ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΣΟΦΙΑΣ ΚΑΛΠΑΖΙΔΟΥ
Αναπληρώτριας Καθηγήτριας
Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΧΡΥΣΟΥΛΑΣ ΓΚΑΝΑΤΣΙΟΥ
Διδάκτορος
Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1996

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τις συγγραφείς

ISBN 960-431-353-3

Φωτοστοιχειοθεσία - Εκτύπωση **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
Σόλωνος 79-81 ☎ (031) 825 453, 849 178
Θεσσαλονίκη 542 48 Fax (031) 825 453, 849 178

Βιβλιοπωλείο **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 ☎ (031) 203 720
Θεσσαλονίκη 546 35 Fax (031) 211 305

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Μαθηματική Ψυχολογία αποτελεί ξεχωριστό κλάδο της Πειραματικής Ψυχολογίας, που αναπτύχθηκε πολύ γρήγορα τα τελευταία 40 χρόνια, με τη συμβολή της Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων. Ο όρος «μαθηματική ψυχολογία», όπως και ο όρος «πειραματική ψυχολογία», προσδιορίζει μια μέθοδο και όχι ένα συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογών.

Η Μαθηματική Ψυχολογία αποτελεί μια προχωρημένη σύνθεση της ψυχολογίας και των στοχαστικών μαθηματικών και έχει σαν στόχο τη συστηματική μελέτη τυχαίων φαινομένων, που εμφανίζονται στην ψυχολογία. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η Μαθηματική Ψυχολογία εξελίχθηκε ως ανεξάρτητο πεδίο, προς το εσωτερικό της Ψυχολογίας αλλά και προς τα σύνορά της με τα μαθηματικά δίνοντας σπουδαία ώθηση στην ανάπτυξη σύγχρονων μαθηματικών θεωριών, όπως η θεωρία των «fractals».

Το παρόν βιβλίο περιέχει στοιχεία μαθηματικής ψυχολογίας με έμφαση στη σύγχρονη μαθηματική θεωρία μάθησης, όπως θεμελιώθηκε αρχικά, κατά το 1955, από τους R.R. Bush και F. Mosteller και αργότερα (1960-1970) από τον M.F. Norman.

Το βιβλίο αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη μαθηματική ψυχολογία. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι στοχαστικές δομές και η έννοια της στοχαστικής εξάρτησης με βάση την αξιωματική θεμελίωση του A.N. Kolmogorov.

Η κύρια μορφή στοχαστικής εξάρτησης, που παρουσιάζουμε σ' αυτό το βιβλίο, είναι η Μαρκοβιανή εξάρτηση, δίνοντας έμφαση στη μορφή, με την οποία αυτή εμφανίζεται στα διάφορα φαινόμενα μάθησης, που θα μελετήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο.

Οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούμε είναι οι πιθανοθεωρητικές, ενώ οι διδακτικές μέθοδοι παρουσίασης του κειμένου είναι κυρίως η ευρετική και η επαγωγική. Έτσι, το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από τους φοιτητές, που έχουν ελάχιστη επαφή με τα μαθηματικά.

Η αρχική ιδέα για τη διδασκαλία μαθημάτων μαθηματικής ψυχολογίας ξεκίνησε από τη συνεργασία μας με την καθηγήτρια κ. Χαρίτου-Φατούρου Μίκα, που προσέφερε το πλαίσιο των μαθημάτων της στο Τμήμα Ψυχολογίας του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για να παρουσια-

στούν για πρώτη φορά στους φοιτητές μερικά στοιχεία μαθηματικής ψυχολογίας. Στη συνέχεια ο καθηγητής κ. Δημητρίου Α., που παραβρέθηκε σ' ένα από τα μαθήματα αυτά, προώθησε με τη δυναμική που τον εκφράζει, την ιδέα μαθημάτων μαθηματικής ψυχολογίας στο Τμήμα Ψυχολογίας.

Ευχαριστούμε θερμά και τους δύο.

Ευχαριστούμε επίσης τους καθηγητές του Τμήματος Ψυχολογίας, κ. Καργόπουλο Φίλιππο και κ. Μπαϊρακτάρη Κώστα, για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις γύρω από τη Μαθηματική Ψυχολογία. Τέλος στο τυπογραφείο Π. Ζήτη, οφείλουμε την ευσυνειδησία και την εξαιρετική προσπάθεια, που κατέβαλε στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 1996 *Οι συγγραφείς*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

Στις αρχές του 20ου αιώνα η κρίση των θετικών επιστημών οδηγεί πιο πειστικά στο συμπέρασμα ότι οι κλασικές επιστήμες, όπως Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία κ.λπ. δεν μπορούν να εξελιχθούν πλέον μέσα σε αυστηρά συνοριακά πλαίσια. Εμφανίζονται σπουδαίες ιδέες στα Μαθηματικά, που αντλούν την αρχική τους έμπνευση και αιτιολόγηση είτε από πλησιέστερους κλάδους, όπως η Φυσική, η Χημεία, η Οικονομία κ.λπ. είτε από λιγότερο συναφείς κλάδους, όπως η Βιολογία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Ανθρωπολογία, η Γλωσσολογία κ.λπ. Έτσι, η επιστημονική έρευνα μετατοπίζεται είτε προς τα σύνορα μεταξύ των κλασικών επιστημών, καθιερώνοντας καινούριους κλάδους, όπως η Μαθηματική Φυσική, η Μαθηματική Οικονομία, η Θεωρία της Πληροφορίας, η Μαθηματική Ψυχολογία κ.λπ. είτε προς το εσωτερικό τους, θεμελιώνοντας καινούρια κεφάλαια έρευνας.

