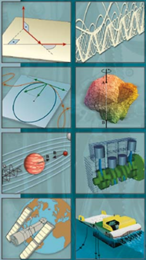
Ι. Ε. Φραγκιαδάκης

Φυσική & Τεχνολογία

Θεμελιώδεις έννοιες & εφαρμογές



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-854-3

Πρώτη έκδοση 2003
Πρώτη ανατύπωση με βελτιώσεις 2006

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 (3 γραμ.) - Fax: 2392.072.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310.203.720, Fax 2310.211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Σχόλια του συγγραφέα

Ο σκοπός της συγγραφής του βιβλίου αυτού είναι η δημιουργία ενός εκπαιδευτικού βοηθήματος, στο χώρο της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, που να συνδυάζει, στα πλαίσια του εφικτού, την παρουσίαση των θεμελιωδών αρχών και νόμων της Φυσικής, με την εφαρμογή τους σε θέματα τεχνολογικού ενδιαφέροντος. Προηγήθηκε μια μακρά περίοδος διαμόρφωσης της ύλης και του κειμένου, με βάση την αμφίδρομη σχέση που αναπτύσσεται, συνήθως, μεταξύ διδάσκοντα και διδασκομένων. Πολύτιμη, υπήρξε η βοήθεια ήδη καταξιωμένων εκπαιδευτικών συγγραμμάτων, τα οποία αναφέρονται αναλυτικά, στον πίνακα βιβλιογραφίας του συγγράμματος.

Η μελέτη των φυσικών νόμων και εννοιών και η ανάπτυξη των επιμέρους θεμάτων επιλέχθηκε, συνειδητά, να γίνει μέσα από την εμπεριστατωμένη και κριτική αντιμετώπισή τους, αποφεύγοντας την επιγραμματική τους μόνο παράθεση. Η μεθοδολογία της συμπυκνωμένης παρουσίασης εννοιών, η οποία αποδεικνύεται πολύ εξυπηρετική σε σεμιναριακού τύπου διδασκαλία, εμπεριέχει τον κίνδυνο, ιδιαίτερα στο στάδιο της θεμελίωσης των εννοιών της Φυσικής, να οδηγήσει στην αδρανοποίηση της πνευματικής ανησυχίας των νέων και μάλιστα εκείνων που αναζητούν τη γνώση και δεν ικανοποιούνται με την υποβάθμισή της σε απλή πληροφορία. Η αναφορά στις έννοιες της Φυσικής με τη μορφή συνθηματικών προτάσεων και μόνο, εμφανίζεται πολλές φορές δελεαστική για τα δύο μέλη της εκπαιδευτικής διαδικασίας, διδάσκοντες και διδασκόμενους. Στους μεν, παρέχει την ευχέρεια άνετης και θελκτικής παρουσίασης ενός θέματος, στους δε, δίδει την ψευδαίσθηση ενός άμεσα αντιληπτού θετικού αποτελέσματος, το οποίο, όμως, αποδεικνύεται πρόσκαιρο και εξανεμίζεται μόλις η αναφορά στη γνώση γίνει ουσιαστική. Αντίθετα, η ισορροπημένη διδακτική παρουσίαση και η μεθοδική αναζήτηση της ουσίας των πραγμάτων, με αλληλεπίδραση με το ακροατήριο, ενισχύει την πνευματική ικανότητα του εκπαιδευόμενου, στρέφοντάς την στη δημιουργική και παραγωγική αξιοποίηση της γνώσης.

Η ύλη του βιβλίου και η οργάνωσή της

Σε γενικές γραμμές, το βιβλίο αυτό καλύπτει ύλη Φυσικής, σε ευρύ φάσμα εννοιών και θεμάτων, που άπτονται των ενδιαφερόντων Μηχανικού, Μηχανολόγου ή Ηλεκτρολόγου. Συγκεκριμένα, τα θέματα και οι εφαρμογές που παρουσιάζονται και αναλύονται, σταχυολογούνται από τη Μηχανική, τον Ηλεκτρισμό, τη Θερμότητα και τις Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας (ΑΠΕ).

Αναλυτικότερα, στην εισαγωγή, γίνεται θεμελίωση του διεθνούς συστήματος μονάδων (SI) και παρέχεται μια αναλυτική παρουσίαση των πρότυπων μονάδων, με βάση τις αποφάσεις των σχετικών συνεδρίων. Ο σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι η ανάδειξη της σημασίας της μέτρησης καθώς και της αναγκαιότητας καθορισμού των πρότυπων μονάδων των Φυσικών ποσοτήτων μέσα από συγκεκριμένες πειραματικές διαδικασίες.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίδεται μια σύντομη, κυρίως εννοιολογική εισαγωγή, στο μαθηματικό λογισμό. Ο σκοπός αυτής της αναφοράς, είναι να δοθεί η φυσική διάσταση της μαθηματικής σκέψης, προκειμένου να περιοριστούν στο ελάχιστο δυνατόν, οι επιπτώσεις μιας πιθανής μηχανιστικής χρήσης των μαθηματικών κατά την παρουσίαση και επεξεργασία των θεμάτων στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται περιληπτικά, έννοιες της κινηματικής, με σκοπό να εξυπηρετήσουν διδακτικές ανάγκες των επομένων κεφαλαίων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, δίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάλυση των βασικών εννοιών της Φυσικής, όπως π.χ. όσα αφορούν σε δυνάμεις και πεδία, ενέργεια και διατήρησή της, μηχανικές και κύρια ηλεκτρικές ταλαντώσεις, φαινόμενα συντονισμού σε ηλεκτρικά κυκλώματα. Κρίθηκε σκόπιμο να δοθεί, μέσα από μια συνοπτική παρουσίαση, ως ειδικό θέμα συμπληρωματικής μελέτης, η αναφορά στα αποτελέσματα της δράσης του ηλεκτρικού πεδίου, στατικού ή εναλλασσομένου, με την ύλη. Εξετάζεται, επίσης, η δράση του μαγνητικού πεδίου σε κινούμενα φορτία, σε συνδυασμό με χρήσιμες εφαρμογές. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με παρουσίαση θεμάτων σχετικών με τη βαρύτητα.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά στο έργο και την ενέργεια. Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια αυτού του βιβλίου. Θεμελιώνονται, προσεκτικά, οι έννοιες του έργου, της ενέργειας, της ισχύος, στιγμιαίας και μέσης. Παρουσιάζονται, τα θεωρήματα που συσχετίζουν, αφ’ ενός, τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος με το σύνολο των έργων που παράγονται ή καταναλίσκονται κατά τη μεταβολή αυτή, αφ’ ετέρου το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων (τριβών) με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας. Η ενεργειακή απόδοση μηχανών παρουσιάζεται γενικά και μέσω της έννοιας της θερμικής μηχανής και αντιδιαστέλλεται από το συντελεστή επίδοσης των ψυγείων και κλιματιστικών μηχανημάτων. Σε καθένα απ' τα λυμένα παραδείγματα παρατίθεται η σκέψη επίλυσης, πολλά δε απ' αυτά επελέγησαν με κύριο κριτήριο την τεχνολογική τους σημασία.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, εξετάζεται ο απλός αρμονικός ταλαντωτής καθώς και η φθίνουσα και εξαναγκασμένη ταλάντωση και τα χαρακτηριστικά της. Αναλύεται η μεθοδολογία των περιστρεφομένων ανυσμάτων, η οποία αξιοποιείται στη μελέτη της σύνθεσης των ταλαντωτικών κινήσεων, ιδιαίτερα στα ηλεκτρικά κυκλώματα και γίνεται σύντομη αναφορά στην αντίστοιχη μεθοδολογία με τους μιγαδικούς αριθμούς.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται σύντομα αλλά με την δέουσα προσοχή στην ακρίβεια και τη σαφήνεια, θέματα που αφορούν στη στατική και στη δυναμική συμπεριφορά του στερεού σώματος, με αναφορά στην τεχνολογική εφαρμογής τους. Η εμπέδωση τους ολοκληρώνεται μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Στο κεφάλαιο της θερμότητας (Κεφάλαιο 7), δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στη σαφή εισαγωγή και θεμελίωση των σχετικών εννοιών και στην παρουσίαση του ουσιαστικού νοήματος των θερμοδυναμικών νόμων. Συνάμα και πέραν των τυπικών παραδειγμάτων εμπέδωσής τους, δίδεται έμφαση σε θέματα γενικότερου αλλά και ειδικότερου ενδιαφέροντος, που σχετίζονται με τη διάδοση της ενέργειας με τη μορφή θερμότητας, όπως, θέματα θερμομόνωσης ή ψύξης χώρων και μηχανημάτων. Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσοχή στην παρουσίαση του θέματος αλληλεπίδρασης ύλης και ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μέσα στα πλαίσια ενός εισαγωγικού βοηθήματος.

