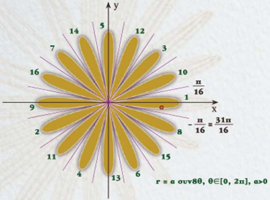
ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ Δ. ΦΡΑΓΚΟΥ
Δρα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ



3η έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τη συγγραφέα

Τηλέφωνο συγγραφέα: 2310 316-857

ISBN 960-431-677-X

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (8 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι ασκήσεις αυτού του βιβλίου αναφέρονται κυρίως στην παραγώγιση, ολοκλήρωση και στις ακολουθίες και σειρές πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Η ύλη που καλύπτουν διδάσκεται στα δύο πρώτα εξάμηνα των Θετικών Σχολών των ΑΕΙ και ΤΕΙ και των Πολυτεχνικών Σχολών των ΑΕΙ.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει σύντομη θεωρία, ασκήσεις λυμένες με κάθε δυνατή επεξήγηση και ασκήσεις που προτείνονται για λύση. Το παράρτημα περιέχει σύντομες λύσεις των ασκήσεων, που προτείνονται σ' όλα τα κεφάλαια, και τυπολόγιο με χρήσιμους βασικούς τύπους.

Ελπίζω αυτή η προσπάθεια να βοηθήσει τους φοιτητές στους οποίους απευθύνεται.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω θερμά τις Εκδόσεις Ζήτη για την επιμελημένη εμφάνιση του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2005

Β.Δ. ΦΡΑΓΚΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΣΗΜΕΙΑ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ. ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. ΜΗ ΓΝΗΣΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΣΕΙΡΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κεφάλαιο 1

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1. Η έννοια της πραγματικής ακολουθίας

1.1.1. ***ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ***. Στα επόμενα θα συμβολίζουμε:

$\mathbb{R}$ το σύνολο των **πραγματικών** αριθμών, $\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών** αριθμών $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων** αριθμών $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Q}$ το σύνολο των **ρητών** αριθμών, οπότε $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των **ασύμμετρων** (ή άρρητων) αριθμών.

Επίσης συμβολίζουμε $\overline{\mathbb{R}}$ το **επεκτεταμένο** σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$, $\mathbb{R}_+$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι **θετικοί ή μηδέν** και $\mathbb{R}_-$ το σύνολο των **αρνητικών** πραγματικών αριθμών. Όταν στα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ δεν ανήκει το μηδέν, τότε επάνω δεξιά βάζουμε έναν αστερίσκο, δηλαδή $\mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$.

1.1.2. ***ΟΡΙΣΜΟΣ***. Κάθε σύναρτηση $f: \mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, που απεικονίζει το σύνολο $\mathbb{N}^*$ στο σύνολο $\mathbb{R}$, λέγεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**, ή **πραγματική ακολουθία**, ή **αριθμητική ακολουθία**, ή πιο σύντομα, **ακολουθία**. Η τιμή $f(n)$ της συνάρτησης f συμβολίζεται $\mathbf{x_n}$, δηλαδή

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\quad f(n) = x_n$$

και ο x_n λέγεται **όρος** της ακολουθίας.
Η ακολουθία συμβολίζεται $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ή $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ή πιο σύντομα, (x_n).

1.1.3. ***ΟΡΙΣΜΟΣ***. Μια ακολουθία (x_n) λέγεται

(i) **φραγμένη προς τα πάνω**, όταν $\exists\ \kappa\in\mathbb{R}, \forall\ n\in\mathbb{N}^*, x_n\leqq\kappa$,

(ii) **φραγμένη προς τα κάτω**, όταν $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}, \forall\ n\in\mathbb{N}^*, x_n\geqq\lambda$ και

(iii) **φραγμένη**, όταν $\exists\ M\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*, |x_n|\leqq M$.

Ο αριθμός κ λέγεται **ανώτερο φράγμα** της ακολουθίας (x_n) και ο λ **κατώτερο φράγμα** της (x_n).

1.1.4. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Το μικρότερο από όλα τα ανώτερα φράγματα μιας ακολουθίας (x_n), φραγμένης προς τα πάνω, λέγεται **ανώτερο πέρας** της (x_n). Αντίστοιχα, το μεγαλύτερο από όλα τα κατώτερα φράγματα μιας ακολουθίας (x_n), φραγμένης προς τα κάτω, λέγεται **κατώτερο πέρας** της (x_n).

1.1.5. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία και $\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n, \ldots\}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε $\kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_n<\ldots$, τότε η ακολουθία (x'_n), όπου $x'_n=x_{\kappa_n}$ λέγεται **υπακολουθία**, ή **μερική ακολουθία της** (x_n).

1.1.6. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. (i) Μια ακολουθία (x_n) λέγεται **αυστηρά αύξουσα** (αντίστ. **αυστηρά φθίνουσα**), όταν $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n<x_{n+1}$ (αντίστ. $x_n>x_{n+1}$).

(ii) Η (x_n) λέγεται **αύξουσα** (αντίστ. **φθίνουσα**), όταν $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\leqq x_{n+1}$ (αντίστ. $x_n\geqq x_{n+1}$).

(iii) Η (x_n) λέγεται **μονότονη**, όταν έχει μια από τις ιδιότητες (i), (ii).