Ίσως είναι λιγότερο γνωστό ότι, για παράδειγμα, μια από τις θεμελιώδεις πηγές της Θεωρίας της Πληροφορίας βρίσκεται στις μελέτες των A.A. Markov και A.N. Kolmogorov (κατά το 1908) πάνω στην κωδικοποίηση φιλολογικών κειμένων, που μεταγενέστερα εξελίχθηκαν στη **Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών** (stochastic processes). Η θεωρία αυτή μελετάει την εξέλιξη (στο χρόνο ή στο χώρο) τυχαίων φαινομένων του φυσικού και κοινωνικού κόσμου. Η τυποποίηση των τυχαίων φαινομένων επιτεύχθηκε με την αξιωματική θεμελίωση του Kolmogorov, που γύρω στα 1930 κατέγραψε τις κύριες αρχές των νόμων των πιθανοτήτων.

Αργότερα, στη δεκαετία του '50, οι στοχαστικές διαδικασίες προσέφεραν ιδανικές μορφές τυποποίησης των **διαδικασιών μάθησης** (learning processes), καθώς οι τελευταίες παρουσιάζουν μια διακριτή δομή, που μπορεί να παρατηρηθεί μέσα από πειράματα. Ήδη από το 1930, ο Thurstone είχε προβάλει την ιδέα ότι η μάθηση θα μπορούσε να είναι μια διαδικασία δειγματοληψίας από μια συλλογή δυνατών αντιδράσεων ως προς μια συγκεκριμένη περίπτωση ερεθίσματος. Οι ανεπιτυχείς αντιδράσεις θα είχαν μια σταθερή πιθανότητα να αποκλεισθούν, αφότου θα άρχιζε η μάθηση, και αυτή θα μπορούσε να υπολογισθεί για κάθε επιτυχημένη «απόπειρα». Η ιδέα αυτή υιοθετήθηκε από τους R.R. Bush και F. Mosteller στο βιβλίο τους

«**Στοχαστικά Μοντέλα για τη Μάθηση**» (1955) και από τον W.K. Estes σε κάποιο άρθρο του στην «**Ψυχολογική Επιθεώρηση**» (1955). Έτσι, επινοήθηκαν σύνθετα στοχαστικά μοντέλα, για να προβλεφθεί ποιες δυνατές απαντήσεις, σε μια απλή συνθήκη εξάρτησης, είναι πιθανόν να αποκλεισθούν και ποιες να διατηρηθούν σε κάθε επανάληψη των δυαδικών δοκιμών τύπου σωστό - λάθος. Αυτά στοιχειοθέτησαν έναν καινούριο τύπο θεωρίας της μάθησης, που ανήκει στη Μαθηματική Ψυχολογία.

Η Μαθηματική Ψυχολογία είναι ένας συνοριακός κλάδος μεταξύ των Μαθηματικών και της Ψυχολογίας, που μελετάει μοντέλα, κυρίως στοχαστικά, των διαφόρων φαινομένων και συστημάτων, που εμφανίζονται στην Ψυχολογία και ειδικότερα στην Πειραματική Ψυχολογία, Κλινική Ψυχολογία και στην Κοινωνική Ψυχολογία.

Στις δεκαετίες του 60 και 70, μια κατεύθυνση της Μαθηματικής Ψυχολογίας εξελίχθηκε μέσα από τα άρθρα του M.F. Norman στο «Journal of Mathematical Psychology» και μέσα από το βιβλίο του «Μαρκοβιανές Ανελίξεις και Μοντέλα Μάθησης», προς μία σύγχρονη μαθηματική θεωρία, με σπουδαία ώθηση των αφηρημένων μαθηματικών. Για παράδειγμα, αυτή η κατεύθυνση στοιχειοθέτησε τη σύγχρονη μαθηματική θεωρία των «fractals».

