:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 (A dx)$$

$$\text{Άρα } \Pi = \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L c x u dx \quad (2)$$

Σκοπός είναι να υπολογίσουμε την άγνωστη μετατόπιση u . Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση u ορίζεται από μία συνάρτηση, και βάση αυτής λύνουμε το πρόβλημα. Για να εφαρμοσθεί η μέθοδος του Rayleigh-Ritz, πρέπει η συνάρτηση της μετατόπισης u να είναι επιτρεπτή συνάρτηση, δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί τις κινηματικές οριακές συνθήκες (γεωμετρικές συνθήκες), αλλά δεν υποχρεούται να ικανοποιεί τις φυσικές οριακές συνθήκες (δυνάμεις, ροπές, τάσεις).

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά διάφορες επιτρεπτές συναρτήσεις και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους. Οι παρακάτω περιπτώσεις θα εξετασθούν

$$\begin{aligned} u &= ax && \text{(γραμμική μορφή)} \\ u &= a_1 x + a_2 x^2 && \text{(παραβολική μορφή)} \\ u &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 && \text{(κυβική μορφή)} \\ u &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m && \text{(πολύωνυμο } m \text{ βαθμού)} \end{aligned}$$

Άγνωστοι είναι οι συντελεστές a, a_1, a_2, \dots, a_m τους οποίους και θα υπολογίσουμε παρακάτω.

Στο σχήμα Π1.4 στο αριστερό μέρος της ράβδου, $x=0$ έχουμε πάκτωση, άρα η κινηματική ή γεωμετρική οριακή συνθήκη είναι: $u=0$.

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι επιτρεπτές συναρτήσεις γιατί ικανοποιούν την παραπάνω κινηματική οριακή συνθήκη, δηλαδή για $x=0$ είναι $u=0$.

1) Δοκιμή με $u = ax$ (3)

Η συνάρτηση u είναι επιτρεπτή συνάρτηση γιατί είναι $u=0$ για $x=0$. Η u δεν ικανοποιεί την φυσική οριακή συνθήκη $\sigma=0$ για $x=L$, αλλά δεν πειράζει γιατί δεν απαιτείται να ικανοποιείται η συνθήκη. Αντικαθιστούμε στην Π όπου $u=ax$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{dax}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L c x a x dx \\ &= \frac{EA}{2} La^2 - \frac{cL^3}{3} a \end{aligned}$$

Η εξίσωση ισορροπίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{EA}{2} L 2a - \frac{cL^3}{3} = 0$$

Άρα $a = \frac{cL^2}{3AE}$, και από την (3) έχουμε ότι η μετατόπιση είναι: $u = \frac{cL^2}{3AE} x$

$$\text{Η ορθή τάση } \sigma \text{ είναι: } \sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} = E \frac{d\left(\frac{cL^2 x}{3AE}\right)}{dx} = \frac{cL^2}{3A}$$

2) Δοκιμή με $u = a_1 x + a_2 x^2$ (4)

Αντικαθιστούμε την τιμή της (4) στη (2) έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \frac{E}{2} \left(\frac{d(a_1 x + a_2 x^2)}{dx} \right)^2 A dx - \int_0^L c x (a_1 x + a_2 x^2) dx \\ &= \int_0^L \frac{E}{2} (a_1 + 2a_2 x)^2 A dx - \int_0^L (ca_1 x^2 + ca_2 x^3) dx \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2) dx - \int_0^L (ca_1 x^2 + ca_2 x^3) dx \\ &= \frac{EA}{2} \left(a_1^2 L + 2a_1 a_2 L^2 + \frac{4}{3} a_2^2 L^3 \right) - c \frac{L^3}{3} a_1 - c \frac{L^4}{4} a_2 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{EA}{2} (2a_1 L + 2a_2 L^2) - \frac{cL^3}{3} = 0$$

$$\text{ή} \quad AEL(a_1 + a_2 L) = \frac{4cL^3}{12} \quad (5.a)$$

$$\text{Παρόμοια} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{EA}{2} \left(2a_1 L^2 + \frac{4}{3} 2a_2 L^3 \right) - \frac{cL^4}{4} = 0$$

$$\text{ή} \quad AEL(La_1 + \frac{4}{3}L^2a_2) = \frac{3cL^4}{12} \quad (5.\beta)$$

Υπό μορφήν μητρώων οι εξισώσεις (5.α) και (5.β) γίνονται:

$$AEL \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4cL^3}{12} \\ \frac{3}{12}cL^4 \end{Bmatrix} \quad \text{και έχουμε:} \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL}{12AE} \begin{Bmatrix} 7L \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές των a_1 και a_2 στην (4) έχουμε

$$u = \frac{cL}{12AE}(7Lx - 3x^2)$$

$$\text{Η τάση στην ράβδο είναι} \quad \sigma = E \frac{du}{dx} = \frac{cL}{12A}(7L - 6x)$$

$$\mathbf{3) \text{ Δοκιμή με } u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3} \quad (6)$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο του Rayleigh-Ritz και ευρίσκουμε ότι

$$a_1 = \frac{cL^2}{2AE}, \quad a_2 = 0 \quad \text{και} \quad a_3 = -\frac{c}{6AE}$$

αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (6) έχουμε:

$$u = \frac{c}{6AE}(3L^2x - x^3)$$

Η υπολογισθείσα τιμή της u είναι η ακριβής λύση, και συμπίπτει με την αναλυτική λύση.

$$\text{Η τάση είναι:} \quad \sigma = E\varepsilon_x = E \frac{du}{dx} = \frac{c}{2A}(L^2 - x^2)$$

$$\mathbf{4) \text{ Δοκιμή με } u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m} \quad (7)$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο του Rayleigh-Ritz και ευρίσκουμε ότι

$$a_1 = \frac{cL^2}{2AE}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{c}{6AE} \quad \text{και} \quad a_4 = \dots = a_m = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το πολυώνυμο της τρίτης τάξεως δίνει ακριβή λύση, τότε οι συντελεστές του πολυωνύμου με υψηλότερους όρους είναι μηδέν και συνεπώς δεν χρειάζεται να εξετάζουμε πολυώνυμο υψηλότερης τάξης του τρία.