Στο τελευταίο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 8), γίνεται μια εξαιρετικά σύντομη παρουσίαση, του πολύ σημαντικού, για την εποχή μας, θέματος, της τεχνολογίας των Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας, με έμφαση στη μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρισμό, με χρήση των φωτοβολταϊκών στοιχείων.

Μια προσεκτική και μεθοδευμένη, από μέρους του διδάσκοντα, επιλογή, των κατάλληλων σε κάθε περίπτωση, θεμάτων, μέσα από την εκτενή ύλη του συγγράμματος αυτού, σε συνδυασμό με τη δική του, καθοριστικής σημασίας, καθοδήγηση, θα βοηθήσει σημαντικά στην επιτυχία των στόχων του συγγράμματος.

Ευχαριστώ θερμά το συνάδελφο και φίλο Αριστείδη Ζδέτση, καθηγητή του Φυσικού τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών, για την καλοσύνη του να σχολιάσει τμήματα του κειμένου και με τις εύστοχες παρατηρήσεις του να συμβάλει στην ουσιαστική εννοιολογική βελτίωσή τους. Αισθάνομαι επίσης υπόχρεος προς τον συνάδελφο Μαθηματικό Δημήτρη Καραγιαννάκη, καθηγητή του ΤΕΙ Κρήτης, για την εποικοδομητική κριτική του επί του κειμένου.

Παρά την επίπονη προσπάθεια που καταβλήθηκε για μια επιμελημένη και κατά το δυνατόν άρτια παρουσίαση του συγγράμματος αυτού, είναι πιθανόν να έχουν παραμείνει αβλεψίες και ασαφώς διατυπωμένα νοήματα. Η επισήμανσή τους θα συμβάλει ουσιαστικά στη βελτίωση του κειμένου και γι' αυτό ευχαριστώ εκ των προτέρων όσους θα έχουν την καλοσύνη, να μου γνωστοποιήσουν τις παρατηρήσεις τους.

Ιωάννης Φραγκιαδάκης
Ηράκλειο 2003

Σχόλια του συγγραφέα για την ανατύπωση του βιβλίου

Κατά την προετοιμασία της πρώτης ανατύπωσης του συγγράμματος έγιναν αρκετές και σημαντικές επεμβάσεις στο κείμενο, όχι μόνο στην εξάλειψη των ατελειών της πρώτης έκδοσης αλλά και σε προσθήκες, τροποποιήσεις και αναδιατυπώσεις τμημάτων του κειμένου, με σκοπό την ολοκληρωμένη βελτίωσή του. Οι πάντα ευπρόσδεκτες παρατηρήσεις των συναδέλφων εκπαιδευτικών, που είχαν την ευγενή καλοσύνη να το διαβάσουν και να διατυπώσουν τις επισημάνσεις τους, καθώς και εκείνες των φοιτητών-σπουδαστών που το χρησιμοποίησαν ως διδακτικό βοήθημα, αποτέλεσαν αφετηρία και κατευθυντήρια γραμμή των διορθωτικών επεμβάσεών που έγιναν για την ανατύπωσή του. Στα πλαίσια αυτά, αισθάνομαι την υποχρέωση να τους ευχαριστήσω εγκαρδίως για τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν. Ιδιαιτέρως θέλω να ευχαριστήσω το συνάδελφο και φίλο κ. Ν. Καπετανάκη, για τις πολύ εύστοχες παρατηρήσεις του.

Έχω την ελπίδα η προσπάθεια αυτή να βρει το στόχο της, που δεν είναι άλλος βεβαίως, από την ορθολογική προσέγγιση της γνώσης, στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Ιωάννης Φραγκιαδάκης
Φεβρουάριος 2006

Περιεχόμενα

2ο Κεφάλαιο

Κίνηση (Στοιχεία από την κινηματική του υλικού σημείου)

3ο Κεφάλαιο

Δυνάμεις και Πεδία

4ο Κεφάλαιο

Έργο - Ενέργεια

5ο Κεφάλαιο

Ταλαντώσεις

7ο Κεφάλαιο

Θερμικά φαινόμενα

8ο Κεφάλαιο
Ανανεώσιμες πηγές ενέργειας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Φυσική επιστήμη

Η Φυσική αποτελεί τη βάση και το θεμέλιο της νοητικής προσπάθειας του ανθρώπου, για την κατανόηση του φυσικού του χώρου και της παρουσίας του, σ' αυτόν. Περιλαμβάνει το σύνολο των, μέχρι σήμερα, γνώσεών μας για το περιβάλλον μας, το χώρο και το χρόνο, την ύλη και την ενέργεια. Κάθε τι που συμβαίνει στη φύση, στο σύμπαν, αποτελεί ερέθισμα για τον ανθρώπινο νου. Διεγείρει την έμφυτη νοημοσύνη του ανθρώπου και ενεργοποιεί την συσσωρευμένη εμπειρία του, με στόχο την ικανοποίηση της πνευματικής του δίψας, η οποία ευτυχώς, μένει συνεχώς ακόρεστη. Τα φυσικά φαινόμενα είναι η πρόκληση για την ακατάπαυστη αναζήτηση της ερμηνείας της δημιουργίας του σύμπαντος.