Πριν κλείσουμε αυτή την εισαγωγή, θα ήταν ίσως ωφέλιμο να αναφέρουμε ότι η Ψυχολογία και τα Στοχαστικά Μαθηματικά είχαν ήδη πολλές σημαντικές τομές, πριν τη θεμελίωση της Ψυχολογίας από τον Wilhelm Wundt (1832-1920). Ήδη στα αρχαία ελληνικά συγγράμματα συναντάμε τις πρώτες έμμεσες αναφορές σε θέματα ψυχολογικής φύσης, που μαρτυρούν τη μακρινή καταγωγή όρων της Ψυχολογίας. Συγκεκριμένα, στη «Φυσιογνωμική» του Αριστοτέλη εμφανίζονται συσχετισμοί μεταξύ της ιδιοσυγκρασίας ενός ατόμου και της φυσιογνωμίας του. Η σχολαστική και η νέο-σχολαστική προσέγγιση (κατά το μεσαίωνα) παραγκωνίστηκαν από το ρασιοναλισμό των μαθηματικών René Descartes (1969-1750) και Leibniz (1646-1716). Ο Christian Wolff (1679-1754), επηρεασμένος από τον Leibniz, προσπάθησε να δώσει μια συστηματική ιεράρχηση της Ψυχολογίας, αρχικά στη γλώσσα των ρασιοναλιστών και μεταγενέστερα σαν ένα σύστημα γνώσης των πραγμάτων. Σ' αυτόν οφείλουμε διάφορους όρους της Ψυχολογίας.

Ίσως να είναι λιγότερο γνωστό ότι ο βρετανός Francis Galton (1822-1911), που κατέχει αναγνωρισμένη θέση στην ιστορία της Ψυχολογίας, θεωρείται επίσης ότι έχει συμβάλει σημαντικά στην προώθηση μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, που αργότερα σημάδεψαν τη Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών. Ο Galton δημοσίευσε στο περιοδικό του Λονδίνου «The Educational Times» (Απρίλης, 1873), ένα άρθρο για την εκτίμηση της εξαφάνισης ενός πληθυσμού. Σ' αυτό το άρθρο για την εξέλιξη ενός πληθυσμού μέσα στο χρόνο πρότεινε ένα μοντέλο που αργότερα αποδείχθηκε ότι δεν ήταν παρά μια στοχαστική διαδικασία, που σήμερα φέρει το όνομά του.

Ο Galton, ως βιολόγος, ανήκε στην «εξελικτική» σχολή του Charles Darwin (1809-1882), οπότε στο μοντέλο του για την εξέλιξη των πληθυσμών γνώριζε ήδη για τις διαφοροποιήσεις μεταξύ των ατόμων ενός είδους ζωϊκών ή φυτικών οργανισμών καθώς και για τη μεταδοτικότητα αυτών των διαφοροποιήσεων. Έτσι, ο Francis Galton θεωρείται σήμερα πρόδρομος της διαφορικής ψυχολογίας (differential psychology).

Η σύνδεση του Galton με αυτό που ονομάζουμε σήμερα στοχαστικό μοντέλο, ήταν επακόλουθο των ερευνών του στα πλαίσια της διαφορικής ψυχολογίας, όπου αντικατέστησε την αρχική του ποιοτική προσέγγιση με μια ποσοτική. Σ' αυτήν την κατεύθυνση, ο Galton είχε εντυπωσιαστεί από τα αποτελέσματα του Βέλγου μαθηματικού Quetelet, στα 1846, που έδειχναν ότι η περίμετρος του στήθους ενός αριθμού στρατιωτών ακολουθούσε την κανονική κατανομή, δηλαδή οι περίμετροι $E_1, E_2, \ldots,$ ήταν τυχαίοι αριθμοί μιας στοχαστικής διαδικασίας τύπου Markov έτσι, όπως θα τη δούμε στο τρίτο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου. Ο ίδιος ο Galton είχε παρατηρήσει σε μια έρευνά του (1869) ότι οι βαθμοί στα μαθηματικά, στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, ακολουθούσαν μια παρόμοια στοχαστική κατανομή.

Στη συνέχεια, ο Galton συγκέντρωσε στοιχεία για κάποιες οικογένειες φυτών, όπως το μήκος των φύλλων αυτών των φυτών κ.λπ. Έτσι κατέληξε στην αντικατάσταση των διαφοροποιήσεων μεταξύ των ατόμων, ως διακριτή ποιοτική ακολουθία, από μια ποσοτική συνέχεια, έχοντας μια τυπική αναπαράσταση στην έννοια, που σήμερα ονομάζεται στοχαστική διαδικασία κανονικής κατανομής.

Για να αποδείξει όλα αυτά, ο Galton κατάφερε να συλλέξει ένα μεγάλο αριθμό ανθρωπομετρικών δεδομένων. Στη συνέχεια, για να εξελίξει την προσέγγισή του προς τον ψυχολογικό τομέα, ο Galton επινόησε μερικά εργαλεία μέτρησης της αισθητηριακής διάκρισης και άλλων λειτουργιών. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να εμφανιστούν τα πρώτα **νοητικά τεστ**, τα οποία ονομάστηκαν έτσι λίγο αργότερα από τον James McKeen Cattell.

Για να δείξει τη μορφή της κατανομής των ατομικών διαφοροποιήσεων, ο Galton χρησιμοποίησε αυτό, που σήμερα ονομάζεται **πίνακας πυκνοτήτων κατανομής**. Έτσι, παρατήρησε ότι η μεγαλύτερη πυκνότητα εμφανιζόταν πάντοτε στη μέση περιοχή των δεδομένων, όπως σήμερα βλέπουμε στη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής.

