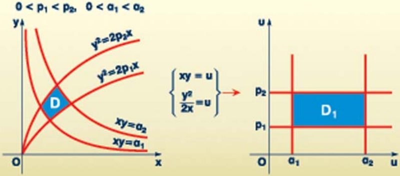
ΑΝΔΡΕΑ Γ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ
ΔΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ Δ. ΦΡΑΓΚΟΥ
ΔΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ



$$E(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,\upsilon)}\right| du\,d\upsilon = \iint_{D_1} \frac{1}{3u}\,du\,d\upsilon = \frac{1}{3}\,(\alpha_2-\alpha_1)\,\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

- ΣΥΝΤΟΜΗ ΘΕΩΡΙΑ
- 490 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
- 207 ΣΧΗΜΑΤΑ

4η Έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς και τον εκδότη

ISBN 960-431-336-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 03920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 0310-203.720, Fax 0310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στο Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό των πραγματικών συναρτήσεων περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών και γράφτηκε με την ελπίδα να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα των φοιτητών των Β΄, Γ΄ και Δ΄ εξαμήνων των Σχολών Θετικών Επιστημών και των Πολυτεχνικών Σχολών των ΑΕΙ της χώρας.

Περιέχει σύντομη θεωρία και ασκήσεις, λυμένες ή προτεινόμενες για λύση, διαφόρου βαθμού δυσκολίας. Οι λυμένες ασκήσεις επέχουν θέση διευκρινιστικών παραδειγμάτων και εφαρμογών και οι προτεινόμενες για λύση ασκήσεις δίνουν την ευκαιρία στο φοιτητή για αυτενέργεια, την οποία θερμά συνιστούμε.

Τέλος, για να μπορέσει ο φοιτητής να ελέγξει την ορθότητα των δικών του λύσεων δίνουμε στο Κεφάλαιο 5 σύντομες λύσεις - απαντήσεις των ασκήσεων που προτάθηκαν.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2002 *Α.Γ. Αθανασιάδης - Β.Δ. Φράγκου*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ. ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ. ΔΙΠΛΑ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΑΠΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σύντομες λύσεις - απαντήσεις των ασκήσεων που προτείνονται στο:

1° Κεφάλαιο

Όριο και Συνέχεια Πραγματικής Συνάρτησης Περισσοτέρων Πραγματικών Μεταβλητών

1.1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1.1. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}\ , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

με πράξεις

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$,

(ii) $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$,

είναι ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Τα στοιχεία του χώρου αυτού λέγονται και σημεία. Όταν η απόσταση δύο σημείων του $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ δίνεται από τον τύπο

$$|PQ| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+ \ldots +(x_n-y_n)^2}\ ,$$

τότε ο χώρος λέγεται **Ευκλείδειος χώρος** και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$**.**

1.1.2. *Παρατήρηση*. Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$:

(i) για n=1 ταυτίζεται με την πραγματική ευθεία,

(ii) για n=2 ταυτίζεται με το επίπεδο Oxy, δηλαδή με το επίπεδο στο οποίο έχουμε εκλέξει ένα ορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων,

(iii) για n=3 ταυτίζεται με το χώρο Oxyz, δηλαδή το συνήθη χώρο στον οποίο έχουμε εκλέξει ένα τρισορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων,

(iv) ενώ για n>3 δεν έχει αντίστοιχη γεωμετρική εποπτική εικόνα.

1.1.3. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Ας είναι $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ και $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο των σημείων P του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει $|PP_0| < \varepsilon$, λέγεται **ε-κυκλική περιοχή του σημείου P_0**. Το σύνολο των σημείων $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει

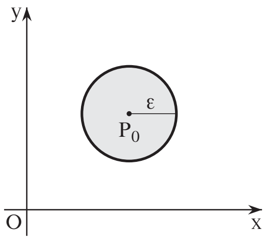
$$\forall\, i\in\{1, 2, \ldots, n\}\,,\quad |x_i-x_i^0| < \varepsilon,$$

λέγεται **ε-τετραγωνική περιοχή του σημείου P_0.**

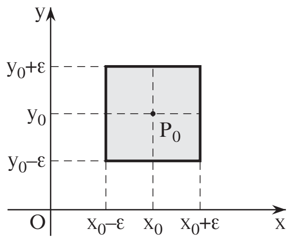
Είναι φανερό ότι κάθε κυκλική περιοχή ενός σημείου P_0 περιέχει μια τετραγωνική περιοχή του P_0 και αντίστροφα. Η ε- περιοχή (κυκλική ή τετραγωνική) του σημείου P_0 συμβολίζεται με **$N(P_0, \varepsilon)$**. Όταν δεν είναι αναγκαίο να αναφέρουμε το θετικό ε, λέμε, πιο σύντομα, **περιοχή του σημείου P_0** και γράφουμε **$N(P_0)$**. Ειδικά η ε-κυκλική περιοχή του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, είναι το σύνολο

$$N(P_0, \varepsilon) = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon\}\,,$$

δηλαδή, είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κύκλου με κέντρο P_0 και ακτίνα ε, (σχ. 1).



Σχ. 1



Σχ. 2

Επίσης η ε-τετραγωνική περιοχή του P_0, είναι το σύνολο

$$N(P_0, \varepsilon) = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 / \,|x-x_0| < \varepsilon,\ |y-y_0| < \varepsilon\}\,,$$

δηλαδή είναι το εσωτερικό του τετραγώνου με κέντρο το σημείο P_0 και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες των συντεταγμένων μήκους 2ε, (σχ. 2). Η ε-κυκλική περιοχή του σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$, είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων της σφαίρας με κέντρο P_0 και ακτίνα ε, ενώ η ε-τετραγωνική περιοχή του P_0 είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κύβου με κέντρο P_0, πλευρά 2ε και έδρες παράλληλες προς τα συντεταγμένα επίπεδα.

1.1.4. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Ας είναι σύνολο $T\subset\mathbb{R}^n$, $T\neq\varnothing$.

(i) Το σημείο $P_0\in\mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης του Τ**, αν

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \ (N(P_0, \varepsilon)-\{P_0\})\cap T \neq \varnothing\ \ ,$$

δηλαδή αν κάθε περιοχή του P_0 περιέχει ένα τουλάχιστο σημείο του Τ διαφορετικό από το P_0.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του Τ λέγεται **παράγωγο σύνολο του Τ** και συμβολίζεται με **T'**.

(ii) Το σημείο $P_0\in T$ λέγεται **απομονωμένο σημείο του Τ**, όταν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του Τ, δηλαδή όταν

$$\exists\ \varepsilon>0:\ (N(P_0,\varepsilon)-\{P_0\})\cap T=\varnothing\ .$$

(iii) Το σημείο $P_0\in T$ λέγεται **εσωτερικό σημείο του T,** αν

$$\exists\ \varepsilon>0:\ N(P_0,\varepsilon)\subset T\ ,$$

δηλαδή, αν υπάρχει περιοχή του P_0 που να περιέχεται στο T. Το σύνολο T λέγεται **ανοικτό**, όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά, δηλαδή όταν

$$\forall\ P\in T,\ \exists\ \varepsilon>0:\ N(P_0,\varepsilon)\subset T\ .$$

1.1.5. ***ΟΡΙΣΜΟΣ***. Κάθε συνάρτηση $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{R}^n$, που απεικονίζει το σύνολο $\mathbb{N}^*$ στο χώρο $\mathbb{R}^n$, λέγεται **ακολουθία σημείων του χώρου** $\mathbb{R}^n$, και συμβολίζεται με $(\mathbf{P}_\nu)$ $\nu\in\mathbb{N}^*$ ή, πιο απλά, με $(\mathbf{P}_\nu)$, όπου $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$, $P_\nu=f(\nu)$. Η ακολουθία (P_ν) λέγεται **συγκλίνουσα στο σημείο** $\mathbf{P_0}\in\mathbb{R}^n$ αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}^*$ τέτοιος, ώστε για κάθε φυσικό ν μεγαλύτερο του ν_0 να είναι $|P_\nu P_0|<\varepsilon$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim P_\nu=P_0$, ή $\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu=P_0$ και λέμε ότι το P_0 είναι το όριο της ακολουθίας $(\mathbf{P}_\nu)$.