Η Φυσική επιστήμη αποτελεί καρπό συλλογικής πνευματικής προσπάθειας χιλιάδων σκαπανέων της. Ο κάθε ένας απ' αυτούς, πρόσθεσε, με μεγάλο κόπο και πολλές θυσίες, το δικό του πνευματικό λιθαράκι, δημιουργώντας κίνητρα και προϋποθέσεις για τους επόμενους. Συνέβαλλαν, ο καθένας χωριστά και διαχρονικά, όλοι μαζί, στη γιγάντια προσπάθεια της διεύρυνσης, του νοητού ορίζοντα της γνώσης. Κάθε σημαντικό βήμα προς τα εμπρός έγινε, γιατί κάποιοι άλλοι προηγουμένως, εδραίωσαν με την προσφορά τους, το μέχρι τότε οικοδόμημα την νόησης. Ο Νεύτωνας, εκφράζοντας αυτή την αλήθεια για τη σωρευτική αξιοποίηση της γνώσης, δήλωνε με μετριοφροσύνη, "προχώρησα πατώντας στους ώμους αυτών των γιγάντων", αναφερόμενος στους προγενέστερούς του επιστήμονες.

Η επιστημονική προσέγγιση των φαινομένων έχει στόχο, αφενός, τον χωροχρονικό προσδιορισμό τους, αφετέρου τη διερεύνηση και κατανόηση της αιτιοκρατικής προέλευσής τους. Συνίσταται στην καθιέρωση μεθοδικών βημάτων για την αδιαμφισβήτητη επίτευξη του στόχου αυτού. Η **παρατήρηση** ενός φαινομένου γεννά νοητικές εργασίες ερμηνείας του. Με αφετηρία τις πιο απλές και προσιτές στον άνθρωπο, έννοιες, τις **θεμελιώδεις ποσότητες**, γίνεται η ποσοτική περιγραφή του φαινομένου. Η διεργασία ερμηνείας του ξεκινά με την αποδοχή λιτών και ολιγάριθμων αξιωματικών προτάσεων (**αξιωμάτων**), οι οποίες δημιουργούν τη βάση διατύπωσης σειράς προϋποθέσεων (**υπόθεση**), που καθορίζουν τα πλαίσια μέσα στα οποία επιχειρείται η ερμεινεία του. Το σύνολο των υποθετικών προτάσεων συνθέτουν την εικόνα ενός **προτύπου** (μοντέλου). Για την εμπέδωση του φαινομένου θα απαιτηθεί πιθανότατα η επανάληψή του, με έλεγχο των συνθηκών, που καθορίζουν το τελικό αποτέλεσμα (**πείραμα**), σε ειδικά διαμορφωμένο και εξοπλισμένο χώρο (**εργαστήριο**). Εφόσον το αποτέλεσμα αυτό, διακριβωμένα περιγράφει το φυσικό φαινόμενο, η υπόθεση αποκτά ιδιαίτερη ισχύ και αναγορεύεται πλέον σε **θεωρία**. Μια ισχυρή θεωρία ερμηνεύει το σύνολο των παρατηρουμένων φαινομένων και φυσικά υπερκαλύπτει τα φαινόμενα που ερμήνευε η παλαιότερη. Μερικές φορές, όμως, επικαλούμαστε θεωρίες που έχουν ήδη υπερκεραστεί από νεότερες, επειδή αποτελούν απλούστερη εφαρμογή της νεότερης, χωρίς το αποτέλεσμά της να αποκλίνει, καθοριστικά, από το πραγματικό. Παραδείγματος χάριν, για την πλειονότητα των επίγειων εφαρμογών, χρησιμοποιείται ακόμα η Θεωρία του Νεύτωνα, αν και έχει ξεπεραστεί από τις θεωρίες της Σχετικότητας, Ειδικής και Γενικής, που διατυπώθηκαν από τον Einstein στις αρχές του προηγούμενου αιώνα.

Η ολοκλήρωση της περιγραφής των φυσικών φαινομένων και των νόμων στους οποίους υπακούουν, έρχεται μέσα από την αυστηρή, λιτή και κομψή γλώσσα των Μαθηματικών. Η Φυσική περιγράφει τη φύση, μέσα από τα Μαθηματικά. Η Μαθηματική επιστήμη είναι, κατά βάση, η γλώσσα επικοινωνίας μεταξύ του ανθρώπου και της φύσης, του πνεύματος και της ύλης. Δίδει τη δυνατότητα, όχι μόνο να περιγράφουμε τα φαινόμενα εκείνα, που άμεσα εμπίπτουν στις αισθήσεις μας, αλλά και να προβλέπουμε άλλα, που θα προκύψουν μελλοντικά, με την εξελικτική βελτίωση των δυνατοτήτων των πειραματικών οργάνων. Παρέχει την ευχέρεια επικοινωνίας με χώρους, τόσο των φυσικών διαστάσεων (Τριών χωρικών και μίας χρονικής), όσο και των αφηρημένων ν διαστάσεων. Συμπερασματικά, οι δυο αυτές επιστήμες, όσο κι αν τις διαχωρίζουμε για πρακτικούς και μόνο λόγους, είναι στην ουσία μια: η επιστήμη που περιγράφει τη Φύση.