Παρ' όλο που στις λεπτομέρειες οι μέθοδοι του Galton ήταν συχνά πρωτόγονες, στην ουσία περιείχαν μια πρωτοποριακή τάση προσδιορισμού των νόμων του φυσικού κόσμου. Αυτά είναι ίσως καλύτερα διατυπωμένα στην εισαγωγή του στη μέθοδο συσχέτισης (correlation method) (1888), μια μέθοδο που εκφράστηκε πιο αυστηρά μαθηματικά από τον Karl Pearson στα τέλη του περασμένου αιώνα. Έτσι, οι κυριότερες ιδέες, όπως ο πίνακας συσχέτισης, η έννοια της οπισθοδρόμησης προς τη μέση τιμή, ο συντελεστής συσχέτισης κ.λπ. παραμένουν πρωτότυπες ιδέες του Galton.

Η ποσοτική αντίληψη των ατομικών διαφοροποιήσεων, των νοητικών τεστ και των στοχαστικών μεθόδων ήταν εξίσου πειστικές για τον Galton για την υποστήριξη της άποψης ότι οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των ατόμων είναι έμφυτες και κληρονομικές. Έτσι, παράλληλα με τον G. Mendel, που διατύπωνε εκείνο τον καιρό τους νόμους της κληρονομικότητας, ο Galton συμπέρανε ότι υπάρχουν ιδιότητες, που μεταδίδονται από γενιά σε γενιά.

Αλλά το πιο σημαντικό επίτευγμα του Galton στην τυποποίηση των δεδομένων των πειραμάτων του, παραμένει το μοντέλο, που σήμερα ονομάζεται **διαδικασία** των **F. Galton, H.W. Watson** και **I.J. Bienaymé** (βλέπε κεφάλαιο III). Συμβαίνει η ίδια διαδικασία να μπορεί να τυποποιήσει και άλλα τυχαία φαινόμενα, όπως η σχάση ουδετερονίων στη Φυσική κ.λπ. Αυτή η διαδικασία μελετήθηκε μεταγενέστερα, προάγοντας την έρευνα των αφηρημένων μαθηματικών θεωρημάτων και βοηθώντας στην επίλυση σημαντικών προβλημάτων της κοινωνιολογίας, ψυχολογίας, βιολογίας, γενετικής κ.λπ. Για παράδειγμα, το πρόβλημα εξαφάνισης ενός επωνύμου, που στηρίζεται στο μοντέλο του Galton, βρίσκει μια ακριβή απάντηση μετά το 1930. Έτσι, η πιθανότητα εξάλειψης ενός επωνύμου, που κατάγεται από ένα μοναδικό άντρα, αποδεικνύεται να είναι $0{,}819$ (απροσδόκητα μεγάλη). Αντίθετα, εάν αρχικά υπάρχουν m άντρες με το ίδιο επώνυμο και οι απόγονοί τους εμφανίζονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, τότε η πιθανότητα να εξαφανιστεί αυτό το επώνυμο είναι $(0{,}819)^m$, που γίνεται μικρή για μεγάλο m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

2.1. Άλγεβρα γεγονότων

Οι αρχές της Θεωρίας Πιθανοτήτων συνδέονται με τις πρώτες παρατηρήσεις πειραμάτων, που μπορούν να επαναληφθούν άπειρες φορές (κάτω από τις ίδιες συνθήκες). Το **πείραμα** θεωρείται «αρχική έννοια» στη Θεωρία Πιθανοτήτων, δηλαδή είναι μια έννοια, που δεν ορίζεται αυστηρά και που χρησιμοποιείται στον ορισμό όλων των υπόλοιπων εννοιών αυτής της θεωρίας. Στα συγγράμματα του Αριστοτέλη ανακαλύπτουμε πολλές αναφορές σε παιχνίδια τύπου «λόττο», που πραγματοποιούνταν στις ελληνικές αγορές. Αυτά τα παιχνίδια μπορούμε να τα θεωρήσουμε «πειράματα», ενώ τα αντίστοιχα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται ως «τυχαία». Γι' αυτό, πολλές φορές τα πειράματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων ονομάζονται «τυχαία πειράματα».

Αργότερα, τα τυχαία πειράματα εκφράστηκαν από τα τυχερά παιχνίδια γύρω από τη ρίψη των ζαριών ή τη χρήση της τράπουλας.

Τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος ονομάζονται **απλά γεγονότα** ή **απλά ενδεχόμενα**. Κάθε συλλογή απλών γεγονότων καλείται **γεγονός** ή **ενδεχόμενο**.

Το γεγονός, που περιέχει όλα τα απλά γεγονότα καλείται **δειγματοχώρος**. Αυτός συμβολίζεται κατά παράδοση με το γράμμα **Ω**.

Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα κέρμα και συμβολίζουμε με «$\varkappa$» και «$\overline{\varkappa}$» την εμφάνιση της όψης με κεφαλή και της όψης με αριθμό, όταν ρίχνουμε το κέρμα μία φορά. Τότε ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega =$ $= \{\varkappa, \overline{\varkappa}\}$. Εάν όμως ρίξουμε το κέρμα δύο φορές, τότε ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{(\varkappa, \varkappa), (\varkappa, \overline{\varkappa}), (\overline{\varkappa}, \varkappa), (\overline{\varkappa}, \overline{\varkappa})\}$. Επίσης, εάν εκτελέσουμε το πείραμα ρίψης ενός ζαριού μια φορά, τότε παρατηρούμε ότι ο αντίστοιχος δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Δεν πρέπει όμως να φανταστούμε ότι ο δειγματοχώρος είναι πάντα ένα πεπερασμένο σύνολο. Για παράδειγμα, ο δειγματοχώρος, που αντιστοιχεί στο πείραμα τυχαίας επιλογής ενός φυσικού αριθμού, είναι το απειραριθμήσιμο σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Όπως παρατηρούμε, οποιοδήποτε γεγονός είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου. Θα συμβολίζουμε τα γεγονότα με τα κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου (A, B, C, …), ή με τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου (Α, Β, Γ, …).

Κάθε απλό γεγονός, που ανήκει στο γεγονός A, ονομάζεται **ευνοϊκό** απλό γεγονός για το A. Θα λέμε ότι το γεγονός A **συμβαίνει** ή πραγματοποιείται, όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται μια φορά, εάν και μόνο εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ευνοϊκό για το A. Όλος ο δειγματοχώρος Ω θα ονομάζεται **σίγουρο** γεγονός, ενώ το κενό σύνολο $\varnothing$ **αδύνατο** γεγονός. Αυτές οι ονομασίες αιτιολογούνται ως εξής: το γεγονός Ω συμβαίνει σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση του πειράματος, ενώ το $\varnothing$ δε συμβαίνει σε καμιά πραγματοποίηση του πειράματος.

Θα λέμε ότι το γεγονός A **συνεπάγεται** το γεγονός B, εάν $A \subset B$. Δύο γεγονότα καλούνται **ισοδύναμα**, εάν το ένα συνεπάγεται το άλλο, δηλαδή $A = B$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε πράξεις, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να βρούμε καινούρια γεγονότα από αρχικά δεδομένα γεγονότα.

Έστω A και B γεγονότα του ίδιου δειγματοχώρου Ω. Ορίζουμε ως **ένωση** των γεγονότων A και B, που συμβολίζεται με $A \cup B$, το γεγονός που περιέχει τα απλά γεγονότα, που ανήκουν είτε στο A, είτε στο B, είτε και στα δύο μαζί. Ανάλογα, ορίζουμε ως **τομή** των γεγονότων A και B, που συμβολίζεται με $A \cap B$, το γεγονός που περιέχει εκείνα τα απλά γεγονότα που ανήκουν τόσο στο A, όσο και στο B.

Τέλος, ορίζουμε ως **συμπλήρωμα** του γεγονότος A, που συμβολίζεται με A^c, το γεγονός που περιέχει τα απλά γεγονότα, που δεν ανήκουν στο A.

Για παράδειγμα, εάν εκτελέσουμε το πείραμα ρίψης ενός ζαριού μία φορά, τότε ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Έστω

$$A = \{i \in \Omega: \ i \text{ είναι άρτιος αριθμός}\},$$

$$B = \{i \in \Omega: \ i \geq 4\}.$$

Τότε

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap B = \{4, 6\},$$

$$A^c = \{1, 3, 5\},$$

$$B^c = \{1, 2, 3\}.$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε ως **ένωση n>2 γεγονότων** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, που συμβολίζεται με $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, το γεγονός που περιέχει όλα τα απλά γεγονότα που ανήκουν τουλάχιστον σ’ ένα από τα A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Ανάλογα, η **τομή των n>2 γεγονότων** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, που συμβολίζεται με $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, είναι το γεγονός, που περιέχει όλα τα απλά γεγονότα, που ανήκουν σ’ όλα τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Δύο γεγονότα A και B καλούνται **ξένα**, αν δεν έχουν κοινά απλά ενδεχόμενα, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$. Αναφέρουμε στη συνέχεια μερικές κύριες ιδιότητες των πράξεων, που ορίσθηκαν παραπάνω:

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \Omega = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

Οι τελευταίες ισότητες ονομάζονται **νόμοι του de Morgan**.

Η ανάλυση πολλών πειραμάτων έχει οδηγήσει στα εξής συμπεράσματα:

i) Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος πραγματοποιείται πάντα ένα αποτέλεσμα, που ανήκει στο δειγματοχώρο. Κατά συνέπεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δειγματοχώρος Ω είναι ένα γεγονός.

ii) Αν θεωρήσουμε ένα γεγονός A, τότε στην εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα ανήκει ή δεν ανήκει στο A, δηλαδή συμβαίνει είτε το A είτε το A^c. Έτσι, λογικό είναι να θεωρήσουμε το A^c γεγονός, αφού το A είναι γεγονός.

iii) Τέλος, θεωρούμε τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots$. Εάν στην εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα $A_1, A_2, \ldots$, τότε συμβαίνει το γεγονός $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Έτσι, όταν τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι γεγονότα, οδηγούμαστε στο να θεωρήσουμε ως γεγονός και την ένωσή τους $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$.