1.1.6. ***ΘΕΩΡΗΜΑ.*** Αν $P_\nu(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \dots, x_n^{(\nu)})$ είναι μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$ και $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, τότε ισχύει

$$\lim P_\nu=P_0 \Leftrightarrow \lim x_i^{(\nu)}=x_i^0\ ,\quad \forall\ i\in\{1,2,\dots,n\}.$$

1.2. Συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών - Όρια

1.2.1. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Μια συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, λέγεται **πραγματική συνάρτηση n πραγματικών ανεξαρτήτων μεταβλητών**, ή, πιο σύντομα, **συνάρτηση n μεταβλητών.** Οι συναρτήσεις **n** μεταβλητών, όπου $n\geq 2$, λέγονται **συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών**.

1.2.2. ***Συμβολισμός***. Την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο $P(x_1, x_2, \dots, x_n)\in D$ συμβολίζουμε με $\mathbf{f(P)}$, ή με $\mathbf{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

1.2.3. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Ας είναι $f\colon D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^n$, μια συνάρτηση **n** μεταβλητών και D' το παράγωγο σύνολο του D. Λέμε ότι η συνάρτηση f **έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ στο σημείο** $\mathbf{P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\in D'}$ αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $P\in D$ με $0<|PP_0|<\delta$, να είναι $|f(P)-\lambda|<\varepsilon$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=\lambda\,, \quad \text{ή} \quad \lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \vdots\quad \vdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda\,.$$

Ισοδύναμος με τον ορισμό 1.2.3 είναι και ο

1.2.4. *ΟΡΙΣΜΟΣ.* Λέμε ότι η συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^n$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ στο σημείο $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\in D'$ αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $\delta_i=\delta_i(\varepsilon)>0$, $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, τέτοιοι ώστε για κάθε $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in D$ με $0<|x_i-x_i^0|<\delta_i$, $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, να είναι $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\lambda| < \varepsilon$.

1.2.5. *ΘΕΩΡΗΜΑ.* Η συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^n$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ στο σημείο $P_0\in D'$ **ανν***, για κάθε ακολουθία (P_ν) σημείων του $D-\{P_0\}$, που συγκλίνει στο P_0, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης $(f(P_\nu))$ συγκλίνει στο λ.

1.2.6. *Παρατήρηση.* Το Θεώρημα 1.2.5 εφαρμόζεται είτε για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα όριο και είναι $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = \lambda$, είτε για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to P_0} f(P)$.

Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (P_ν) σημείων του $D-\{P_0\}$ που συγκλίνει στο P_0, η αντίστοιχη αριθμητική ακολουθία $(f(P_\nu))$ συγκλίνει πάντοτε στον ίδιο αριθμό λ, ανεξάρτητο από την ακολουθία (P_ν), (βλ. 1.5, άσκ. 3).

Στη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει:

(α) ή να βρούμε μια τουλάχιστον ακολουθία (P_ν) σημείων του $D-\{P_0\}$ που να συγκλίνει στο P_0 και τέτοια, ώστε η αντίστοιχη ακολουθία $(f(P_\nu))$ να αποκλίνει (βλ. 1.5, άσκ. 9, (III)),

(β) ή να βρούμε δύο τουλάχιστον ακολουθίες (P_ν), (P'_ν) σημείων του $D-\{P_0\}$ που να συγκλίνουν στο P_0 και τέτοιες, ώστε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(P_\nu))$, $(f(P'_\nu))$ να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, (βλ. 1.5, άσκ. 4).

1.2.7. *ΠΡΟΤΑΣΗ*.** Το όριο $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό.

1.2.8. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f\colon D\to\mathbb{R}$ και $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = \lambda$, $\lim\limits_{P\to P_0} \varphi(P) = \mu$, τότε είναι

---

* αν και μόνο αν.

** Στις περιπτώσεις 1.2.7 - 1.2.13 θεωρούμε πάντοτε ότι $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $D\neq\varnothing$ και $P_0\in D'$.

(i) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)+\varphi(P)] = \lim\limits_{P\to P_0} f(P)+\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P) = \lambda+\mu$,

(ii) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)-\varphi(P)] = \lim\limits_{P\to P_0} f(P)-\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P) = \lambda-\mu$,

(iii) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)\cdot\varphi(P)] = \lim\limits_{P\to P_0} f(P)\cdot\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P) = \lambda\cdot\mu$,

(iv) $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{f(P)}{\varphi(P)} = \dfrac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P)} = \dfrac{\lambda}{\mu}$, με την προϋπόθεση ότι $\mu\neq 0$ και $\forall\, P\in D,\ \varphi(P)\neq 0$.

1.2.9. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f\colon D\to\mathbb{R}$ και $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε

$$\forall\, P\in D,\quad f(P)\leq \varphi(P)$$

και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$, $\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P)$, τότε είναι

$$\lim_{P\to P_0} f(P)\leq \lim_{P\to P_0}\varphi(P)\ .$$

1.2.10. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f\colon D\to\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\lambda$, τότε:

(i) $\forall\, \varkappa\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{P\to P_0}\sqrt[\varkappa]{f(P)} = \sqrt[\varkappa]{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)} = \sqrt[\varkappa]{\lambda}$, με την προϋπόθεση ότι $\sqrt[\varkappa]{\lambda}\in\mathbb{R}$,

(ii) $\forall\, q\in Q,\ \lim\limits_{P\to P_0}[f(P)]^q = \lambda^q$,

(iii) $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}-Q$, $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)]^\alpha = [\lim\limits_{P\to P_0} f(P)]^\alpha = \lambda^\alpha$, με την προϋπόθεση ότι η f είναι μη αρνητική και $\lambda>0$,

(iv) $\forall\, \alpha>0,\ \lim\limits_{P\to P_0}\alpha^{f(P)} = \alpha^{\lim_{P\to P_0} f(P)} = \alpha^\lambda$,

(v) $\lim\limits_{P\to P_0}|f(P)| = |\lim\limits_{P\to P_0} f(P)| = |\lambda|$.

1.2.11. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f\colon D\to\mathbb{R}$, $g\colon D\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$, είναι τρεις συναρτήσεις τέτοιες, ώστε

$$\forall\, P\in D,\ f(P)\leq g(P)\leq \varphi(P)$$

και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$, $\lim\limits_{P\to P_0}\varphi(P)$ και είναι ίσα, τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$ και είναι

$$\lim_{P\to P_0} g(P) = \lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{P\to P_0} \varphi(P).$$

1.2.12. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f: D\to\mathbb{R}$ και $g: D\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε $\lim_{P\to P_0} f(P)=0$ και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του P_0, δηλαδή

$$\exists\, \delta>0, \exists\, M>0: \forall\, P\in N(P_0, \delta)\cap D,\ |g(P)|\le M, \text{ τότε } \lim_{P\to P_0} [f(P)\cdot g(P)] = 0.$$

1.2.13. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Αν $f: D\to\mathbb{R}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{P\to P_0} f(P)$, τότε υπάρχει πάντοτε μια περιοχή $N(P_0, \delta)$ στην οποία η f είναι φραγμένη δηλαδή

$$\exists\, \delta>0, \exists\, M>0:\ \forall\, P\in N(P_0, \delta)\cap D, |f(P)|\le M.$$

1.2.14. *ΟΡΙΣΜΟΣ.* Αν $f: D\to\mathbb{R}$ και $P_0\in D'$, τότε

(α) $\lim_{P\to P_0} f(P) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M>0, \exists\, \delta>0: (P\in D \text{ και } 0<|PP_0|<\delta) \Rightarrow f(P) > M.$

(β) $\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M>0, \exists\, \delta>0: (P\in D \text{ και } 0<|PP_0|<\delta) \Rightarrow f(P) < -M.$

1.2.15. *ΠΡΟΤΑΣΗ.* Ας είναι $P_0(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$, l: $\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0) = 0$ μια ευθεία που περνά από το P_0 και $f = f(P): \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f(P) = \begin{cases} f_1(P), & \text{όταν } P\notin l \\ f_2(P), & \text{όταν } P\in l\ . \end{cases}$$

Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{P\to P_0} f_1(P)$, $P\notin l$, $\lim_{P\to P_0} f_2(P)$, $P\in l$ και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή αν

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\notin l}} f_1(P) = \lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in l}} f_2(P) = \lambda\in\mathbb{R}\ ,$$

τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{P\to P_0} f(P)$ και είναι ίσο με λ, δηλαδή $\lim_{P\to P_0} f(P) = \lambda$.