Επιστήμη και Τεχνολογία

Διαχωρίζουμε εννοιολογικά τις δύο αυτές περιοχές πνευματικής δραστηριότητας, την επιστημονική από την τεχνολογική. Η πρώτη έχει στόχο να δίδει απαντήσεις αιτιοκρατικής μορφής στα ερωτήματα που προκύπτουν κατά την εξέταση των φαινομένων, καταλήγοντας σε αναλυτικούς νόμους, που με τη σειρά τους περιγράφουν το φαινόμενο, δηλαδή τη συμπεριφορά της φύσης. Η προσπάθεια αυτή περιλαμβάνει, επίσης, γενικότερου ενδιαφέροντος ερωτήματα, που αφορούν π.χ. στη δημιουργία του σύμπαντος ή την παρουσία του ανθρώπου σ' αυτό. Η Τεχνολογία απ' την άλλη μεριά, υλοποιώντας τα γενικά και ειδικά συμπεράσματα της επιστήμης, συμβάλει στη λύση των πρακτικών προβλημάτων της καθημερινής διαβίωσης, με στόχο την βελτίωση της ποιότητας της ζωής του ανθρώπου. Π.χ. μέσα από την τεχνολογική βελτίωση των Ιατρικών οργάνων και συσκευών ή τη χρήση νέων, σύγχρονης τεχνολογίας, δόθηκε η δυνατότητα να νικηθούν ανίατες, μέχρι τότε, ασθένειες και περιορίστηκαν δραστικά οι επιπτώσεις άλλων, έτσι ώστε σήμερα ο μέσος όρος ζωής του ανθρώπου να ξεπερνά τα 70 χρόνια. Η εκρηκτική ανάπτυξη της τεχνολογίας των ημιαγωγών, άλλαξε ριζικά και καθοριστικά, όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων μας, σ' ότι αφορά την επικοινωνία, την εκπαίδευση, τα επιστημονικά εργαλεία και τόσα άλλα, που διευκολύνουν και βελτιώνουν την καθημερινή ζωή μας. Παρά ταύτα, πρέπει να αναγνωρίσουμε, ότι η τεχνολογική εξέλιξη, εγκυμονεί συχνά, τον κίνδυνο της αρνητικής χρησιμοποίησης των αποτελεσμάτων της, πολλάκις για ικανοποίηση ιδιοτελών σκοπών. Αυτό υποσκάπτει και ναρκοθετεί κάθε αρχική καλή πρόθεση και επιδίωξη. Η αύξηση π.χ. του μέσου όρου ζωής του ανθρώπου σε συνδυασμό με την αύξηση του πληθυσμού στον πλανήτη μας, απαιτεί αντίστοιχη αύξηση των προϊόντων διατροφής. Η χρησιμοποίηση χημικών λιπασμάτων και φυτοφαρμάκων (τεχνολογικά προϊόντα) έλυσε προσωρινά το πρόβλημα, προκαλώντας όμως ισχυρά αρνητικές επιπτώσεις στο οικολογικό μας σύστημα. Τα τεχνολογικά αυτά προϊόντα, από βοηθήματα του ανθρώπου, μετατρέπονται σε απειλή, για την υγεία και κατ' επέκταση, την διαβίωσή του καθώς και των υπολοίπων έμβιων οργανισμών. Ομοίως, οι τελευταίες εξελίξεις στον τομέα της Βιολογίας, που αφορούν στην επέμβαση στη δομή του DNA και στη δυνατότητα κλωνοποίησης ζώων και ανθρώπων, φαίνεται να ανοίγουν νέους δρόμους για την αντιμετώπιση των ασθενειών που μαστίζουν την ανθρωπότητα, γεννώντας, όμως ταυτόχρονα, υπόνοιες για πιθανή εκμετάλλευση του ανθρώπου απ' τον άνθρωπο. Απαιτείται, λοιπόν, μεγάλη προσοχή στην υλοποίηση των επιτευγμάτων της επιστήμης καθώς και συνεχής έλεγχος των παραμέτρων εκείνων, που καθορίζουν τη λεπτή και εύθραυστη ισορροπία των ιδανικών συνθηκών διαβίωσης, όλων των κατοίκων του φυσικού μας περιβάλλοντος.

Οι Φυσικές ποσότητες. Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI

Φυσικές ποσότητες

Είναι ποσότητες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Διακρίνονται, με σχετικά αυθαίρετο τρόπο, σε θεμελιώδεις και παράγωγες. **Θεμελιώδεις ποσότητες**, για ένα συγκεκριμένο σύστημα μονάδων, είναι ο ελάχιστος αριθμός ποσοτήτων, που είναι απαραίτητες για να οριστούν όλες οι άλλες φυσικές ποσότητες, που γι' αυτό το λόγο λέγονται **παράγωγες**. Το 1960, κατά τη διάρκεια του Διεθνούς Συνεδρίου Μέτρων και Σταθμών που έγινε στο Παρίσι, καθιερώθηκε το Διεθνές Σύστημα μονάδων, με αρκτικόλεξο SI, από τη Γαλλική έκφραση Système International, το οποίο χρησιμοποιείται πλέον, κατά κανόνα. Το σύστημα αυτό έχει ως θεμελιώδη μεγέθη τα επόμενα επτά, των οποίων οι αντίστοιχες μονάδες τίθενται δίλα τους, μέσα σε παρενθέσεις: Μήκος (1 m, meter), μάζα (1 kg, kilograme), ποσότητα ύλης (1 mol), χρόνος (1 s, second), ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος (1 A, Ampere), θερμοκρασία (1 K, Kelvin) και φωτοβολία (1 cd, Candela). Παράγωγες μονάδες στο σύστημα αυτό είναι: η δύναμη (1 N, Newton), η ροπή δύναμης (1 N·m), η ενέργεια και το έργο (1 J, Joule), η ισχύς δύναμης (1 W, Watt), το φορτίο (1 C, Coulomb), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (1 N/C), η ένταση του μαγνητικού πεδίου (1 T, Tesla) κ.α.

Οι μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών ενός συστήματος αποτελού τα **πρότυπα μέτρα** και ορίζονται έτσι ώστε να πληρούν τις βασικές προϋποθέσεις μιας **προσιτής** και **αμετάβλητης** κατασκευής.

Προσιτό μέτρο σημαίνει απλό στην κατασκευή και εύκολο στη χρήση του.

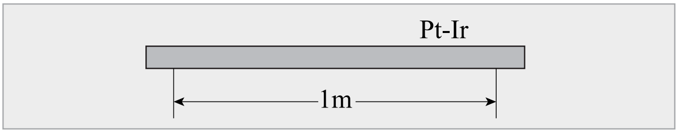
Αμετάβλητο, σημαίνει ότι το μέτρο αυτό προσδιορίζεται με βάση πειραματικά αξιοποιήσιμες ιδιότητες, που δίδουν τη δυνατότητα εύκολα να επανακατασκευαστεί, με την ίδια αρχική ακρίβεια ακόμα και στην περίπτωση που καταστραφεί.

Πρότυπα μέτρα θεμελιωδών μεγεθών στο SI

α. **Πρότυπο μέτρο μήκους: 1 μέτρο (1 m).** Φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (ΔΓΜΣ), στις Sèvres, κοντά στο Παρίσι. Η επιλογή του συγκεκριμένου μήκους έγινε, με βάση τις διαστάσεις του χώρου κίνησης και διαβίωσης του ανθρώπου καθώς και τις ανάγκες που προκύπτουν από τις καθημερινές ενασχολήσεις του.

Για να καταστεί αμετάβλητο το μέτρο, έγινε αντιστοιχία του μήκους του με αριθμό μηκών κύματος ορισμένης ακτινοβολίας. Συγκεκριμένα, αναφέρεται η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τα διεγερμένα άτομα του αερίου $^{86}_{36}\mathrm{Kr}$, όταν αυτά αποδιεγείρονται μεταξύ συγκεκριμένων ενεργειακών σταθμών, δηλαδή, κατά την πτώση του ηλεκτρονίου από την 5d στην 2p υποστοιβάδα. Η αντιστοιχία εκφράζεται από τη σχέση:

$$1\ \mathrm{m} = 1.650.763{,}73 \cdot \lambda_{5d \to 2p} \ \text{του}\ ^{86}_{36}\mathrm{Kr} \quad (1)$$



Σχήμα 1. Το πρότυπο μέτρο μήκους ορίστηκε, αρχικά, ως η απόσταση μεταξύ δύο χαραγών, πάνω σε μια ράβδο από κράμα Pt-Ir, σε ορισμένες συνθήκες.