Η τελευταία αυτή παραδοχή ισχύει χωρίς αμφισβήτηση, όταν τα γεγονότα είναι πεπερασμένου πλήθους. Όταν όμως έχουμε ένα άπειρο πλήθος γεγονότων, τότε αυτή η ιδιότητα διασφαλίζεται με την επιλογή κατάλληλου αξιώματος.

Η αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων οφείλεται στον A.N. Kolmogorov. Στα πλαίσια αυτής της θεμελίωσης τα γεγονότα ορίζονται να είναι τα στοιχεία μιας οικογένειας $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω με τις εξής ιδιότητες:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

2) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A^c \in \mathcal{F}$,

3) Αν $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \in \mathcal{F}$.

Μία οικογένεια $\mathcal{F}$ συνόλων με τις ιδιότητες (1), (2), (3) ονομάζεται **σ-άλγεβρα** γεγονότων ή **πεδίο Borel**.

Σε μία σ-άλγεβρα γεγονότων έχουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. *Αν $\mathcal{F}$ είναι μία σ-άλγεβρα γεγονότων, τότε*

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$,

(ii) *Αν $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε* $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη

(i) Από τα αξιώματα (1) και (2) του Kolmogorov έχουμε ότι $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{F}$.

(ii) Με τη βοήθεια του νόμου του de Morgan γράφουμε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c .$$

Τότε τα αξιώματα (2) και (3) του Kolmogorov μας επιτρέπουν να γράψουμε

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{F} .$$

Η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. □

Παραδείγματα

(i) Η απλούστερη σ-άλγεβρα είναι η οικογένεια $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, που ονομάζεται **τετριμμένη** σ-άλγεβρα.

(ii) Η πιο πλούσια σ-άλγεβρα είναι η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του Ω, που συμβολίζεται με $\mathcal{P}(\Omega)$.

(iii) Αν $A \in \Omega$, $A \neq \varnothing$, $A \neq \Omega$, τότε η οικογένεια $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ είναι μία σ-άλγεβρα.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Για κάθε οικογένεια D υποσυνόλων του Ω υπάρχει μία σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}(D)$, *που περιέχει όλα τα σύνολα της D και που είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα μ' αυτή την ιδιότητα.*

Παράδειγμα

Αν D είναι η οικογένεια όλων των ημιανοιχτών διαστημάτων $(\alpha, \beta]$ του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, τότε η D δεν είναι σ-άλγεβρα, επειδή το σύνολο $(\alpha, \beta]^c = (-\infty, \alpha] \cup (\beta, +\infty)$ δεν είναι ημιανοιχτό διάστημα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$ την μικρότερη σ-άλγεβρα, που περιέχει την D.

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ καλείται σ-άλγεβρα των συνόλων Borel του $\mathbb{R}$.

Εάν προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τα σύνολα Borel της $\mathcal{B}$, θα διαπιστώσουμε ότι σχεδόν όλα τα υποσύνολα του $(-\infty, +\infty)$ περιέχονται στη $\mathcal{B}$.

Για παράδειγμα, η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοιχτά διαστήματα, επειδή

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\alpha,\ \beta - \frac{1}{n}\right],$$

(εφαρμόζουμε το αξίωμα (3) του Kolmogorov).

Επίσης, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα κλειστά διαστήματα του $(-\infty, +\infty)$, επειδή

$$[\alpha, \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n},\ \beta\right],$$

(εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1). Τέλος, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, επειδή

$$\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n},\ \alpha\right], \quad -\infty < \alpha < +\infty,$$

(εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1). Δηλαδή, η $\mathcal{B}$ είναι μία πλούσια σ-άλγεβρα, αλλά δεν περιέχει όλα τα υποσύνολα του $(-\infty, +\infty)$.

2.2. Αξιώματα πιθανοτήτων

Τα γεγονότα, όπως ορίσθηκαν, δεν είναι εύχρηστα παρά μόνο εάν επιχειρήσουμε στη συνέχεια να αντιστοιχήσουμε σε κάθε γεγονός (σύνολο) Α έναν αριθμό P(A), που θα ακολουθεί ορισμένους βασικούς κανόνες που ανταποκρίνονται στην πράξη της μέτρησης. Έτσι, η όλη αυτή προσπάθεια μπορεί να ερμηνευτεί σαν μια απόπειρα «μέτρησης» των γεγονότων.