1.3. Διπλά όρια συνάρτησης δύο μεταβλητών

1.3.1. *ΟΡΙΣΜΟΣ.* Ας είναι $f: D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^2$, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και $P_0(x_0, y_0)\in D'$. Αν για κάθε $x\neq x_0$ υπάρχει το όριο $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$, τότε το όριο αυτό είναι συνάρτηση μόνο του x, δηλαδή έχουμε $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$.

Το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, εφόσον υπάρχει, λέγεται **διπλό όριο της συνάρτησης f** στο σημείο $P(x_0, y_0)$ και συμβολίζεται με $\mathbf{\lim\limits_{x \to x_0} [\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)]}$.

Ανάλογα ορίζεται και **το διπλό όριο**

$$\mathbf{\lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x, y)]}\ .$$

1.3.2. ***Παρατήρηση***

(α) Η ύπαρξη του ενός διπλού ορίου μιας συνάρτησης f στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του άλλου, (βλ. 1.5, ασκ. 10).

β) Η ύπαρξη και των δύο διπλών ορίων μιας συνάρτησης f στο σημείο $P(x_0, y_0)$ δεν εξασφαλίζει την ισότητά τους, (βλ. 1.5, άσκ. 11).

(γ) Η ύπαρξη και ισότητα των δύο διπλών ορίων μιας συνάρτησης f στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, (βλ. 1.5, άσκ. 12).

(δ) Η ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη των διπλών ορίων της f στο σημείο αυτό, (βλ. 1.5, άσκ. 14, (α)).

(ε) Η ύπαρξη του ορίου και ενός διπλού ορίου μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του άλλου διπλού ορίου της f σ' αυτό το σημείο, (βλ. 1.5, άσκ. 13).

1.3.3. ***ΠΡΟΤΑΣΗ.*** Αν υπάρχουν τα διπλά όρια

$$A = \lim_{x \to x_0} [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\ , \quad B = \lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x, y)]$$

και υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, τότε είναι A=B.

1.3.4. ***Παρατήρηση*** **(Πόρισμα της Πρότασης 1.3.3.)**

Αν υπάρχουν τα διπλά όρια

$$A = \lim_{x \to x_0} [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\ , \qquad B = \lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x, y)]$$

της συνάρτησης f και είναι $A \neq B$, τότε **δεν υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$,

(διότι αν υπήρχε το όριο αυτό θα έπρεπε να είναι $A = B$).

1.4. Συνέχεια συνάρτησης περισσοτέρων μεταβλητών

1.4.1. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, λέγεται **συνεχής στο σημείο $P_0 \in D$**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $P \in D$ με $|PP_0| < \delta$, να είναι $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. Ισοδύναμος με τον ορισμό 1.4.1 είναι και ο

1.4.2. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής στο σημείο $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, τέτοιοι, ώστε για κάθε $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ με $|x_i - x_i^0| < \delta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, να είναι

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)| < \varepsilon.$$

Επίσης ισοδύναμος είναι και ο επόμενος ορισμός.

1.4.3. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο σημείο $P_0 \in D \cap D'$, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ και είναι ίσο με $f(P_0)$, δηλαδή αν

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)\,.$$

1.4.4. ***ΠΡΟΤΑΣΗ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε απομονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της D.

1.4.5. ***ΘΕΩΡΗΜΑ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $P_0 \in D \cap D'$ **ανν**, για κάθε ακολουθία (P_ν) σημείων του $D - \{P_0\}$ που συγκλίνει στο P_0, η ακολουθία $(f(P_\nu))$ συγκλίνει στο $f(P_0)$.

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν τις επόμενες ιδιότητες:

1.4.6. ***ΠΡΟΤΑΣΗ.*** Αν οι συναρτήσεις $f: D \to \mathbb{R}$ και $\varphi: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $P_0 \in D$, τότε και οι συναρτήσεις αf, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, $f+\varphi$, $f-\varphi$, $f \cdot \varphi$, $\dfrac{f}{\varphi}$ (με $\varphi(P_0) \neq 0$), $|f|$ και $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, οι f^ν, $\dfrac{1}{f^\nu}$, $\sqrt[\nu]{f}$ είναι επίσης συνεχείς στο P_0, με την προϋπόθεση ότι το P_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων.

1.4.7. ***ΠΡΟΤΑΣΗ.*** Αν η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $P_0 \in D$ και αν $f(P_0) > \varkappa$, (ή $f(P_0) < \varkappa$), όπου $\varkappa \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει περιοχή $N(P_0, \delta)$ του σημείου P_0 τέτοια, ώστε

$$\forall\, P \in N(P_0, \delta) \cap D\,,\ f(P) > \varkappa, \quad (\text{ή } f(P) < \varkappa)\,.$$

1.4.8. ***ΟΡΙΣΜΟΣ.*** Η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής στο σύνολο A**, όπου $A \subset D$, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

1.4.9. ***ΘΕΩΡΗΜΑ.*** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό και φραγμένο σύνολο D τότε:

(i) η f είναι φραγμένη στο D, δηλαδή υπάρχει $K\in\mathbb{R}_+^*$ τέτοιος, ώστε

$$\forall\ P\in D\ ,\quad |f(P)|\le K\ .$$

(ii) η δια της f εικόνα του D, $f(D)=\{f(P)/P\in D\}$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο και

(iii) η f παίρνει μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή στο D, δηλαδή υπάρχουν σημεία $P_1, P_2\in D$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f(P_1)\le f(P)\le f(P_2)$, για κάθε $P\in D$.

1.5. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: D\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x,y)\in D,\quad f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad \text{και}\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |y|<x^2\}.$$

Να δειχτεί ότι $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)=1$, όπου $P_0(0,0)$.

Λ.* Γενικά, όταν δίνεται το όριο λ και η f έχει απλή μορφή, για να δείξουμε ότι $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\lambda$, ακολουθούμε την παρακάτω μέθοδο:

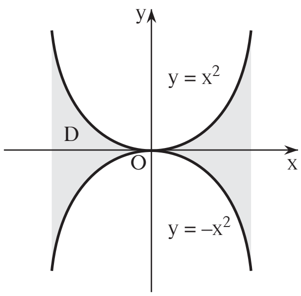
Βρίσκουμε μια ποσότητα μεγαλύτερη από την $|f(P)-\lambda|$ η οποία μπορεί να εκφρασθεί, ή με την απόσταση $|PP_0|$, ή με τις απόλυτες τιμές $|x_i-x_i^0|$, $i\in\{1, 2, \dots, n\}$. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζουμε τον ορισμό 1.2.3 και στη δεύτερη τον ορισμό 1.2.4. Στην άσκηση που δόθηκε έχουμε $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ -x^2<y<x^2\}$, δηλαδή το D είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου μεταξύ των παραβολών $y=-x^2$, $y=x^2$, (γραμμοσκιασμένο τμήμα του επιπέδου στο σχ. 3). Επίσης είναι $\lambda=1$ και $P_0\in D'$, (το P_0 συμπίπτει με την αρχή των αξόνων O).