Σύγχρονος ορισμός του προτύπου μέτρου μήκους. Το 1983 αναθεωρήθηκε ο ορισμός του μέτρου μήκους, με βάση την παγκόσμια σταθερά της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein, δηλαδή, την ταχύτητα του φωτός στο κενό, στην οποία δίδεται η ακριβής τιμή c=299.792.458 m/s. Σύμφωνα με την νέα διατύπωση,

> *1 m είναι η απόσταση που διανύει το φως, στο κενό, μέσα σε 1/299.792.458 του **προτύπου δευτερολέπτου**, όπως αυτό ορίζεται με βάση το ατομικό ρολόϊ.*

β. Πρότυπο μέτρο χρόνου: 1 δευτερόλεπτο (1s). Κάθε περιοδικό φαινόμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του σχετικού χρόνου, δηλαδή χρονικών διαστημάτων. Π.χ. η περιστροφή της γης γύρω από τον άξονα της ή η περιφορά της γύρω από τον ήλιο ή η περιοδική μεταβολή της ενέργειας ενός μορίου, μεταξύ δύο ενεργειακών καταστάσεών του, όπως συμβαίνει π.χ. στο μόριο της αμμωνίας. Βασική μονάδα χρόνου αποτελεί το *ένα δευτερόλεπτο* (1 s). Χρησιμοποιήθηκαν μέχρι σήμερα, οι επόμενοι ορισμοί του:

i) **Με βάση την περιστροφή της γης:**

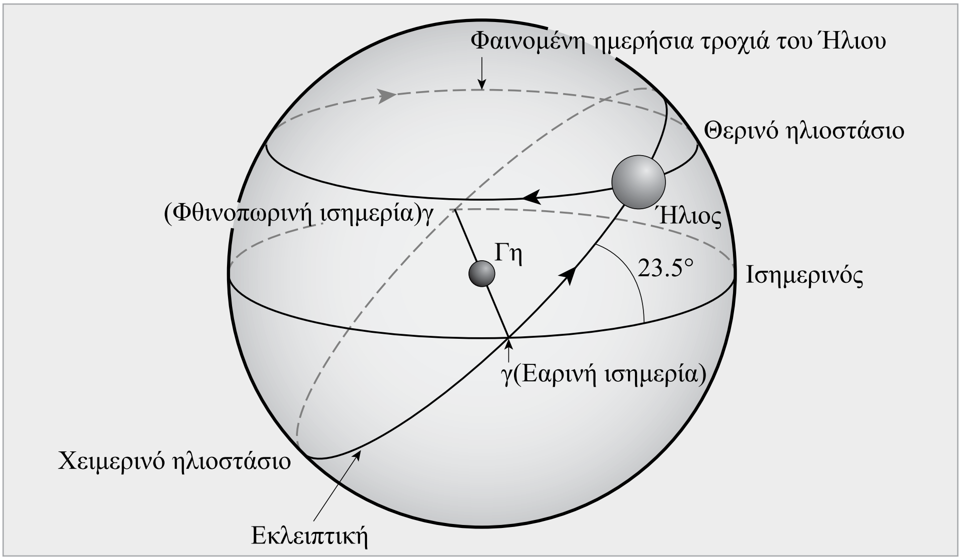
$$1\ \text{s} = \frac{1}{86.400}\ \text{Μ.Η.Η.} \tag{2}$$

Μ.Η.Η. = Μέση Ηλιακή Ημέρα = ο μέσος χρόνος μεταξύ δυό διαδοχικών μεσουρανήσεων του ήλιου στον ίδο τόπο.

ii) **Με βάση την περιφορά της γης περί τον ήλιο**: (Χρόνος των αστρονομικών εφημερίδων)

$$1\ \text{s} = \frac{1}{31.556.925{,}9747}\ \text{του τροπικού}^{1}\ \text{έτους 1900} \tag{3}$$

1. Τροπικό έτος: Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του ηλίου από το σημείο της εαρινής ισημερίας (γ).



Σχήμα 2. Η ετήσια και ημερήσια τροχιά του ήλιου πάνω στην ουράνια σφαίρα. Η εκλειπτική είναι η πραγματική τροχιά της γης γύρω απ' τον ήλιο. Για την ουράνια σφαίρα αποτελεί την φαινομένη ετήσια τροχιά του ήλιου ως προς την γη.

Η αναφορά στο συγκεκριμένο έτος 1900, καθιστά το 1 s αμετάβλητο. Ένα τυπικό έτος περιλαμβάνει, κατά μέσο όρο, 365,25 ημέρες, λαμβανομένων υπόψη των δίσεκτων ετών, δηλαδή, αποτελείται από

$$365{,}25 \times 86.400 \text{ s} = 31.557.600 \text{ s}.$$

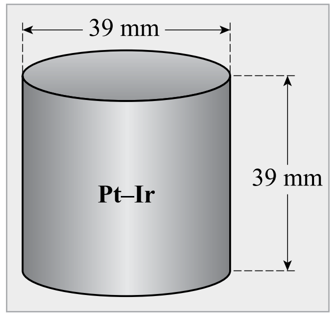
iii) **Σύγχρονος ορισμός του 1 s. Το ατομικό ρολόι του Καισίου** $^{133}_{55}$Cs: Από το 1967, το δευτερόλεπτο καθορίζεται με βάση τις ηλεκτρονικές μεταβάσεις του ατόμου του Καισίου, μεταξύ των δύο πολύ κοντινών, ενεργειακά, καταστάσεων spin (ομοπαράλληλα και αντιπαράλληλα spins), με μήκος κύματος στην ζώνη των μικροκυμάτων και μάλιστα με συχνότητα ν=9.192.631.770 Hz. Σύμφωνα λοιπόν με τις σημερινές απαιτήσεις ακριβείας ως προς το χρόνο,

> *1 s ορίζεται ως ο χρόνος 9.192.631.770 περιόδων της μικροκυματικής ακτινοβολίας spin, του ατόμου του Καισίου $^{133}_{55}$Cs, συχνότητας 9.192.631.770 Hz.*

Η ακρίβεια καθορισμού του είναι καλύτερη από 1 προς 10^{11}, δηλαδή, το ατομικό ρολόι Καισίου χάνει 1 s σε περισσότερο από 3.000 χρόνια ($\approx 10^{11}/31.557.600$). Επιπλέον, ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της επιλογής έγκειται στην εξαιρετική αξιοπιστία του συγκεκριμένου ρολογιού, του οποίου η λειτουργία μένει ανεπηρέαστη από μεταβολές των εξωτερικών παραγόντων, όπως π.χ. της θερμοκρασίας, των καιρικών συνθηκών, των θέσεων του ήλιου κ.λπ., ικανοποιουμένης της απαίτησης του αμετάβλητου μέτρου.