1.2. Συγκλίνουσες πραγματικές ακολουθίες

1.2.1. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Μια ακολουθία (x_n) λέγεται **συγκλίνουσα στον αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$**, όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}^*$, τέτοιος, ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του n_0, να είναι $|x_n-\lambda|<\varepsilon$. Ο λ λέγεται **όριο της (x_n)** και συμβολίζεται $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$, ή $\lim x_n = \lambda$.

Επίσης πιο σύντομα, γράφουμε:

$$\lim x_n = \lambda \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\quad \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, n>n_0,\ |x_n-\lambda| < \varepsilon,$$

ή

$$\lim x_n = \lambda \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\quad \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, n>n_0,\ x_n\in(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon),$$

δηλαδή όλοι οι όροι της ακολουθίας, με δείκτη μεταλύτερο του n_0, ανήκουν στο ανοικτό διάστημα $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ και συνεπώς μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων της (x_n) δεν ανήκει στο $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$.

1.2.2. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο $\lambda=0$, τότε λέγεται **μηδενική**. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\quad \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, n>n_0,\ |x_n|<\varepsilon.$$

1.2.3. *ΠΡΟΤΑΣΗ*. Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (x_n) είναι **μοναδικό**. Δηλαδή, αν $\lim x_n=\lambda$ και $\lim x_n=\mu$, τότε είναι κατ' ανάγκη $\lambda=\mu$.

1.2.4. *ΠΡΟΤΑΣΗ*. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, ενώ **δεν ισχύει το αντίστροφο**. Δηλαδή, μπορεί μια ακολουθία να είναι φραγμένη, χωρίς να είναι συγκλίνουσα, [βλ. 1.5, άσκ. 12].

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή σαν **«κριτήριο της μονοτονίας»**.

1.2.5. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Ειδικότερα:

(i) αν είναι αύξουσα και φραγμένη προς τα πάνω, συγκλίνει στο ανώτερο πέρας της και

(ii) αν είναι φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω, συγκλίνει στο κατώτερο πέρας της.

1.2.6. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν (x_n) είναι **φραγμένη** ακολουθία και (y_n) είναι **μηδενική** ακολουθία, τότε η ακολουθία $(x_n \cdot y_n)$ είναι **μηδενική**.

1.2.7. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν (x_n) είναι **μηδενική** ακολουθία και αν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, n > n_0$, $|y_n| \leqq \kappa |x_n|$, τότε και η ακολουθία (y_n) είναι **μηδενική**.

1.2.8. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε κάθε **υπακολουθία** (x'_n) της (x_n) συγκλίνει επίσης στο ίδιο όριο με την (x_n), δηλαδή $\lim x_n = \lambda \Rightarrow \lim x'_n = \lambda$.

1.2.9. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν οι ακολουθίες (x_n), (y_n) **συγκλίνουν** και είναι $\lim x_n = \lambda$, $\lim y_n = \mu$, τότε:

(i) $\lim(x_n+y_n) = \lim x_n+\lim y_n = \lambda+\mu$,

(ii) $\lim(x_n-y_n) = \lim x_n-\lim y_n = \lambda-\mu$,

(iii) $\lim(x_n \cdot y_n) = (\lim x_n)\cdot(\lim y_n) = \lambda\cdot\mu$ και

(iv) αν $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \neq 0$ και $\mu \neq 0$, $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

1.2.10. ***Παρατήρηση***. Επειδή οι ιδιότητες (i)–(iv) της [1.2.9.] ισχύουν με την προϋπόθεση ότι **υπάρχουν** τα όρια $\lim x_n$, $\lim y_n$, θα πρέπει πρώτα να διαπιστώνουμε ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν και μετά να τις εφαρμόζουμε. Ειδικά, στην εφαρμογή της [1.2.9, (iv)] θα πρέπει οπωσδήποτε να είναι $\mu \neq 0$, ενώ η υπόθεση "$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, y_n \neq 0$" δεν είναι απαραίτητη. Πραγματικά, είναι φανερό ότι $\lim y_n = \mu \neq 0 \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, n > n_0, y_n \neq 0$, οπότε παίρνουμε την υπακολουθία της (y_n) που προκύπτει, αν παραλείψουμε τους n_0 πρώτους όρους της.

1.2.11. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν $\lim x_n = \lambda$, $\lim y_n = \lambda$ και $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, n > n_0$ $x_n \leqq t_n \leqq y_n$, τότε είναι και $\lim t_n = \lambda$.

1.2.12. ***ΠΡΟΤΑΣΗ***. Αν $\lim x_n = \lambda$, τότε είναι και $\lim |x_n| = |\lambda|$, ενώ **δεν ισχύει το αντίστροφο**. Δηλαδή, μπορεί η $(|x_n|)$ να συγκλίνει και η (x_n) να αποκλίνει, [βλ. 1.5, άσκ. 13]. Ειδικά όμως αν $\lambda=0$, τότε ισχύει:

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0.$$

1.3. Πραγματικές ακολουθίες συγκλίνουσες στο $+\infty$, ή στο $-\infty$

1.3.1. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Μια ακολουθία (x_n) λέμε ότι **συγκλίνει**, ή ότι **αποκλίνει ορισμένα στο $+\infty$ (αντίστ. στο $-\infty$)**, όταν $\forall\ M>0,\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ x_n>M$ (αντίστ. $x_n<-M$) και γράφουμε $\lim x_n=+\infty$ (αντίστ. $\lim x_n=-\infty$).