Έχουμε $\quad |PP_0|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\quad$ και

$$|f(x,y)-1|=\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{2y^2}{x^2+y^2}\ .$$

Επειδή στο σημείο $P(x,y)\in D$, έχουμε $y^2<x^4$,

είναι και $$\frac{2y^2}{x^2+y^2}<\frac{2x^4}{x^2+y^2}\ .$$



Σχ. 3

* Το Λ. σημαίνει «λύση».

Επομένως

$$|f(x, y)-1| < \frac{2x^4}{x^2+y^2} < \frac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2) = 2(|PP_0|)^2,$$

δηλαδή είναι

$$(1) \qquad |f(x, y)-1| < 2(|PP_0|^2)\ .$$

Επειδή στο δεύτερο μέλος της (1) εμφανίζεται μόνο η απόσταση $|PP_0|$, θα εφαρμόσουμε τον ορισμό 1.2.3.

Ας είναι $\varepsilon>0$. Αν πάρουμε $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, τότε για κάθε $P\in D$ με

$$(2) \qquad 0<|PP_0|<\delta,$$

εξαιτίας των (1) και (2), θα έχουμε

$$|f(x, y)-1| < 2\cdot\delta^2= 2\cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Έχουμε δείξει ότι

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0 : (P\in D \text{ και } 0 < |PP_0| < \delta) \Rightarrow |f(x, y)-1| < \varepsilon.$$

Άρα [1.2.3] $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y) = 1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2+2y.$$

Να δειχτεί ότι $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y) = 5$, όπου $P_0(1, 2)$.

Λ. Είναι $\lambda=5$, $x_0=1$, $y_0=2$ και

$$|f(x, y)-5| = |x^2+2y-5| = |x^2-1+2y-4| \le |x^2-1|+2|y-2|\ .$$

Επίσης $P_0\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2$. Άρα

$$(1) \qquad |f(x, y)-5| \le |x+1|\,|x-1|+2|y-2|\ .$$

Επειδή στο δεύτερο μέλος της (1) εμφανίζονται οι απόλυτες τιμές $|x-x_0| = |x-1|$ και $|y-y_0| = |y-2|$ θα εφαρμόσουμε τον ορισμό 1.2.4.

Θεωρούμε πρώτα το θετικό $\delta_1=1$ και παίρνουμε $0<|x-1|<\delta_1$, οπότε

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow -1+2 < x-1+2 < 1+2 \Rightarrow 1 < x+1 < 3 \Rightarrow |x+1|<3\ .$$

Επομένως, για $0<|x-1|<\delta_1$, από την (1) προκύπτει ότι

$$(2) \qquad |f(x, y)-5| < 3|x-1|+2|y-2|\ .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta_1'=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ και $\delta_2=\frac{\varepsilon}{4}$, τότε για κάθε $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $0<|x-1|<\delta_1'$ και $0<|y-2|<\delta_2$, εξαιτίας της (2), θα έχουμε

$$|f(x, y)-5| < 3\delta_1'+2\delta_2 \le 3\cdot\frac{\varepsilon}{6}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Επομένως [1.2.4] $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y) = 5$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} y^2\,\eta\mu\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{όταν } y\neq 0 \\ 0, & \text{όταν } y=0 \end{cases}.$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$.

Λ. Για το σημείο $P_0(0, 0)$ και την ευθεία $y=0$, έχουμε:

(i) Αν $y\neq 0$, τότε [1.2.12].

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[y^2\,\eta\mu\left(\frac{x}{y}\right)\right] = 0 .$$

(ii) Αν $y=0$, τότε $f(x, y) = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

Άρα [1.2.15], υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} x+y, & \text{όταν } xy=0 \\ 1, & \text{όταν } xy\neq 0 \end{cases}.$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y)$, όπου $P_0(0, 0)$.

Λ. Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad x_n=\frac{1}{n}\ ,\ y_n=\frac{1}{n}\ .$$

Άρα $\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_n y_n\neq 0,\quad f(P_n) = f(x_n, y_n) = 1$ και

$$(1)\qquad \lim f(P_n) = \lim f(x_n, y_n) = \lim 1 = 1.$$

Θεωρούμε επίσης την ακολουθία (P'_n) με $P'_n(x'_n, y'_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P'_n = P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x'_n = \frac{1}{n}\ ,\ \ y'_n = 0\,.$$

Επομένως

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad x'_n y'_n = 0,\ f(x'_n, y'_n) = x'_n + 0 = x'_n = \frac{1}{n}\quad \text{και}\quad (2)\ \lim f(P'_n) = \lim\frac{1}{n} = 0.$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ακολουθίες (P_n), (P'_n) σημείων του $\mathbb{R}^2-\{P_0\}$ που συγκλίνουν στο $P_0(0, 0)$ και τέτοιες, ώστε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(P_n))$, $(f(P'_n))$ να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Άρα [1.2.5] και [1.2.6] δεν υπάρχει το $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y)$.

5. Να βρεθεί το $\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y)$, όπου

$$\mathbf{f(x, y) = x^3y + x^2y^3 + 2xy^4 \quad \textit{και} \quad P_0(1, 2)\,.}$$

Λ. Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των [1.2.8] - [1.2.10], έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^3y) + \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2y^3) + 2\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(xy^4) =$$

$$= 1^3\cdot 2 + 1^2\cdot 2^3 + 2\cdot 1\cdot 2^4 = 2 + 8 + 32 = 42\,.$$

6. Να δειχτεί ότι:

α) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$, **β)** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\,\eta\mu\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$,

γ) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\eta\mu(xy)}{\eta\mu x\,\eta\mu y} = 1$, **δ)** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2} = 0$,

ε) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,\eta\mu(xy)}{x^2+y^2} = 0$, **στ)** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\eta\mu(xy)}{x} = 1$,

ζ) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to \pi}} x^2\eta\mu\left(\frac{y}{x}\right) = 4$, **η)** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^5+4x^2y^3-2y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

Λ. α) Είναι $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 - \{P_0\} \to \mathbb{R}$ και $P_0(0, 0) \in D'$, όπου $D = \mathbb{R}^2 - \{P_0\}$ είναι το πεδίο ορισμού της f.

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{P \to P_0} f(x, y) = 0$. Είναι $|PP_0| = \sqrt{x^2+y^2}$ και

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = |PP_0| .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\varepsilon$, τότε για κάθε $P \in \mathbb{R}^2 - \{P_0\}$ με

$$0 < |PP_0| < \delta$$

θα έχουμε $$|f(x, y) - 0| \leq |PP_0| < \varepsilon .$$

Έχουμε δείξει ότι

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta = \varepsilon > 0 : P \in \mathbb{R}^2 - \{P_0\} \quad \text{και} \quad 0 < |PP_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon .$$

Επομένως [1.2.3], $\lim\limits_{P \to P_0} f(x, y) = 0$.

β) Είναι $f(x, y) = (x^2+y^2)\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{xy}\right) : D \to \mathbb{R}$, όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$ και $P_0(0, 0) \in D'$. Επίσης είναι $|PP_0| = \sqrt{x^2+y^2}$ και

$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = \left| (x^2+y^2)\,\eta\mu\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq x^2+y^2 = (|PP_0|)^2 .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, τότε για κάθε $P(x, y) \in D$ με $0<|PP_0|<\delta$, θα έχουμε

$$|f(x, y) - 0| \leq (|PP_0|)^2 < \delta^2 = \varepsilon .$$

Δηλαδή $$\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta=\sqrt{\varepsilon} > 0 : 0 < |PP_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

και συνεπώς [1.2.3] $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0 .$$

γ) Είναι $f(x, y) = \dfrac{\eta\mu(xy)}{\eta\mu x\, \eta\mu y} : D \to \mathbb{R}$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \neq \kappa\pi, \ \ y \neq \kappa\pi\}, \ \kappa=0, \pm1, \pm2, \ldots, \ \text{και} \ P_0(0, 0) \in D'.$$

Επίσης έχουμε:

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{\dfrac{\eta\mu(xy)}{xy}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\,\dfrac{\eta\mu y}{y}} .$$

Αλλά, είναι γνωστό ότι:

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\eta\mu(xy)}{xy}=1\ ,$$

οπότε, εξαιτίας των (1), (2) και [1.2.8 (iii), (iv)] προκύπτει ότι

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\eta\mu(xy)}{xy}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}\right)}=1\ .$$

δ) Είναι $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $P_0(0,0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2$ το πεδίο ορισμού της f. Άρα:

$$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|=\left|\frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right|\le|x^2-y^2|\le x^2+y^2=(|PP_0|)^2\ .$$

Επομένως, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, τότε για κάθε $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $0<|PP_0|<\delta$, θα έχουμε

$$|f(x,y)-0|<\delta^2=\varepsilon\ .$$

Άρα [1.2.3] $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0\ .$$

ε) Είναι $f(x,y)=\dfrac{x\eta\mu(xy)}{x^2+y^2}:\mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$ και $P_0(0,0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$ το πεδίο ορισμού της f.