γ. Πρότυπο μέτρο μάζας: 1 χιλιόγραμμο (1 kg). Είναι ένας κύλινδρος από κράμα Pt–Ir (90% Pt και 10% Ir), με διάμετρο 39 mm και ύψος 39 mm. Φυλάσσεται στο ΔΓΜΣ στο Παρίσι. Στην ατομική Φυσική χρησιμοποιείται η **ατομική μονάδα μάζας (1amu)**, που ισούται με το 1/12 της μάζας του ατόμου του ισοτόπου του άνθρακα ^{12}C. Η σχέση ισοδυναμίας με το kg, είναι:

$$1 \text{ amu} = 1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg} \qquad (4)$$



Σχήμα 3. Το πρότυπο χιλιόγραμμο (kg).

δ. Πρότυπη μονάδα ποσότητας ύλης: Το **γραμμομόριο (mole)** μιας καθαρής ουσίας ορίζεται ως η ποσότητά της που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες (άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια ή άλλες οντότητες ύλης), όσα άτομα άνθρακα περιέχονται σε 0,012 kg άνθρακος 12, ^{12}C. Η μονάδα γραμμομορίου συμβολίζεται με **1 mol**. Το πλήθος των στοιχειωδών οντοτήτων στο mole καθαρής ουσίας ονομάζεται αριθμός του Avogadro, $N_A = 6{,}022045 \times 10^{23}$ σωματίδια/mole. 1 mole αλουμινίου (Al), 1 mole καθαρού νερού (H_2O) ή 1 mole αερίου αργού (Ar), περιέχουν όλα τον ίδιο αριθμό ατόμων ή μορίων, ίσο με N_A.

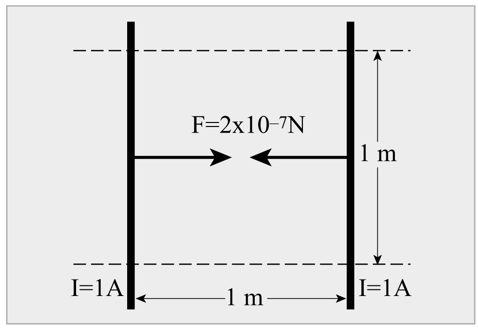
ε. Πρότυπη μονάδα θερμοκρασίας: 1 Kelvin (1 K). Είναι η μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας στην επιστημονική ή θερμοδυναμική κλίμακα ή κλίμακα Kelvin. Η θερμοκρασία T στην κλίμακα αυτή καθορίζεται από τη σχέση:

$$T = 273{,}16 \cdot \frac{X}{X_{\tau\rho}} \qquad (5)$$

όπου X, $X_{\tau\rho}$, οι θερμομετρικές παράμετροι της ουσίας του θερμομέτρου (π.χ. η ένδειξη ενός θερμοηλεκτρικού ζεύγους ή η πίεση ενός αερικού θερμομέτρου), στις θερμοκρασίες T και $T_{\tau\rho}$, όπου $T_{\tau\rho}$, η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του νερού (§7.19). Το μηδέν της κλίμακας Kelvin αντιστοιχεί στο απόλυτο μηδέν, η ένδειξη 273,15 K στην κατάσταση συνύπαρξης υγρού νερού και πάγου (0 °C), σε πίεση 1 Atm και η ένδειξη 373,15 K, στην κατάσταση συνύπαρξης υγρού νερού και ατμών του, σε πίεση 1 Atm. Στο τριπλό σημείο του νερού, $T_{τρ}$, το οποίο αφορά στην κατάσταση συνύπαρξης ατμών, υγρού και πάγου του καθαρού νερού, σε πίεση 1 Atm, αποδίδεται η ένδειξη θερμοκρασίας 273,16 K. Σύμφωνα μ’ αυτή την αντιστοιχία, η μονάδα της κλίμακας Kelvin, στο σύστημα SI, ορίζεται ως εξής:

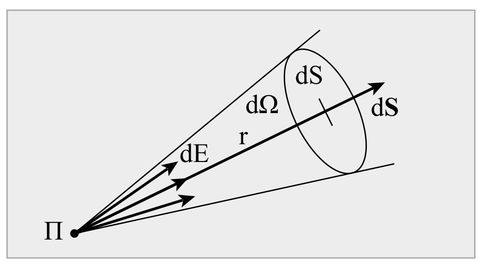
> *1 Kelvin, 1 K, είναι το 1/273,16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού».*

στ. Πρότυπη μονάδα έντασης ηλεκτρικού ρεύματος: 1 Ampere, (1 A). 1 A είναι η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, το οποίο διαρρέοντας δυο παράλληλους μεταλλικούς αγωγούς, αμελητέας διατομής, που απέχουν 1 m, δημιουργεί ελκτική ή απωστική δύναμη (ανάλογα με τις φορές των παραλλήλων ρευμάτων), ίση με $2{\times}10^{-7}$ N ανά μέτρο αγωγού.



Σχήμα 4. Ορισμός της μονάδας Ampere, της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.

ζ. Πρότυπη μονάδα Φωτοβολίας (1 cd). Η φωτοβολία αποτελεί χαρακτηριστικό μιας φωτεινής πηγής και αφορά στην φωτεινή ροή ή ισχύ (lm), που εκπέμπεται από την επιφάνειά της, προς ορισμένη κατεύθυνση, μέσα στη μονάδα της στερεάς γωνία (1 sr). Μέχρι το 1979, η μονάδα της φωτοβολίας, 1 candela, οριζόταν ως το 1/60 της ισχύος του ορατού φάσματος της ακτινοβολίας (1 lm), που εκπέμπεται, μέσα σε στερεά γωνία 1 sr, κάθετα από επιφάνεια 1 cm^2 λευκοχρύσου (Pt), που βρίσκεται στη θερμοκρασία τήξης του (1770 °C) και σε πίεση 101.325 Pa (Κανονική ατμοσφαιρική πίεση). Ένας λαμπτήρας πυράκτωσης βολφραμίου (W), ηλεκτρικής ισχύος 100 W, χαρακτηρίζεται από ολική, σφαιρικά κατανεμημένη φωτοβολία 130 cd.



Σχήμα 5. Η στερεά γωνία ορίζεται ως $d\Omega = dS/r^2$. Η φωτεινή ενέργεια που εκπέμπεται από την φωτεινή πηγή Π, διαδίδεται με ρυθμό dE/dt, μέσα στη στοιχειώδη στερεά γωνία dΩ.