Τα αξιώματα, που αναφέρονται παρακάτω, οφείλονται στον A.N. Kolmogorov, που γύρω στα 1930 ολοκλήρωσε την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Ορισμός 2.3. *Έστω Ω ένας δειγματοχώρος και έστω $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα γεγονότων του Ω.*

Η συνάρτηση $\mathbb{P}(\bullet)$ που αντιστοιχεί σε κάθε γεγονός $A \in \mathcal{F}$ έναν πραγματικό αριθμό $\mathbb{P}(A)$, ονομάζεται ***πιθανότητα****, εάν και μόνο εάν*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, *για οποιοδήποτε γεγονός* Α,

(iii) *εάν* $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ *και αποτελούν μία οικογένεια αμοιβαία ξένων γεγονότων, δηλαδή* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *για κάθε* $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$, $i \neq j$, *τότε*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

□

Ας δούμε ένα παράδειγμα πιθανότητας. Δίνεται ο δειγματοχώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ όλων των υποσυνόλων του Ω. Τότε η συνάρτηση $\mathbb{P}$, που αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο $A \in \mathcal{F}$ το κλάσμα

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{ο αριθμός όλων των ευνοϊκών απλών γεγονότων του Α}}{\text{ο αριθμός όλων των δυνατών απλών γεγονότων}}$$

είναι μία πιθανότητα. Για παράδειγμα, εάν $\mathrm{A} = \{i \in \Omega\text{: } i \text{ είναι άρτιος αριθμός}\}$, τότε όλα τα ευνοϊκά απλά γεγονότα του Α είναι τα $\{2\}, \{4\}, \{6\}$. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα του Α είναι ο αριθμός $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2.3. Χώρος πιθανοτήτων

Ορισμός 2.4. *Ονομάζεται* ***χώρος πιθανοτήτων*** *μια συλλογή* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$, *όπου* Ω *είναι δειγματοχώρος,* $\mathcal{F}$ *μία σ-άλγεβρα γεγονότων του* Ω *και* $\mathbb{P}$ *μία πιθανότητα.* □

Θα δείξουμε τώρα μερικές ιδιότητες που είναι συνέπεια των τριών αξιωμάτων των πιθανοτήτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. *Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

(1) $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c) = 1$,

(2) $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$,

(3) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,

(4) $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$,

(5) *Εάν* $A\subset B$, *τότε* $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$,

(6) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Απόδειξη

(1) Έχουμε ότι $A\cup A^c = \Omega$ και $A\cap A^c = \varnothing$. Οπότε $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A\cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega)$.

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια το πρώτο αξίωμα του Ορισμού 2.3, προκύπτει τελικά ότι $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c) = 1$.

(2) Επειδή $\mathbb{P}(A^c) = 1-\mathbb{P}(A)$ και $\mathbb{P}(A^c) \ge 0$, τότε $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$.

(3) Έχουμε $\varnothing\cup\Omega = \Omega$ και $\varnothing\cap\Omega = \varnothing$. Τότε, εφαρμόζοντας το τρίτο αξίωμα του Ορισμού 2.3, προκύπτει ότι $\mathbb{P}(\varnothing)+\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega)$. Αλλά από το πρώτο αξίωμα των πιθανοτήτων συνεπάγεται $\mathbb{P}(\varnothing)+1 = 1$ ή $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(4) Κάθε γεγονός A μπορεί να γραφεί

$$A = (A\cap B^c) \cup (A\cap B)$$

για οποιοδήποτε γεγονός B. Επειδή $(A\cap B^c) \cap (A\cap B) = \varnothing$, τότε με βάση το τρίτο αξίωμα των πιθανοτήτων έχουμε

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B^c)+\mathbb{P}(A\cap B),$$

ή

$$\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

Επίσης $\quad A\cup B = (A\cap B^c)\cup B$ και $(A\cap B^c)\cap B = \varnothing$.

Τότε

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A\cap B^c)+\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

(5) Γράφουμε $B = A\cup(A^c\cap B)$, όπου $A\cap(A^c\cap B) = \varnothing$.

Τότε $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c\cap B)$.

Οπότε, από το τρίτο αξίωμα του Ορισμού 2.3 των πιθανοτήτων προκύπτει ότι $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

(6) Εάν τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ξένα μεταξύ τους, τότε σύμφωνα με το αξίωμα (iii) των πιθανοτήτων έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Εάν τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δεν είναι ξένα, τότε το γεγονός $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ γράφεται ως εξής:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup(A_1^c\cap A_2) \cup (A_1^c\cap A_2^c\cap A_3)\cup \ldots \cup(A_1^c\cap A_2^c\cap \ldots \cap A_{n-1}^c\cap A_n),$$

όπου τα γεγονότα της δεξιάς ένωσης είναι ξένα μεταξύ τους.
Εφαρμόζοντας ξανά το τρίτο αξίωμα των πιθανοτήτων, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_1^c\cap A_2)+\mathbb{P}(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3)+ \ldots + \\ &\quad +\mathbb{P}(A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{n-1}^c\cap A_n) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3) + \ldots +\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

□

2.4. Στοχαστική ανεξαρτησία και εξάρτηση

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Δύο γεγονότα $A, B \in \mathcal{F}$ ονομάζονται **στοχαστικά ανεξάρτητα** (συντομότερα **ανεξάρτητα**), εάν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Τρία γεγονότα $A, B, C \in \mathcal{F}$ ονομάζονται **στοχαστικά ανεξάρτητα** (ή **ανεξάρτητα**), εάν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$
$$\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A),$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Γενικότερα, εάν $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι μία πεπερασμένη ή άπειρη οικογένεια γεγονότων, τότε τα γεγονότα A_i ονομάζονται **ανεξάρτητα**, εάν για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $i_1, \ldots, i_k \in I$ έχουμε

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Ας προσεγγίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας με τη βοήθεια του πειράματος Bernoulli. Ονομάζουμε **πείραμα Bernoulli** ένα οποιοδήποτε τυχαίο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα α («επιτυχία») και $\overline{\alpha}$ («αποτυχία»), έχοντας τις πιθανότητες p και q αντίστοιχα, όπου $p+q=1$. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο πείραμα είναι η ρίψη ενός κέρματος (μία φορά), όπου $p = q = \frac{1}{2}$, όταν το κέρμα είναι τέλεια συμμετρικό. Εάν το κέρμα δεν είναι συμμετρικό, τότε $p \neq q \neq \frac{1}{2}$ έτσι, ώστε $p+q = 1$.