Επίσης είναι $$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\,\frac{\eta\mu(xy)}{xy}\ .$$

Επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\eta\mu(xy)}{xy}=1$, για να δειχτεί ότι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$, αρκεί να δειχτεί ότι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

Πράγματι, είναι:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le^{*}|x|\,\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}=\frac{|x|}{2}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\frac{|PP_0|}{2}\ .$$

---

* $|xy|=|x|\,|y|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Άρα, αν πάρουμε δ=2ε, τότε $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta=2\varepsilon>0$ τέτοιος, ώστε

$$(P(x, y)\in D \quad \text{και} \quad 0<|PP_0|<\delta) \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon,$$

δηλαδή είναι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ και συνεπώς $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$

στ) Είναι $f(x, y)=\frac{\eta\mu(xy)}{x}: D\to \mathbb{R}$, όπου $D=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 / x\neq 0\}$, $P_0(0, 1)\in D'$.

Αλλά $$f(x, y)=y\,\frac{\eta\mu(xy)}{xy}$$

και επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(xy)=0$, είναι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\eta\mu(xy)}{xy}=1$.

Άρα $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x, y)=\left(\lim_{y\to 1} y\right)\cdot\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\eta\mu(xy)}{xy}\right)=1\cdot 1=1 .$$

ζ) Είναι [1.2.8, (iii)]

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to \pi}} x^2\,\eta\mu\left(\frac{y}{x}\right)=\left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to \pi}} \eta\mu\left(\frac{y}{x}\right)\right)=2^2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=4 .$$

η) Είναι $f(x, y)=\frac{2x^5+4x^2y^3-2y^5}{(x^2+y^2)^2}: \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to \mathbb{R}$ και $P_0(0, 0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$ το πεδίο ορισμού της f. Αλλά

$$|f(x, y)-0|=|f(x, y)|\leq \frac{2|x|^5+4|x|^2|y|^3+2|y|^5}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2|x|\,|x^4|+4|y|\,(x^2y^2)+2|y|y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

και επειδή $|x|\leq \sqrt{x^2+y^2}=|PP_0|$, $|y|\leq \sqrt{x^2+y^2}=|PP_0|$, είναι

$$|f(x, y)|\leq 2|PP_0|\,\frac{(x^4+2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=2|PP_0| .$$

Επομένως, αν δοθεί ο ε>0 και πάρουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ τότε, για κάθε $P(x, y)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$ για το οποίο είναι $0<|PP_0|<\delta$, θα έχουμε

$$|f(x, y)|<2\delta=\varepsilon .$$

Άρα [1.2.3] $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0 .$$

7. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x^2+y^2}$, **β)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y^2-x)^3+x^2y}{(y^2-x)^2+|y|^5}$, **γ)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$,

δ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+2x^2y^2+xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, **ε)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Λ. α) Είναι $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$ και $P_0(0, 0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* ,\quad x_n = \lambda y_n^2{}^{*} .$$

Άρα $\forall\, n\in\mathbb{N}^* ,\quad f(P_n) = f(\lambda y_n^2, y_n) = \dfrac{\lambda y_n^2}{\lambda^2 y_n^4+y_n^2} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 y_n^2+1}$

και επειδή $\lim P_n = P_0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0$ και $\lim y_n = 0$,

έχουμε $\lim f(P_n) = \lim\limits_{y_n\to 0} \dfrac{\lambda}{\lambda^2 y_n^2+1} = \dfrac{\lambda}{1} = \lambda$.

Επομένως, παίρνοντας δύο διαφορετικά λ, π.χ. $\lambda=1$ και $\lambda=2$, έχουμε στην πρώτη περίπτωση $\lim f(P_n) = 1$ και στη δεύτερη $\lim f(P_n) = 2$. Κατά συνέπεια το $\lim f(P_n)$ εξαρτάται από το λ, δηλαδή εξαρτάται από την ακολουθία (P_n) και συνεπώς [1.2.5 και 1.2.6] δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

β) Είναι $f(x, y) = \dfrac{(y^2-x)^3+x^2y}{(y^2-x)^2+|y|^5} : \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$ και $P_0(0, 0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n = P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* ,\quad y_n = \lambda x_n .$$

Έχουμε

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad f(P_n) = f(x_n, \lambda x_n) = \frac{(\lambda^2 x_n^2-x_n)^3+\lambda x_n^3}{(\lambda^2 x_n^2-x_n)^2+|\lambda x_n|^5} = \frac{x_n[(\lambda^2 x_n-1)^3+\lambda]}{(\lambda^2 x_n-1)^2+|\lambda|^5\,|x_n|^3}$$

και επειδή $\lim P_n = P_0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0$ και $\lim y_n = 0$, είναι

$$\lim f(P_n) = \lim_{x_n\to 0} \frac{x_n[(\lambda^2 x_n-1)^3+\lambda]}{(\lambda^2 x_n-1)^2+|\lambda|^5\,|x_n|^3} = \frac{0}{1} = 0 .$$

* Δηλαδή τα σημεία της ακολουθίας (P_n) βρίσκονται πάνω στην παραβολή $x=\lambda y^2$.

Επίσης θεωρούμε την ακολουθία (P'_n) με $P'_n(x'_n, y'_n) \in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P'_n=P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\ x'_n = y'^2_n \quad \text{και}\ \ y'_n > 0\ .$$

Είναι $$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad f(P'_n) = f(y'^2_n, y'_n) = \frac{(y'^2_n-y'^2_n)^3+y'^5_n}{(y'^2_n-y'^2_n)^2+|y'_n|^5} = \frac{y'^5_n}{|y'_n|^5} = 1$$

και $$(2)\qquad \lim f(P'_n) = 1\ .$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim f(P_n) \neq \lim f(P'_n)$ και συνεπώς [1.2.5] και [1.2.6] δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

γ) Είναι $f(x, y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} : \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$ και $P_0(0, 0)\in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\ x_n = \lambda y_n^2\ .$$

Είναι $$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad f(P_n) = f(\lambda y_n^2, y_n) = \frac{\lambda^4 y_n^{12}}{(\lambda^2 y_n^4+y_n^4)^3} = \frac{\lambda^4 y_n^{12}}{(\lambda^2+1)^3\, y_n^{12}} = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+1)^3}\ .$$

Άρα $$\lim f(P_n) = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+1)^3}$$

και συνεπώς (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

δ) Είναι $f(x, y) = \dfrac{x^4+2x^2y^2+xy^3}{(x^2+y^2)^2} : \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$, όπου $P_0(0, 0)\in D'$ και $D=\mathbb{R}^2-\{0\}$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\quad y_n = \lambda x_n\ .$$

Άρα $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ f(P_n) = f(x_n, \lambda x_n) = \dfrac{x_n^4+2\lambda^2x_n^4+\lambda^3x_n^4}{(x_n^2+\lambda^2x_n^2)^2} = \dfrac{1+2\lambda^2+\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}$

και $$\lim f(P_n) = \frac{1+2\lambda^2+\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}\ .$$

Επομένως (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

ε) Είναι $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2-\{P_0\} \to \mathbb{R}$ και $P_0(0, 0) \in D'$, όπου $D=\mathbb{R}^2-\{P_0\}$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n = P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \lambda x_n\ .$$

Επομένως $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f(P_n) = f(x_n, \lambda x_n) = \frac{x_n^2-\lambda^2 x_n^2}{x_n^2+\lambda^2 x_n^2} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ και $\lim f(P_n) = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$.