1.3.2. *Παρατήρηση*. (i) Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο $+\infty$ (αντίστ. στο $-\infty$) **δεν είναι συγκλίνουσα**.

(ii) Οι προτάσεις [1.2.3], [1.2.8] και [1.2.11] ισχύουν και για τις ακολουθίες του ορισμού [1.3.1]. Επίσης η πρόταση [1.2.9] ισχύει, με τον περιορισμό να μην εμφανίζονται οι **«απροσδιόριστες μορφές»** (1) $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ και $\frac{\infty}{\infty}$ (1), δηλαδή εκφράσεις που δεν ορίζονται στο $\overline{\mathbb{R}}$. Δεν ισχύει η πρόταση [1.2.4], δηλαδή όταν μια ακολουθία συγκλίνει στο $+\infty$ (αντίστ. στο $-\infty$) **δεν είναι φραγμένη**.

Συγκεκριμένα, αν $\lim x_n=+\infty$, η (x_n) δεν είναι φραγμένη προς τα πάνω, ενώ αν $\lim x_n=-\infty$, η (x_n) δεν είναι φραγμένη προς τα κάτω.

Επίσης, ανάλογη με το «κριτήριο της μονοτονίας» [1.2.5] είναι η παρακάτω πρόταση:

1.3.3. *ΠΡΟΤΑΣΗ*. Κάθε αύξουσα ακολουθία, που δεν είναι φραγμένη προς τα πάνω, συγκλίνει στο $+\infty$ και κάθε φθίνουσα ακολουθία, που δεν είναι φραγμένη προς τα κάτω, συγκλίνει στο $-\infty$.

Τέλος, για τις ακολουθίες που συγκλίνουν στο $+\infty$, ή στο $-\infty$, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

1.3.4. *ΠΡΟΤΑΣΗ*.

(i) $\lim x_n=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim y_n=+\infty$ (αντίστ. $-\infty$) $\Rightarrow \lim(x_n+y_n)=+\infty$ (αντίστ. $-\infty$) και $\lim(x_n-y_n)=-\infty$ (αντίστ. $+\infty$),

(ii) $\lim x_n=\lambda\in\mathbb{R}^*$ και

$$\lim y_n=+\infty\ (\text{ή } -\infty) \Rightarrow \lim(x_n\cdot y_n)=\begin{cases}+\infty & \text{, όταν } \lambda \text{ και } \lim y_n \text{ ομόσημα}\\ -\infty & \text{, όταν } \lambda \text{ και } \lim y_n \text{ ετερόσημα,}\end{cases}$$

(iii) $\lim x_n=0$ και

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ x_n\neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{, όταν } \exists\ m\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>m,\ x_n>0\\ -\infty & \text{, όταν } \exists\ m\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>m,\ x_n<0,\end{cases}$$

(iv) $\lim x_n=\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim y_n=+\infty$ (ή $-\infty$) και $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $y_n\neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=0$,

(1) Στις (1) το σύμβολο ∞ μπορεί να είναι το $+\infty$, ή το $-\infty$. Επίσης το $0\cdot\infty$ μπορεί να είναι $0\cdot(\pm\infty)$, ή $(\pm\infty)\cdot 0$.

(v) $\lim x_n = \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lim y_n = 0$ και

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ y_n \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{, όταν } \exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n>m,\ \lambda \text{ και } y_n \text{ ομόσημα} \\ -\infty & \text{, όταν } \exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n>m,\ \lambda \text{ και } y_n \text{ ετερόσημα.} \end{cases}$$

1.3.5. *ΠΡΟΤΑΣΗ*.

(i) $\lim x_n = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$) και

$\lim y_n = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$) $\Rightarrow \lim(x_n+y_n) = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$),

(ii) $\lim x_n = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$) και

$\lim y_n = -\infty$ (αντίστ. $+\infty$) $\Rightarrow \lim(x_n-y_n) = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$),

(iii) $\lim x_n = +\infty$ (ή $-\infty$) και

$$\lim y_n = +\infty \ (\text{ή } -\infty) \Rightarrow \lim(x_n \cdot y_n) = \begin{cases} +\infty & \text{, όταν } \lim x_n \text{ και } \lim y_n \text{ ομόσημα} \\ -\infty & \text{, όταν } \lim x_n \text{ και } \lim y_n \text{ ετερόσημα.} \end{cases}$$

1.3.6. *ΠΡΟΤΑΣΗ*. $\lim x_n = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$) και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim(x_n+\lambda) = +\infty$ (αντίστ. $-\infty$) και

$$\lim(\lambda \cdot x_n) = \begin{cases} +\infty \ (\text{αντίστ. } -\infty) & \text{, όταν } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \\ -\infty \ (\text{αντίστ. } +\infty) & \text{, όταν } \lambda \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

1.3.7. *ΠΡΟΤΑΣΗ*.

$$\lim x_n = +\infty \ (\text{ή } -\infty) \Rightarrow \lim(|x_n|) = +\infty.$$

1.4. Ανώτερο και κατώτερο όριο πραγματικής ακολουθίας - Κριτήρια σύγκλισης

1.4.1. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. (i) Ο πραγματικός αριθμός λ λέγεται **ανώτερο όριο** της ακολουθίας (x_n), όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν άπειρου πλήθους όροι της (x_n) μεγαλύτεροι του $\lambda-\varepsilon$ και μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) μεγαλύτεροι του $\lambda+\varepsilon$. Το ανώτερο όριο της (x_n) συμβολίζεται $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, ή $\overline{\lim} x_n$.