Σύγχρονος ορισμός της πρότυπης μονάδας φωτοβολίας. Το 1979, στην αντίστοιχη συνάντηση της Διεθνούς Επιτροπής Μέτρων και Σταθμών, η candela ορίστηκε ως η φωτοβολία **μονοχρωματικής** πηγής που εκπέμπει σε συχνότητα $\nu = 540 \times 10^{12}$ Hz (ορατό φάσμα, $\lambda = 555$ nm) με γωνιακή ισχύ ακτινοβολίας 1/683 W/sr (sr=steradian). 1 sr είναι η στερεά γωνία, που καθορίζεται από κώνο με κορυφή το κέντρο σφαίρας, ακτίνας 1m, ο οποίος αποκόπτει από την σφαιρική επιφάνεια, τμήμα εμβαδού 1 m^2.

Προθέματα στο SI (πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια)

Πρόθεμα	Σύμβολο	Παράγων
deca (δεκα-)	da	10
hecto (εκατο-)	h	10^2
kilo (χιλιό-)	k	10^3
mega (μεγα-)	M	10^6
giga (γιγα-)	G	10^9
tera (τερα-)	T	10^{12}
(πετα-)	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}

Πρόθεμα	Σύμβολο	Παράγων
deci (δεκατό-)	d	10^{-1}
centi (εκατοστό-)	c	10^{-2}
milli (χιλιοστό-)	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
ato	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

Μονάδες μεγεθών άλλων συστημάτων

Εκτός από το SI, χρησιμοποιούνται, επίσης, μονάδες από άλλα δύο συστήματα, το Τεχνικό Σύστημα και το σύστημα CGS.

- ### Τεχνικό σύστημα (ΤΣ)

Τα θεμελιώδη μεγέθη στο ΤΣ είναι: *Το μήκος, η δύναμη* και *ο χρόνος*, με αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες: το 1 m, το 1 kp και το 1 s.

Πρότυπο μέτρο δύναμης: 1 Χιλιόγραμμο δύναμης ή κιλοπόντ (1 kgf ή 1 kp)

1 kgf ή kp, ορίζεται ως η δύναμη που δέχεται από τη Γη, σώμα μάζας 1 kg, που βρίσκεται σε τόπο όπου $g = 9{,}8066$ m/s^2. Κατά προσέγγιση, αγνοώντας την επίδραση της διαφορετικής σύστασης του υπεδάφους από τόπο σε τόπο, η τιμή αυτή αντιστοιχεί στην επιφάνεια της θάλασσας, σε γεωγραφικό πλάτος (γ.π.) 45^o. Σημειώστε ότι, στο σύστημα SI η δύναμη αποτελεί παράγωγο μέγεθος, με μο-

νάδα το Newton (N). 1 N ορίζεται ως η δύναμη, η οποία ασκουμένη σε σώμα μάζας 1 kg, του προσδίδει επιτάχυνση ίση με 1 m/s^2. Μεταξύ kp (κιλοπόντ ή kgf), που είναι θεμελιώδης μονάδα στο ΤΣ και του N, που είναι παράγωγος μονάδα στο SI, ισχύει η απλή σχέση ισοδυναμίας: 1 kp=9,80665 N ή προσεγγιστικά 1 kp=9,81 N.

- **Σύστημα CGS**

  Το σύστημα CGS, έχει ως θεμελιώδη μεγέθη και αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες: Μήκος (1 cm, εκατοστόμετρο), Μάζα (1 g, γραμμάριο), Χρόνος (1 s). Μεταξύ των μονάδων αυτών και των αντιστοίχων του διεθνούς συστήματος, ισχύουν οι επόμενες απλές σχέσεις μετατροπής:

  $$1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m} \Leftrightarrow 1\ \text{m} = 10^{2}\ \text{cm}, \qquad 1\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{kg} \Leftrightarrow 1\ \text{kg} = 10^{3}\ \text{g}$$

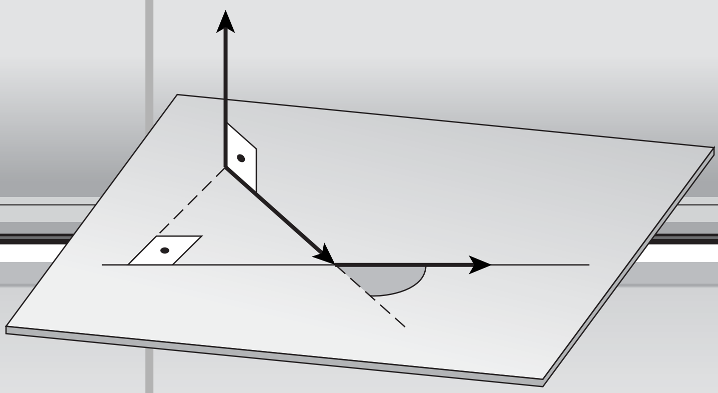
  Η δύναμη είναι παράγωγο μέγεθος στο CGS και η αντίστοιχη μονάδα είναι η 1 dyn=1 g·cm/s^2. Μεταξύ 1 dyn και 1 N ισχύει η σχέση: 1 N=10^5 dyn.

Άλλα μεγέθη και μονάδες. Αγγλοσαξονικές μονάδες και ισοδυναμίες τους

Μέγεθος	Σύμβολο μονάδας	Ονομασία	Ισοδυναμία με άλλες μονάδες
Μήκος	in	Ίντσα (inch)	2,54 cm
	ft	Πόδι (foot)	30,48 cm
	yd	γυάρδα (yard)	91,44 cm
	mi (mile)	Μίλι στεριάς	1609,344 m
		Ναυτικό Μίλι	1852 m
Εμβαδόν	a	are	100 m^2
	-	στρέμμα	1000 m^2
	acre		4046,8564 m^2
	ha	Εκτάριο (hectare)	10000 m^2
Όγκος	ℓ ή L (συνιστώμενο)	Λίτρο (Litre)	10^{-3} m^3
	gal	Γαλόνι (UK gallon)	4,54609 L
		Γαλόνι (USA gallon)	3,78541 L
Πίεση	1 Pa = 1N/m^2	Pascal	-
	1 Atm	Φυσική ατμόσφαιρα	~101,3 kPa
	1 at	Τεχνική ατμόσφαιρα	~98,1 kPa
	Bar	Μπαρ	1,02 at = 100 kPa
	1 psi = 1 lb/in^2	Λίμπρα / τετραγ. ίντσα (pound per square inch)	~6,89 kPa 1Bar = 14,5 psi

1ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης

Η Περιγραφή και στη συνέχεια κατανόηση των φυσικών φαινομένων αλλά και η αποδοτική χρησιμοποίηση των συμπερασμάτων ή φυσικών νόμων απαιτεί τη χρήση, με σχετική ευχέρεια, απλών εννοιών από την μαθηματική ανάλυση.