Κατά συνέπεια (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y^2}\, e^{-\frac{|x|}{y^2}} &, \text{ όταν } y \neq 0 \\ 0 &, \text{ όταν } y = 0 \end{cases} .$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Λ. Θεωρούμε το σημείο $P_0(0, 0)$ και την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n = P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \lambda y_n^2\ .$$

Είναι $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f(P_n) = f(\lambda y_n^2, y_n) = \frac{|\lambda|\, y_n^2}{y_n^2} \cdot e^{-\frac{|\lambda| y_n^2}{|y_n^2|}} = \lambda e^{-|\lambda|}$$

και $$\lim f(P_n) = \lambda e^{-|\lambda|}\ .$$

Επομένως (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\, (x, y) \in D,\ f(x, y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2} \quad \text{και} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq \pm y\}\ .$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Λ. Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ και το σημείο $P_0(0, 0)$. Είναι

$$\forall\, n\in \mathbb{N}^*,\ f(P_n)=\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=n(n+1) \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n)=+\infty\,.$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία (Q_n) με $Q_n\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$. Είναι

$$\forall\, n\in \mathbb{N}^*,\ f(Q_n)=\frac{1+\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}}=-n(n+1) \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} f(Q_n)=-\infty\,.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο ακολουθίες σημείων (P_n) και (Q_n) του D που συγκλίνουν στο P_0 και τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(P_n))$ και $(f(Q_n))$ συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια και συνεπώς [1.2.6], δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(P)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: D\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\, (x,y)\in D\,,\ f(x,y)=\frac{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y} \quad \text{και} \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq -y\,,\ x\neq 0\}\,.$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα διπλά όρια

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]\,,$$

καθώς και το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

Λ. i) Αν $x=\text{σταθ.}\neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} f(x,y)=\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}}\frac{x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}=\frac{x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi(x)\,.$$

Επειδή δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$, δεν υπάρχει [1.3.1] το διπλό όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$.

ii) Αν $y=\text{σταθ.}\neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}}\frac{x\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}=\frac{0+y}{0+y}=1=\sigma(y) \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0}\sigma(y)=\lim_{y\to 0} 1=1\,.$$

Άρα [1.3.1] υπάρχει το διπλό όριο $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$ και είναι ίσο με 1.

iii) Θεωρούμε μια ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, 0)\in D$ και $\lim P_n=P_0$, όπου $P_0(0, 0)\in D'$.

Είναι $\forall\ n\in \mathbb{N}^*$, $f(P_n) = f(x_n, 0) = \dfrac{x_n\, \eta\mu\left(\frac{1}{x_n}\right)}{x_n} = \eta\mu\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$

και επειδή δεν υπάρχει το $\lim f(P_n)$, δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$,

$f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$ και $P_0(0, 0)$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)]$, $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$ και $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Λ. i) Αν $x = \text{σταθ.} \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2+x^3}{x^2} = x+1 = \varphi(x)\ ,$$

και
$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1\ .$$

ii) Επίσης, αν $y = \text{σταθ.} \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{-y^2+y^3}{y^2} = y-1 = \sigma(y) \text{ και}$$

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0}\sigma(y) = \lim_{y\to 0}(y-1) = -1\ .$$

iii) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)] \neq \lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$

και επομένως [1.3.4], δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$,

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ και $P_0(0, 0)$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)]$, $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)] = 0$ και $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Λ. Προκύπτει εύκολα ότι

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = 0 \ .$$

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια ώστε

$$\forall\, n\in \mathbb{N}^* \ , \ y_n = \lambda x_n \ .$$

Είναι
$$\forall\, n\in \mathbb{N}^*, \ f(P_n) = f(x_n, \lambda x_n) = \frac{\lambda x_n^2}{x_n^2+\lambda^2 x_n^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \quad \text{και}$$

$$\lim f(P_n) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \ .$$

Άρα (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, \ y)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in D$, $f(x, y) = y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ και $D = \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 / x\neq 0\}$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] \ , \quad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, \ y) \ .$$

Λ. i) Αν $x = \sigma\tau\alpha\theta. \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\sigma\tau\alpha\theta.)}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\sigma\tau\alpha\theta.)}} y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \varphi(x) \ ,$$

και
$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 \ .$$

ii) Αν $y = \sigma\tau\alpha\theta. \neq 0$, τότε το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (y=\sigma\tau\alpha\theta.)}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (y=\sigma\tau\alpha\theta.)}} y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

Επομένως δεν υπάρχει το διπλό όριο $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$.

iii) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, \ y)$. Είναι

$|f(x, y)| = \left|y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = |PP_0|$ όπου $P_0(0, 0)$ και συνεπώς

$$|f(x, y)-0|\leq|PP_0|.$$

Άρα αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\varepsilon$ τότε, για κάθε $P(x, y)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$ με $0<|PP_0|<\delta$ θα έχουμε

$$|f(x, y)-0| < \delta = \varepsilon \ .$$

Επομένως υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

14. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x, y)\right], \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x, y)\right] \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$$

για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f: D\to\mathbb{R}$ όπου $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 / xy\neq 0\}$ και $\forall\ (x, y)\in D$,

$$f(x, y) = (x+y)\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right),$$

β) $f: \mathbb{R}^2-\{P_0\}\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $f(x, y)= \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ και $P_0(0, 0)$,

γ) $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,\eta\mu(xy)\ , & \text{όταν } x\neq 0\\ y\ , & \text{όταν } x=0 \end{cases}$,

δ) $f: D\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in D$, $f(x, y) = \dfrac{x-2y}{x+y}$ και $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq -y\}$.

Λ. α) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} f(x, y)$.

Για $xy\neq 0$ είναι

$$(1) \qquad f(x, y) = x\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)+y\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \ .$$

Επειδή $\lim\limits_{y\to 0} y\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{y}\right)= 0$ είναι και

$$(2) \qquad \lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} \left[y\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 \ .$$

Ακόμη, επειδή $x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right) = \kappa = \sigma\tau\alpha\theta.$ και το όριο $\lim\limits_{y\to 0} \eta\mu\left(\dfrac{1}{y}\right)$ δεν υπάρχει, δεν υπάρχει και το όριο

$$(3) \qquad \lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} \left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\right] \ .$$

Συνεπώς δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} f(x, y)$, διότι αν υπήρχε το όριο αυτό θα έπρεπε να υπάρχει και το όριο (3), αφού εξαιτίας της (1) είναι

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} \left[x\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} \left[f(x, y)-y\,\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right] .$$

Επομένως δεν υπάρχει το διπλό όριο $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)]$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει και το διπλό όριο $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$.