(ii) Ο πραγματικός αριθμός μ λέγεται **κατώτερο όριο** της ακολουθίας (x_n), όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχουν άπειρου πλήθους όροι της (x_n) μικρότεροι του $\mu+\varepsilon$ και μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) μικρότεροι του $\mu-\varepsilon$. Το κατώτερο όριο της (x_n) συμβολίζεται $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, ή $\underline{\lim} x_n$.

1.4.2. *ΘΕΩΡΗΜΑ*. Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ανώτερο και κατώτερο όριο.

1.4.3. *ΘΕΩΡΗΜΑ*. Αν (x_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε για κάθε **συγκλίνουσα** υπακολουθία (x'_n) της (x_n) ισχύει:

$$\underline{\lim} x_n \leqq \lim x'_n \leqq \overline{\lim} x_n.$$

Δηλαδή, αν πάρουμε τα όρια **όλων των συγκλινουσών υπακολουθιών της (x_n)**, τότε το **μεγαλύτερο** από τα όρια αυτά είναι το $\overline{\lim} x_n$, ενώ το **μικρότερο** είναι το $\underline{\lim} x_n$, [βλ. 1.5, άσκ. 12].

1.4.4. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία τότε:

(i) $\overline{\lim} x_n = +\infty$, όταν για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, υπάρχουν άπειρου πλήθους όροι της (x_n) μεγαλύτεροι του κ,

(ii) $\underline{\lim} x_n = +\infty$, όταν για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) μικρότεροι του κ,

(iii) $\overline{\lim} x_n = -\infty$, όταν για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) μεγαλύτεροι του κ και

(iv) $\underline{\lim} x_n = -\infty$, όταν για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, υπάρχουν άπειρου πλήθους όροι της (x_n) μικρότεροι του κ.

1.4.5. *ΟΡΙΣΜΟΣ*. Κάθε ακολουθία που δεν συγκλίνει σε αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ή στα $+\infty$, $-\infty$ λέγεται **αποκλίνουσα**, ή **αόριστα αποκλίνουσα**.

Οι προτάσεις με τις οποίες αποδεικνύεται ότι μια ακολουθία συγκλίνει, ή αποκλίνει λέγονται **κριτήρια σύγκλισης**.

Συνήθως χρησιμοποιούμε τα κριτήρια:

(α) Το **κριτήριο της μονοτονίας**, [1.2.5 και 1.3.3].

(β) Το **κριτήριο του ανώτερου και κατώτερου ορίου**, που διατυπώνεται ως εξής:

1.4.6. *ΘΕΩΡΗΜΑ*. Η ακολουθία (x_n):

(i) συγκλίνει στον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, **ανν**(1)

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lambda,$$

(ii) συγκλίνει στο $+\infty$ (αντίστ. στο $-\infty$), **ανν**

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = +\infty \text{ (αντίστ. } -\infty\text{) και}$$

(1) Αν και μόνο αν.

(iii) αποκλίνει αόριστα, **ανν**

$$\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n.$$

(γ) Το **κριτήριο του Cauchy**, που διατυπώνεται ως εξής:

1.4.7. ***ΘΕΩΡΗΜΑ***. Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό, **ανν**

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n>n_0,\ \forall\, m>n_0,\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Το κριτήριο του Cauchy είναι πολύ σημαντικό γιατί μ' αυτό διαπιστώνουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει, χωρίς να ξέρουμε το όριό της.

1.4.8. ***Παρατήρηση***. Παρακάτω αναφέρονται μερικές χαρακτηριστικές γνωστές ακολουθίες, που με τη βοήθειά τους, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ακολουθιών, μπορούν να μελετηθούν άλλες ακολουθίες.

(α) Αν $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, τότε $\lim x_n = \lim y_n = e \simeq 2{,}718\ldots$

και (x_n) αυστηρά αύξουσα, (y_n) αυστηρά φθίνουσα.

(β) (i) Αν $\lim x_n = +\infty$ (ή $\lim x_n = -\infty$), τότε $\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ και

(ii) αν $\lim x_n = 0$ και $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$ (ή $x_n < 0$), τότε $\lim(1+x_n)^{1/x_n} = e$.

(γ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι $\lim \alpha^n = \begin{cases} 0 & , \text{όταν } |\alpha|<1 \\ 1 & , \text{όταν } \alpha=1 \\ +\infty & , \text{όταν } \alpha>1 \\ \nexists \lim \alpha^n & , \text{όταν } \alpha \leqq -1. \end{cases}$

(δ) Αν $\alpha>0$, είναι $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

(ε) Είναι $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

(στ) Αν $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n>0$ τότε:

(i) $\lim x_n = \alpha > 0 \Leftrightarrow \lim(\ln x_n) = \ln\alpha$,

(ii) $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(\ln x_n) = +\infty$,

(iii) $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim(\ln x_n) = -\infty$.