Εάν ένα πείραμα Bernoulli επαναλαμβάνεται n φορές, τότε ο αντίστοιχος δειγματοχώρος Ω_n περιέχει 2^n διατεταγμένες ακολουθίες μεγέθους n με συντεταγμένες α και $\overline{\alpha}$. Εάν αναρωτιόμαστε πώς να ορίσουμε τις πιθανότητες των απλών γεγονότων έτσι, ώστε κάθε ακολουθία αποτελεσμάτων του επαναλαμβανόμενου πειράματος Bernoulli να αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, τότε η απάντηση είναι άμεση: εάν το $\omega \in \Omega_n$ περιέχει k φορές, $0 \leq k \leq n$, τη συντεταγμένη α και $n-k$ φορές τη συντεταγμένη $\overline{\alpha}$, τότε, για να έχουμε ανεξαρτησία, πρέπει να ορίσουμε

$$\mathbb{P}(\omega) = p^k q^{n-k}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{n}{k} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-k))}$ απλά γεγονότα ω με την παραπάνω δομή.

Επιπλέον, η $\mathbb{P}$ πληροί τα τρία αξιώματα του Ορισμού 2.3, καθώς

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τα γεγονότα

B_i={το αποτέλεσμα της i-στής επανάληψης του πειράματος Bernoulli είναι α}.

Τότε $\mathbb{P}(B_i) = p$, οπότε $\mathbb{P}(B_i^c) = 1-p = q$, $1 \le i \le n$. Κατά συνέπεια, οποιαδήποτε ακολουθία $A_1, A_2, \ldots, A_n$ γεγονότων, όπου κάθε A_i είναι ισοδύναμο με B_i ή B_i^c, αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα.

Στην περίπτωση που δύο γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα, τότε αυτά ονομάζονται (στοχαστικά) **εξαρτημένα**. Κατά συνέπεια, όταν τα γεγονότα A και B είναι εξαρτημένα, η ισότητα $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ δεν επαληθεύεται. Αυτή αντικαθίσταται με την ισότητα

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(B|A),$$

όπου η

$$\mathbb{P}(B|A) \equiv \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του B από το γεγονός A. Είναι απαραίτητο κάθε φορά, που χρησιμοποιούμε μία δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}(B|A)$, να θεωρούμε ότι $\mathbb{P}(A) > 0$.

Όταν το γεγονός A θεωρείται σταθερό και το B μεταβάλλεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ του χώρου πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, η συνάρτηση $\mathbb{P}(\bullet|A)$ πληροί τα αξιώματα των πιθανοτήτων, που εκφράζονται από τον Ορισμό 2.3, δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}(\bullet|A)$ είναι μια καινούρια πιθανότητα πάνω στην $\mathcal{F}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, εάν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Ας δούμε πώς ορίζεται η δεσμευμένη πιθανότητα σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Σε ένα συρτάρι βρίσκονται ανακατεμένα 6 σωστά γραπτά και

4 γραπτά που περιέχουν λάθη. Παίρνουμε τυχαία, ένα-ένα, δύο γραπτά, χωρίς επανάθεση. Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο γραπτό να περιέχει λάθη, όταν το πρώτο περιείχε λάθη; Για να βρούμε την απάντηση, θεωρούμε τα γεγονότα $A = \{$το πρώτο γραπτό περιέχει λάθη$\}$, $B = \{$το δεύτερο γραπτό περιέχει λάθη$\}$. Ο δειγματοχώρος Ω περιέχει $10\cdot 9 = 90$ απλά ενδεχόμενα, που το καθένα έχει πιθανότητα $\frac{1}{90}$. Από τα απλά γεγονότα του Ω υπάρχουν $4\cdot 3 = 12$ απλά γεγονότα, που και τα δύο γραπτά περιέχουν λάθη, άρα $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{12}{90}$. Υπάρχουν όμως $4\cdot 9 = 36$ απλά γεγονότα του Ω, που έχουν το πρώτο γραπτό να περιέχει λάθη, άρα $\mathbb{P}(A) = \frac{36}{90}$.

Τότε, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανοτήτων και έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, έτσι, ώστε $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Τότε,*

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \mathbb{P}(A_1)\,\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}\cdot\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}\ \ldots\ \frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1\cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})} =$$

$$= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap \ldots \cap A_{n-1})$$

και η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. □