Τέλος, εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$. Για $xy\neq 0$ είναι

$$|f(x, y)| = \left|(x+y)\,\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} = 2|PP_0| .$$

Άρα

$$|f(x, y)-0| = |f(x, y)| \leq 2|PP_0| .$$

Επομένως, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ τότε, για κάθε $P(x, y)\in D$ με $0 < |PP_0| < \delta$ θα έχουμε

$$|f(x, y)-0| < 2\delta=\varepsilon .$$

Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

β) Αν $x = \sigma\tau\alpha\theta. \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=\sigma\tau\alpha\theta.}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^2\cdot 0}{x^2\cdot 0+(x-0)^2} = 0 = \varphi(x)$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)] = 0$. Ανάλογα προκύπτει ότι

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = 0 .$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Θεωρούμε την ακολουθία (P_n), με $P_n(x_n, y_n)\in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n = P_0$ και τέτοια, ώστε

$$\forall\ n\in \mathbb{N}^* ,\ y_n = \lambda x_n .$$

Είναι

$$\forall\ n\in \mathbb{N}^*, \quad f(P_n) = f(x_n, \lambda x_n) = \frac{\lambda^2 x_n^4}{\lambda^2 x_n^4+x_n^2(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^2 x_n^2}{\lambda^2 x_n^2+(1-\lambda)^2}$$

και $$\lim f(P_n) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{όταν} \ \lambda\neq 1 \\ 1 \ , \ \text{όταν} \ \lambda=1 \end{cases} .$$

Επομένως (βλ. 1.5, άσκ. 7(α)), δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

γ) Αν x = σταθ. ≠ 0, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} \left[\frac{1}{x}\,\text{ημ}(xy)\right] = \frac{1}{x}\cdot 0 = 0 = \varphi(x) \ .$$

Επομένως $$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 \ .$$

Αν y = σταθ. ≠ 0, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} \left[\frac{1}{x}\,\text{ημ}(xy)\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ (y=\text{σταθ.})}} y\,\frac{\text{ημ}(xy)}{xy} = y\cdot 1 = y = \sigma(y) \ .$$

Άρα
$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0}\sigma(y) = \lim_{y\to 0} y = 0 \ .$$

Θα εξετάσουμε, τέλος, αν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

Για το σημείο $P_0(0, 0)$ και την ευθεία x=0, έχουμε:

(i) Αν x≠0, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[y\,\frac{\text{ημ}(xy)}{xy}\right] = 0\cdot 1 = 0 \ .$$

(ii) Αν x=0, τότε
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} y = 0 \ .$$

Επομένως [1.2.15], υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

δ) Αν x = σταθ. ≠ 0, τότε

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x=\text{σταθ.})}} \frac{x-2y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1 = \varphi(x) \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 1 \ .$$

Αν $y = \text{σταθ.} \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=\text{σταθ.})}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\(y=\text{σταθ.})}} \frac{x-2y}{x+y} = \frac{-2y}{y} = -2 = σ(y) \quad \text{και}$$

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0} σ(y) = -2 .$$

Είναι $$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] \neq \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)]$$

και άρα [1.3.4] δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x, y)$.

15. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{όταν}\ \ x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ \ x=y=0\ , \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Θα εφαρμόσουμε τον ορισμό 1.4.1, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\forall\ ε>0\ ,\quad \exists\ δ = δ(ε) > 0 : \big(P(x, y)\in\mathbb{R}^2\ \ \text{και}\ \ |PP_0| < δ\big) \Rightarrow |f(x, y)-f(0, 0)| < ε\ .$$

Είναι $$|f(x, y)-f(0, 0)| = \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq |x|\,|y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(|PP_0|)^2 .$$

Άρα, αν δοθεί ο $ε>0$ και πάρουμε $δ = \sqrt{2ε}$, τότε, για κάθε $P(x, y)\in\mathbb{R}^2$ με $|PP_0| < δ$, θα είναι

$$|f(x, y)-f(0, 0)| < \frac{1}{2}δ^2 = ε\ .$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1-\text{συν}(\sqrt{xy})}{y} & ,\ \text{όταν}\ \ y\neq 0 \\ \dfrac{x}{2} & ,\ \text{όταν}\ \ y=0 \end{cases} .$$

Να δειχτεί ότι η f είναι συνεχής στα σημεία $P(x, 0)$, δηλαδή στα σημεία του άξονα $x'Ox$.

Λ. Αν $P_0(x_0, 0)$ είναι ένα σημείο πάνω στον $x'Ox$, η f θα είναι συνεχής στο P_0, αν [1.4.3], έχουμε

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(P_0) = f(x_0, 0) = \frac{x_0}{2} .$$

Για $y \neq 0$ είναι

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left(\frac{1-\text{συν}(\sqrt{xy})}{y} \right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left(\frac{2\text{ημ}^2\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)}{y} \right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left[\left(\frac{\text{ημ}\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{xy}}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} \right] =$$

$$= 1 \cdot \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2} .$$

Άρα [1.2.15] υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ και είναι ίσο με $\frac{x_0}{2}$.

Τέλος, επειδή $\frac{x_0}{2} = f(P_0)$ η f είναι συνεχής στο P_0.

17. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy+6x$, είναι συνεχής στο σημείο $P_0(1, 2)$.

Λ. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.4.2, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχουν $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ τέτοιοι, ώστε για κάθε $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $|x-1| < \delta_1$ και $|y-2| < \delta_2$ να έχουμε $|f(x, y)-f(1, 2)| < \varepsilon$. Αλλά είναι

$$|f(x, y)-f(1, 2)| = |xy+6x-8| = |8(x-1)+xy-2x| = |8(x-1)+x(y-2)| \leq 8|x-1| + |x|\,|y-2| , \quad \text{ή}$$

$$(1) \quad |f(x, y)-f(1, 2)| \leq 8|x-1|+|x|\,|y-2| .$$

Θεωρούμε πρώτα το θετικό $\delta_1=1$ και παίρνουμε $|x-1| < \delta_1$, οπότε

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow |x| < 2 .$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$(2) \quad |f(x, y)|-f(1, 2)| < 8|x-1|+2|y-2| .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta_1' = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{16}\right\}$ και $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$, τότε για κάθε $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $|x-1| < \delta_1'$ και $|y-2| < \delta_2$, εξαιτίας της (2), θα έχουμε

$$|f(x, y)-f(1, 2)| < 8\delta_1'+2\delta_2 \leq 8 \cdot \frac{\varepsilon}{16} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(1, 2)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,\quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}(1+y^2)\eta\mu x & , \text{ όταν } x \neq 0 \\ \alpha & , \text{ όταν } x = 0 . \end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Για το σημείο P_0 και την ευθεία $x=0$, έχουμε:

(i) Αν $x \neq 0$, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[(1+y^2)\frac{\eta\mu x}{x} \right] = (1+0)\cdot 1 = 1 .$$

(ii) Αν $x=0$, τότε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha = \alpha .$$

Άρα, αν πάρουμε $\alpha=1$, τότε [1.2.15], υπάρχει το $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 1 = f(0, 0)$ και συνεπώς η f θα είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,\quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\eta\mu \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & , \text{ όταν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \text{ όταν } x=y=0 . \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Είναι

$$|f(x, y)-f(0, 0)| = \left| (x^2+y^2)\,\eta\mu\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 0 \right| = \left| (x^2+y^2)\,\eta\mu\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq x^2+y^2 = (|PP_0|)^2 .$$

Επομένως, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$, τότε για κάθε $P(x, y) \in \mathbb{R}^2-\{P_0\}$ με $|PP_0|<\delta$, έχουμε

$$|f(x, y)-f(0, 0)| < \delta^2 = \varepsilon .$$

Άρα [1.4.1], η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x, y) = \begin{cases} x\eta\mu\left(\dfrac{1}{y}\right), & \text{όταν}\quad y \neq 0 \\ 0 & \text{, όταν}\quad y = 0\ . \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Λ. Για το σημείο $P_0(0, 0)$ και την ευθεία $y=0$, έχουμε:

(i) Αν $y \neq 0$, τότε

$$|f(x, y) - 0| = \left| x\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) - 0 \right| \leq |x| < \sqrt{x^2+y^2} = |PP_0|\ .$$

Άρα, αν δοθεί $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\varepsilon$, τότε για κάθε $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $|PP_0| < \delta$ και $y \neq 0$ θα είναι $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$, δηλαδή

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0\ .$$

(ii) Αν $y=0$, τότε $f(x, y) = 0$ και άρα

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0\ .$$

Επομένως [1.2.15] υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$ και επειδή $0 = f(0, 0) = f(P_0)$, η f είναι συνεχής στο P_0.