(ζ) Αν $\lim x_n = \lambda \in \mathbb{R}$ (αντίστ. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n>0$ και $\lim x_n = +\infty$), τότε είναι και

$$\lim\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = \lambda \quad (\text{αντίστ. } +\infty).$$

(η) Αν $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n>0$ και $\lim x_n = \lambda > 0$ (αντίστ. $\lim x_n = +\infty$), τότε είναι και

$$\lim\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}\right) = \lambda \quad (\text{αντίστ. } +\infty).$$

(θ) Αν $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n>0$ και $\lim x_n=\lambda>0$ (αντίστ. $\lim x_n=+\infty$), τότε είναι και

$$\lim\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\right)=\lambda \text{ (αντίστ. } +\infty).$$

(ι) Αν $\lim x_n=+\infty$ (αντίστ. $-\infty$), τότε

$$\lim \alpha^{x_n}=\begin{cases}0 \text{ (αντίστ. } +\infty) & \text{, όταν } 0<\alpha<1\\ +\infty \text{ (αντίστ. } 0) & \text{, όταν } \alpha>1.\end{cases}$$

Τέλος, το επόμενο **θεώρημα του Stolz** είναι χρήσιμο στη μελέτη των ακολουθιών.

1.4.9. ***ΘΕΩΡΗΜΑ***. Έστω (x_n) τυχούσα ακολουθία και (y_n) ακολουθία αυστηρά αύξουσα, συγκλίνουσα στο $+\infty$. Αν $\lim\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)=\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι και $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lambda$.

1.5. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν (x_n) είναι μια μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών, τότε και η ακολουθία (x_n^{α}), όπου $\alpha>0$, είναι μηδενική.

Λ.(1) Έστω $\varepsilon>0$, οπότε και $\varepsilon^{1/\alpha}>0$. Επειδή η (x_n) είναι μηδενική έχουμε, [1.2.2]

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall\ n>n_0,\ \ |x_n|<\varepsilon^{1/\alpha}.$$

Αλλά $|x_n|<\varepsilon^{1/\alpha} \Rightarrow |x_n^{\alpha}|<\varepsilon$, δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ |x_n^{\alpha}|<\varepsilon \ \text{ και συνεπώς } \lim x_n^{\alpha}=0.$$

2. Να δειχτεί ότι αν $\lim\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\lambda<1$, όπου $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\neq 0$, τότε η ακολουθία (x_n) είναι μηδενική.

Λ. Είναι $\lim\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\lambda$ και $0\leqq\lambda<1$.

Επομένως αν πάρουμε $0<\varepsilon_0<1-\lambda$, τότε [1.2.1]

$$\exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ -\varepsilon_0<\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|-\lambda<\varepsilon_0 \ \text{ και συνεπώς}$$

$$\forall\ n>n_0,\ |x_{n+1}|<(\lambda+\varepsilon_0)|x_n|.$$

Θέτουμε $\lambda+\varepsilon_0=\kappa$ και έχουμε

(1) $$\forall\ n>n_0,\ |x_{n+1}|<\kappa|x_n|,\ \text{ όπου } 0<\kappa<1.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις (1) κατά μέλη για $n_0+1, \ldots, n_0+m-1$, προκύπτει

(2) $$|x_{n_0+m}|<\kappa^m|x_{n_0+1}|.$$

Από την (2) και τις [1.2.7], [1.4.8, (γ)] προκύπτει ότι η ακολουθία (x_{n_0+m}) είναι μηδενική. Θα δείξουμε ότι και η (x_n) είναι μηδενική.

Πραγματικά, επειδή $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_0+m}=0$, είναι [1.2.2]

(3) $$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_1\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall\ m>n_1,\ \ |x_{n_0+m}|<\varepsilon.$$

Αν θέσουμε $n=n_0+m$, τότε $m>n_1 \Rightarrow n>n_0+n_1$ και η (3) γράφεται

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0'=n_0+n_1\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall\ n>n_0',\ \ |x_n|<\varepsilon.$$

Άρα $\lim x_n=0$.

---

(1) Το Λ. σημαίνει λύση.

3. Να δειχτεί ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in \mathbb{N}^*$, $x_n=n^{\varkappa}\alpha^n$, $|\alpha|<1$ και $\varkappa\in\mathbb{Z}$, είναι μηδενική.

Λ. Είναι $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\neq 0$ και

$$\lim\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)^{\varkappa}\alpha^{n+1}}{n^{\varkappa}\alpha^n}\right| = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varkappa}|\alpha| = 1\cdot|\alpha| = |\alpha|<1.$$

Επομένως, [1.5, άσκ. 2] η (x_n) είναι μηδενική.

4. Να δειχτεί ότι αν $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n>0$ και $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lambda>0$ (αντίστ. $+\infty$), τότε είναι και $\lim(\sqrt[n]{x_n}) = \lambda$ (αντίστ. $+\infty$).

Λ. Επειδή η ακολουθία $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ συγκλίνει στο $\lambda>0$ (αντίστ. στο $+\infty$), η ακολουθία των γεωμετρικών της μέσων συγκλίνει επίσης στο λ (αντίστ. στο $+\infty$), [1.4.8, (η)]. Επομένως, έχουμε

$$\lim\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}} = \lambda \text{ (αντίστ. } +\infty).$$

Αλλά είναι [1.4.8, (δ)] $\lim\sqrt[n]{x_1} = 1$ και συνεπώς

$$\lim(\sqrt[n]{x_n}) = \lim\left[\left(\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}}\right)\left(\sqrt[n]{x_1}\right)\right] = \lambda\cdot 1 = \lambda \text{ (αντίστ. } (+\infty)\cdot 1 = +\infty).$$

5. Να βρεθεί το όριο $\lim\sqrt[\nu]{\nu!}$.

Λ. Για την ακολουθία (x_ν), όπου $\forall\, \nu\in\mathbb{N}^*$, $x_\nu=\nu!$ έχουμε

$$\lim\left(\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}\right) = \lim\frac{(\nu+1)!}{\nu!} = \lim(\nu+1) = +\infty.$$

Άρα [1.5, άσκ. 4], $\lim(\sqrt[\nu]{x_\nu}) = \lim\sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty$.

2η Λύση. Αν $x_\nu = \sqrt[\nu]{\nu!}$, τότε $\ln x_\nu = \ln\sqrt[\nu]{\nu!} = \frac{1}{\nu}\ln\nu! = \frac{\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln\nu}{\nu}$.

Και επειδή $\lim\ln\nu = +\infty$ και $\ln\nu>0$ έχουμε, [1.4.8,(ζ)] $\lim\ln x_\nu = +\infty$. Άρα [1.4.8,(στ)],

$$\lim x_\nu = \lim\sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty.$$

6. Να δειχτεί ότι $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^*$, είναι $\lim \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.

Λ. Είναι $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\alpha^n}{n!} \neq 0$ και

$$\lim \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim \left| \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\alpha^n}{n!}} \right| = \lim \frac{|\alpha|}{n+1} = 0 < 1.$$

Άρα [1.5, άσκ. 2], $\lim x_n=0$.

7. Έστω (x_n) μηδενική ακολουθία και (y_n) μηδενική ακολουθία, αυστηρά φθίνουσα και $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $y_n>0$.

Να δειχτεί ότι αν $\lim \left(\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}} \right) = \lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι και $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \lambda$.

Λ. (i) Αν $\lim \left(\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}} \right) = \lambda\in\mathbb{R}$, τότε [1.2.1]

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ \left| \frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{ή}$$

(1) $\quad \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ (y_n-y_{n+1}) \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \right) < (x_n-x_{n+1}) < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_n-y_{n+1}),$

επειδή $y_n-y_{n+1} > 0$.

Αν αθροίσουμε τις ανισότητες της (1) για $n, n+1, \ldots, n+p-1$, όπου $p\in\mathbb{N}^*$ και $n>n_0$, προκύπτει

(2) $$(y_n-y_{n+p})\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_n-x_{n+p} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right)(y_n-y_{n+p})$$

και για n σταθερό έχουμε

$$\lim_{p\to\infty} x_{n+p} = 0\ ,\quad \lim_{p\to\infty} y_{n+p} = 0.$$

Επομένως, αν πάρουμε τα όρια των μελών της (2), όταν $p\to\infty$, έχουμε

$$y_n\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \right) \leqq x_n \leqq y_n\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) \text{ και συνεπώς}$$

$$\lambda-\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \lambda+\varepsilon,\ \text{δηλαδή} \left| \frac{x_n}{y_n} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Έχουμε δείξει ότι

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ \left| \frac{x_n}{y_n} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Άρα $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \lambda$.

(ii) Παρόμοια είναι η απόδειξη, όταν $\lambda=+\infty$, ή $\lambda=-\infty$.

8. Αν (x_n) είναι μηδενική ακολουθία και (y_n) φραγμένη ακολουθία, να δειχτεί ότι η ακολουθία (z_n), όπου

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{x_1y_n+\ldots+x_py_{n-p}+\ldots+x_ny_1}{n},$$ **είναι μηδενική.**

Λ. Επειδή η (y_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $\varkappa>0$ τέτοιος, ώστε $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ |y_n|\leqq\varkappa$. Επίσης η (x_n) είναι μηδενική και συνεπώς

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, n>n_0,\ |x_n|<\frac{\varepsilon}{2\varkappa}.$$

Άρα

$$|z_n| = \frac{|x_1y_n+\ldots+x_py_{n-p}+\ldots+x_ny_1|}{n} \leqq \frac{\varkappa(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{n} <$$
$$< \frac{\varkappa(|x_1|+\ldots+|x_{n_0}|)}{n} + \frac{n-n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varkappa M}{n} + \frac{n-n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2},$$

όπου $M = |x_1|+\ldots+|x_{n_0}| =$ σταθ. Αν πάρουμε τον $n_1\in\mathbb{N}^*$ τέτοιον, ώστε $\frac{\varkappa M}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, τότε $\forall\, n>n_1$ είναι $\frac{\varkappa M}{n} < \frac{\varkappa M}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως, αν $n_0' = \max(n_0, n_1)$, τότε

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0'\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, n>n_0',\ |z_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η (z_n) είναι μηδενική ακολουθία.

9. Να δειχτεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου της μονοτονίας, ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_n = 1 + \frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, συγκλίνει.

Λ. Η (x_n) είναι αύξουσα και $\forall\, n>1$ είναι

$$x_n<1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n} <1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{2}{n} < 2.$$

Επομένως η (x_n) είναι φραγμένη προς τα πάνω, οπότε [1.2.5,(i)] συγκλίνει.

10. Να δειχτεί ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \sqrt{\varkappa+x_n},\ x_1=1$ και $\varkappa>0$, είναι αύξουσα και φραγμένη και να βρεθεί το όριό της.

Λ. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι η (x_n) είναι αύξουσα δηλαδή ότι

(1) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1}\geqq x_n$.

Πραγματικά, για $n=1$, η (1) ισχύει, επειδή είναι $x_2-x_1 = \sqrt{k+1}-1> 0$. Δεχόμαστε ότι η (1) ισχύει για $n=\nu$, δηλαδή ότι (2) $x_{\nu+1} \geq x_\nu$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n=\nu+1$.