Τέλος, επειδή η f είναι συνεχής και σε κάθε άλλο σημείο του $\mathbb{R}^2$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 - \{P_0\} \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x, y) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} \quad \text{και}\quad P_0(0, 0)\ .$$

Να εξεταστεί αν μπορεί να οριστεί η τιμή της f στο σημείο P_0, ώστε να είναι συνεχής στο P_0.

Λ. Για να είναι συνεχής στο P_0 θα πρέπει να έχουμε [1.4.3]

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = f(0, 0)\ .$$

Αλλά είναι

$$f(x, y) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = \frac{2\eta\mu^2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)^2$$

και $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \ .$$

Επομένως, αν πάρουμε $f(0, 0) = \frac{1}{2}$, η f θα είναι συνεχής στο P_0.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\ \text{όταν}\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ x=y=0\ . \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Είναι

$$|f(x, y)-f(0, 0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|PP_0| \ .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta = 2\varepsilon$, τότε για κάθε $P(x, y)\in\mathbb{R}^2$ με $|PP_0| < \delta$, είναι

$$|f(x, y)-f(0, 0)| < \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon \ ,$$

δηλαδή είναι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $P_0(0, 0)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & ,\ \text{όταν}\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ x=y=0\ . \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Είναι

$$|f(x, y)-f(0, 0)| = \left|\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|\,|x+y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,|x+y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(|x|+|y|) \leq \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+y^2} = |PP_0| \ .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta=\varepsilon$, τότε για κάθε $P(x, y)\in\mathbb{R}^2$ με $|PP_0|<\delta$ θα είναι $|f(x, y)-f(0, 0)| < \varepsilon$, δηλαδή είναι $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f: A-B\to\mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y)\in A-B$, $f(x, y) = \dfrac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y}$,

$$A = \left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 / x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ y\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\} \ \text{ και } \ B = \{(x, y)\in A / x=y\}\ .$$

Να εξεταστεί αν μπορεί να οριστεί η f στο σύνολο B, έτσι ώστε να είναι συνεχής στο σύνολο A.

Λ. Είναι

$$f(x, y) = \frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{x-y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{\eta\mu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{x-y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}{2\eta\mu\left(\frac{x-y}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right)}\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\ .$$

Αν $P_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο πάνω στη διχοτόμο $y=x$, δηλαδή με $x_0=y_0$, τότε επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, υπάρχει το

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \sigma\upsilon\nu^3 x_0\ .$$

Άρα, η συνάρτηση θα οριστεί ως εξής:

$$\forall\ (x, y)\in A,\quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y} & ,\ \text{όταν } x\neq y \\ \sigma\upsilon\nu^3 x & ,\ \text{όταν } x=y\ , \end{cases}$$

για να είναι συνεχής στο A.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^p\eta\mu\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,\ \text{όταν } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν } x=y=0 \end{cases} \quad \text{και } \ p\in\mathbb{N}^*.$$

Να βρεθούν οι τιμές του p για τις οποίες η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

Λ. Είναι

$$|f(x, y)-f(0,0)| = \left|(x+y)^p \,\eta\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x+y|^p \leq [(|x|+|y|)^2]^{p/2} .$$

Αλλά έχουμε $\qquad 2|x|\,|y| \leq x^2+y^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad (|x|+|y|)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.

Επομένως

$$|f(x, y)-f(0,0)| \leq [2(x^2+y^2)]^{p/2} = 2^{p/2}(\sqrt{x^2+y^2})^p = 2^{p/2}(|PP_0|)^p .$$

Άρα, αν δοθεί ο $\varepsilon>0$ και πάρουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon^{1/p}}{\sqrt{2}}$, τότε

$$\forall\ \varepsilon>0 ,\quad \exists\ \delta = \frac{\varepsilon^{1/p}}{\sqrt{2}} > 0 : (P(x, y)\in \mathbb{R}^2 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ |PP_0| < \delta) \Rightarrow |f(x, y)-f(0,0)| < \varepsilon .$$

Κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο P_0, για κάθε $p\in\mathbb{N}^*$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y)\in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,\ \text{όταν}\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ x=y=0 . \end{cases}$$

Να δειχτεί ότι η f είναι συνεχής χωριστά ως προς x και ως προς y στο σημείο $P_0(0, 0)$, ενώ δεν είναι συνεχής στο P_0.

Λ. i) Αν πάρουμε το $y = 0 =$ σταθ., τότε προκύπτει συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x, η $\Phi(x) = f(x, 0)$. Αλλά είναι

$$\forall\ x\in\mathbb{R} ,\ f(x, 0) = 0 ,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0) .$$

Επομένως η f είναι συνεχής ως προς x στο P_0.

ii) Ανάλογα έχουμε

$$\forall\ y\in\mathbb{R},\ f(0, y) = 0 ,$$

οπότε

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$$

και συνεπώς η f είναι συνεχής ως προς y στο P_0.

iii) Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n = P_0$ και τέτοια, ώστε $\qquad \forall\ n\in\mathbb{N}^* ,\ x_n=y_n^2$.

Είναι

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \ f(P_n)=f(y_n^2,\, y_n)=\frac{y_n^2\cdot y_n^2}{y_n^4+y_n^4}=\frac{y_n^4}{2y_n^4}=\frac{1}{2}$$

και
$$\lim f(P_n)=\frac{1}{2}\neq f(0,\,0)=0.$$

Άρα [1.4.3], η f δεν είναι συνεχής στο P_0.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x,\,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{όταν}\ \ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\ \text{όταν}\ \ x=y=0\ .\end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0,\,0)$.

Λ. Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) με $P_n(x_n,\,y_n)\in\mathbb{R}^2-\{P_0\}$, $\lim P_n=P_0$ και τέτοια, ώστε
$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \ y_n=\lambda x_n\ .$$

Έχουμε
$$f(P_n)=f(x_n,\,\lambda x_n)=\frac{x_n^2\,(1+\lambda)^2}{x_n^2\,(1+\lambda^2)}=1+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

και
$$\lim_{\substack{P_n\to P_0\\ y_n=\lambda x_n}} f(P_n)=1+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\ .$$

Επομένως [1.5, άσκ. 7(α)], δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\,y)$

και συνεπώς η f είναι ασυνεχής στο σημείο $P_0(0,\,0)$.

1.6. Ασκήσεις που προτείνονται για λύση

28. Δίνεται η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y) \in D$, $f(x, y) = x + y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ και $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\ ,\ \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)\ .$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$, όπου $\forall\ (x, y) \in D$, $f(x, y) = x\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) + y\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ και $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\ ,\ \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)\ .$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 - A \to \mathbb{R}$, όπου $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ και $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 - A$, $f(x, y) = x\eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\ ,\ \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)\ .$$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ,\ \text{όταν}\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ \alpha & ,\ \text{όταν}\ x = y = 0 \end{cases}\ .$$

Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + 3y^4} & ,\ \text{όταν}\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ x = y = 0 \end{cases}\ .$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & ,\ \text{όταν}\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{όταν}\ x = y = 0 \end{cases}\ .$$

Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο σημείο $P_0(0, 0)$.

34. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$,
β) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + 2y^2}$,
γ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{x + y^2}$,
δ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$

ε) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
στ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x + y + x^2 + y^2}{x - y}$,
ζ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y^x$, $(x, y \in \mathbb{R}_+^*)$,

η) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^{1/y}$, $(x, y \in \mathbb{R}_+^*)$,   θ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$,   i) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in D,\ \ f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{1-2xy+y^2} \quad \text{και} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1-2xy+y^2 \neq 0\} \ .$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}\,[\lim_{y\to 1} f(x, y)]\ ,\ \ \lim_{y\to 1}\,[\lim_{x\to 1} f(x, y)] \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x, y)\ .$$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$, όπου

$$\forall\ (x, y) \in D\ ,\ \ f(x, y) = \frac{\eta\mu(x+y^2)}{x+y} \quad \text{και} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y \neq 0\}\ .$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\,[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\ ,\ \ \lim_{y\to 0}\,[\lim_{x\to 0} f(x, y)]\ , \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)\ .$$