Παρατηρούμε ότι:

(3) $x_{\nu+2} \geqq x_{\nu+1} \Leftrightarrow \sqrt{\varkappa+x_{\nu+1}} \geqq \sqrt{\varkappa+x_\nu} \Leftrightarrow \varkappa+x_{\nu+1} \geqq \varkappa+x_\nu \Leftrightarrow x_{\nu+1} \geqq x_\nu$.

Και επειδή δεχθήκαμε ότι η (2) ισχύει, άρα ισχύει και η (3) και συνεπώς η (1) ισχύει. Επομένως η (x_n) είναι αύξουσα. Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι και φραγμένη.

Πραγματικά έχουμε

$$x_n = \sqrt{\varkappa+x_{n-1}} \leqq \sqrt{\varkappa+x_n}\,, \text{ οπότε } x_n^2 \leqq \varkappa+x_n \text{ ή}, \quad (4) \quad x_n^2-x_n-\varkappa \leqq 0.$$

Αλλά η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_n^2-x_n-\varkappa$ είναι $\Delta=1+4\varkappa>0$ και συνεπώς το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες ϱ_1, ϱ_2. Άρα, για να ισχύει η (4) πρέπει να είναι $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\varrho_1\leqq x_n\leqq\varrho_2$. Επομένως η (x_n) είναι φραγμένη οπότε, [1.2.5, (i)] συγκλίνει. Αν $\lim x_n=\lambda$, είναι και $\lim x_{n-1}=\lambda$.

Επομένως έχουμε $\lim x_n = \sqrt{\varkappa+\lim x_{n-1}}$, ή $\lambda = \sqrt{\varkappa+\lambda}$, ή $\lambda^2-\lambda-\varkappa = 0$ και $\lambda = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4\varkappa}}{2}$.

Η τιμή $\lambda = \dfrac{1-\sqrt{1+4\varkappa}}{2} = \varrho_1$ απορρίπτεται, επειδή ο ϱ_1 είναι ένα κατώτερο φράγμα της (x_n). Άρα

$$\lim x_n = \frac{1+\sqrt{1+4\varkappa}}{2}.$$

11. Να δειχτεί ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$, είναι μηδενική.

Λ. Είναι $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\neq 0$ και

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

Άρα [1.4.8, (α)], $\lim\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \dfrac{2}{e} < 1$, οπότε [1.5, άσκ. 2], η (x_n) είναι μηδενική.

12. Δίνεται η ακολουθία (x_n), όπου

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_n = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^n} & \text{, όταν } n \text{ περιττός} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{, όταν } n \text{ άρτιος και } n\neq 10^\varkappa,\ \varkappa\in\mathbb{Z} \\ 2 & \text{, όταν } n=10^\varkappa,\ \varkappa \text{ άρτιος} \\ 2-\dfrac{1}{2^n} & \text{, όταν } n=10^\varkappa,\ \varkappa \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Να βρεθούν τα $\overline{\lim} x_n$, $\underline{\lim} x_n$ και να εξεταστεί αν η (x_n) είναι φραγμένη και αν συγκλίνει.

Λ. Θεωρούμε τις υπακολουθίες της (x_n):

(1) (x'_n), όπου $x'_n=1-\frac{1}{2^n}$, n περιττός,

(2) (x''_n), όπου $x''_n=\frac{1}{2^n}$, n άρτιος και $n\neq 10^\kappa$, $\kappa\in\mathbb{Z}$,

(3) (x'''_n), όπου $x'''_n=2$, $n=10^\kappa$, κ άρτιος και

(4) $(x^{(iv)}_n)$, όπου $x^{(iv)}_n=2-\frac{1}{2^n}$, όπου $n=10^\kappa$, κ περιττός.

Είναι $\lim x'_n=1$, $\lim x''_n=0$, $\lim x'''_n=2$ και $\lim x^{(iv)}_n=2$.

Και επειδή κάθε άλλη υπακολουθία της (x_n) περιέχει άπειρους όρους από κάποια από τις (1), (2), (3) και (4), προκύπτει ότι το σύνολο των ορίων όλων των συγκλινουσών υπακολουθιών της (x_n) είναι το $\{0, 1, 2\}$. Άρα [1.4.3], $\overline{\lim}x_n=2$ και $\underline{\lim}x_n=0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $0<x_n\leqq 2$ και συνεπώς η (x_n) είναι φραγμένη. Τέλος, είναι $\overline{\lim}x_n\neq\underline{\lim}x_n$, και συνεπώς [1.4.6, (iii)], η (x_n) αποκλίνει.

13. Έστω η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=(-1)^n$.
Να εξεταστεί αν οι (x_n) και $(|x_n|)$ συγκλίνουν.

Λ. i) Θεωρούμε τις υπακολουθίες της (x_n), $(x_{2\kappa})_{\kappa\in\mathbb{N}^*}$, όπου $x_{2\kappa}=1$ και $(x_{2\kappa-1})_{\kappa\in\mathbb{N}^*}$, όπου $x_{2\kappa-1}=-1$. Είναι $\lim x_{2\kappa}=1$, $\lim x_{2\kappa-1}=-1$. Επίσης, κάθε άλλη συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει ή στο 1, ή στο -1.

Άρα $\overline{\lim}x_n=1$ και $\underline{\lim}x_n=-1$, οπότε [1.4.6] η (x_n) αποκλίνει.

ii) Επειδή $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $|x_n|=1$, είναι και $\lim|x_n| = 1$.

Επομένως η $(|x_n|)$ συγκλίνει, [βλ. 1.2.12].

14. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, να δειχτεί ότι $\lim\sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}=\max\{\alpha, \beta\}$.

Λ. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=\sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}$.

i) Αν $\alpha\geqq\beta$ τότε $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha=\sqrt[n]{\alpha^n}<\sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}\leqq\sqrt[n]{\alpha^n+\alpha^n}=\alpha\sqrt[n]{2}$, δηλαδή $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha<\sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}\leqq\alpha\sqrt[n]{2}$. Και επειδή [1.4.8,(δ)], $\lim\alpha\sqrt[n]{2}=\alpha\cdot 1=\alpha$, από την [1.2.11] προκύπτει $\lim x_n=\alpha=\max\{\alpha, \beta\}$.

ii) Παρόμοια αποδεικνύεται ότι, όταν $\alpha<\beta$, τότε $\lim x_n=\beta=\max\{\alpha, \beta\}$.

15. Αν $x_1=1, x_2=3$ και $\forall\, n\geqq 2,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$, να δειχτεί , με τη βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy, ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει.

Λ. Αρκεί να δείξουμε ότι [1.4.7]

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, n>n_0,\ \forall\, m>n_0,\ \ |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Είναι
$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}),$$
$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_3-x_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\ .$$

Άρα

(1) $\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1}-x_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(x_2-x_1)=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{2^{n-1}}$.

Επίσης, αν $m, n\in\mathbb{N}^*$ και $m<n$, τότε

$$|x_m-x_n|=|x_m-x_{m+1}+x_{m+1}-x_{m+2}+x_{m+2}-\ldots-x_{n-1}+x_{n-1}-x_n|\leqq$$
$$\leqq |x_{m+1}-x_m|+|x_{m+2}-x_{m+1}|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|,$$

οπότε, εξαιτίας της (1), έχουμε

(2) $\quad |x_m-x_n|\leqq 2\left(\dfrac{1}{2^{m-1}}+\dfrac{1}{2^m}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)=\dfrac{1}{2^{m-2}}+\dfrac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-3}}$.

Και επειδή η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{2^\kappa}\right)_{\kappa\in\mathbb{N}^*}$ είναι μηδενική, προκύπτει

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\left(\frac{1}{2^{m-2}}+\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-3}}\right)=0.$$

Επομένως

(3) $\quad \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, m>n_0,\ \forall\, n>n_0,\ \ \left|\dfrac{1}{2^{m-2}}+\dfrac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-3}}\right|<\varepsilon.$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, n>n_0,\ \forall\, m>n_0,\ |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Άρα [1.4.7], η ακολουθία (x_n) συγκλίνει.

16. Να δειχτεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy, ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, συγκλίνει στο $+\infty$.

Λ. Αν πάρουμε $n=2m$, τότε

$$x_n - x_m = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} > m\cdot\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$\exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0,\ \ \forall\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists\ n, m > n_0,\ \ |x_n - x_m| > \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή η σχέση $\quad \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ n>n_0,\ \forall\ m>n_0,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

δεν ισχύει και συνεπώς [1.4.7], η (x_n) δεν συγκλίνει σε $\lambda \in \mathbb{R}$. Και επειδή η (x_n) είναι αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, είναι [1.3.3], $\lim x_n = +\infty$.

1.6. Ασκήσεις που προτείνονται για λύση

17. Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και μηδενική και αν $\lim[n(x_n + x_{n+1})] = 1$, να δειχτεί ότι $\lim(nx_n) = \frac{1}{2}$.

18. Να δειχτεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy, ότι η ακολουθία (x_n), όπου:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{n}, & \text{όταν } n \text{ άρτιος} \\ \dfrac{n-1}{n}, & \text{όταν } n \text{ περιττός,} \end{cases}$$

αποκλίνει.

19. Αν $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{1}{2^{-n} + (-1)^n}$, να βρεθούν τα $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$.

20. Αν $0<\alpha<\beta$ να δειχτεί ότι οι ακολουθίες $(x_n), (y_n)$, όπου $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n},\ \ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, και $x_1 = \alpha,\ y_1 = \beta$, συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

21. Έστω (x_n) μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια, ώστε $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha < x_n^n < \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Να δειχτεί ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

22. Να δειχτεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου της μονοτονίας, ότι η ακολουθία (x_n), όπου $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, συγκλίνει.

23. Αν $0<\alpha<1$, $x_1 = \alpha$ και $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, να δειχτεί ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και φραγμένη και να βρεθεί το όριό της.

24. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών $(x_n), (y_n)$, όπου $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ και $y_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

25. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stolz, να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών $(\alpha_n), (\beta_n)$, όπου i) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \ldots + \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$ και ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \beta_n = \dfrac{1 + 2^2 + \ldots + n^n}{n^n}$.

26. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_n), όπου $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \forall\ n \in \mathbb{N}^*,$.

27. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών $(x_n), (y_n)$, όπου α) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \sqrt[p]{n+1} - \sqrt[p]{n}$ και β) $y_n = \dfrac{[\lambda] + [2\lambda] + \ldots + [n\lambda]}{n^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, [βλ. σελ. 471].