Το μεγαλύτερο μέρος των γνώσεων αυτών αποτελούν προϋπόθεση εισαγωγής των υποψηφίων φοιτητών-σπουδαστών, στο χώρο της Ανωτάτης Εκπαίδευσης.

Συνεπώς, ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι, να δοθεί στον σπουδαστή η δυνατότητα ενός άμεσου βοηθήματος, που να καλύπτει τις βασικές του απαιτήσεις στο χώρο της μαθηματικής ανάλυσης, σε εισαγωγικό επίπεδο. Γι' αυτό το λόγο, καταβλήθηκε προσπάθεια να περιοριστεί η ανάπτυξη, σε μια σύντομη παρουσίαση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, που αποτελούν προϋπόθεση για την αποδοτικότερη μελέτη, κατανόηση και ευχερή επεξεργασία των θεμάτων των επομένων κεφαλαίων.

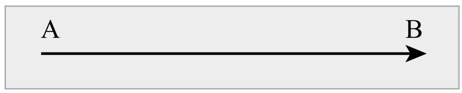
1.1 Διανύσματα

1.1.1. Ορισμοί

1.1.1.2. Εφαρμοστό διάνυσμα

*Ένα διατεταγμένο ζεύγος σημείων (**Α**, **Β**) ορίζει το εφαρμοστό διάνυσμα **ΑΒ**.*

Ισοδύναμα μπορούμε να το συμβολίσουμε με ένα μόνο γράμμα[2] π.χ. **α.**

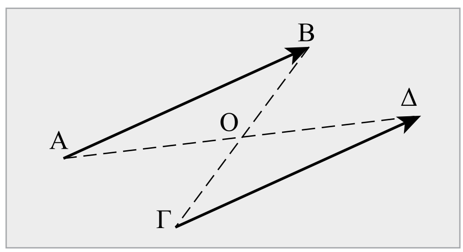


Σχήμα 1.1. Το εφαρμοστό διάνυσμα ΑΒ.

Φυσικά μεγέθη που παριστάνονται με εφαρμοστά διανύσματα είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η ένταση του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, η δύναμη σε υλικό σημείο κ.α.

Ισοδύναμα εφαρμοστά διανύσματα

Η ισότητα στα εφαρμοστά ανύσματα έχει νόημα μόνο εκ ταυτότητας. Μεταξύ δύο εφαρμοστών διανυσμάτων που ασκούνται σε διαφορετικούς φορείς, χρησιμοποιείται η έννοια της ισοδυναμίας. Τα **ΑΒ**, **ΓΔ**, είναι ισοδύναμα αν τα τμήματα ΑΔ, ΓΒ, έχουν το αυτό μέσον Ο.



Σχήμα 1.2. Ισοδύναμα εφαρμοστά διανύσματα.

1.1.1.3. Ολισθαίνον διάνυσμα

Ένα διανυσματικό μέγεθος ονομάζεται ολισθαίνον, αν η δράση του δεν μεταβάλλεται όταν μετατοπιστεί πάνω στον φορέα του. Παραδείγματος χάριν, η δύναμη που δρα σ’ ένα στερεό σώμα θεωρούμενο ως απαραμόρφωτο.

Ισα ολισθαίνοντα διανύσματα

Έχουν το ίδιο μέτρο κείνται στον ίδιο φορέα και έχουν την ίδια φορά.

---

2. Για λόγους ευκολίας και καλύτερης εμφάνισης του κεμένου, στο σύγγραμμα αυτό θα χρησιμοποιειθεί για τον συμβολισμό των ανυσμάτων, η έντονη (Bold) γραφή, π.χ. γράφουμε **ΑΒ** ή **F** ή **α** αντί των $\overrightarrow{AB}$, $\vec{F}$ και $\vec{\alpha}$ αντίστοιχα.

1.1.1.4. Ελεύθερο διάνυσμα

Καλείται το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα με δοσμένο εφαρμοστό διάνυσμα. Ένα φυσικό διανυσματικό μέγεθος που συμπεριφέρεται ως ελεύθερο και συνεπώς δεν απαιτεί τον προσδιορισμό συγκεκριμένου φορέα ανάμεσα στο σύνολο των ευθειών με την ίδια διεύθυνση, είναι η ροπή ζεύγους δυνάμεων. Το άνυσμά της μπορεί να σχεδιαστεί σ' οποιοδήποτε σημείο του χώρου, παράλληλα προς την ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο των δύο αντιρρόπων δυνάμεων $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ που ασκούνται στο ίδιο σώμα αντίστοιχα (§6.3.4.ΙΙΙ).

Ίσα ελεύθερα διανύσματα

Δύο ελεύθερα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, θα λέγονται ίσα αν είναι ισοδύναμα προς το ίδιο εφαρμοστό διάνυσμα.

1.1.1.5. Μοναδιαίο διάνυσμα

Ένα αδιάστατο άνυσμα με μέτρο μονάδα (π.χ. $|\boldsymbol{\alpha}_0|=1$). Η χρήση του δηλώνει μια συγκεκριμένη κατεύθυνση (διεύθυνση + φορά). Αν το άνυσμα $\mathbf{A}$ έχει μέτρο Α και φορά ίδια με το μοναδιαίο $\boldsymbol{\alpha}_0$, τότε είναι φανερό ότι ισχύει η σχέση: $\mathbf{A}=\mathrm{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}_0$. Απ' τη σχέση αυτή μπορεί να υπολογιστεί το μοναδιαίο, αν είναι γνωστά τα $\mathbf{A}$ και Α.

1.1.1.6. Συγγραμμικά διανύσματα

Σύνολο διανυσμάτων με την ίδια διεύθυνση.

1.1.1.7. Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Σύστημα δύο ή τριών ορθογωνίων αξόνων (ή γενικότερα ν-διάστατο σύστημα) με μοναδιαία ανύσματα **ίδιου μήκους** και κατά τους τρεις άξονες (ν άξονες αντίστοιχα). Συνήθης συμβολισμός των μοναδιαίων ανυσμάτων, για σύστημα δύο ή τριών αξόνων:

$$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\ (|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1).$$

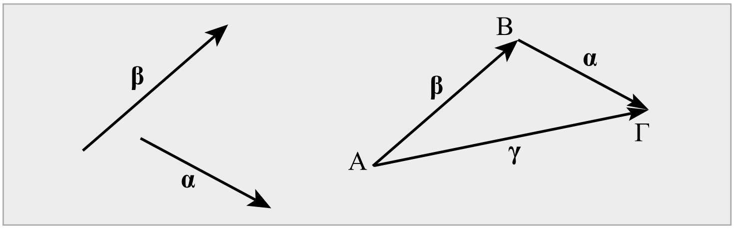
1.1.2. Πράξεις διανυσμάτων

α. Πρόσθεση

Καλούμε άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ με αντιπροσώπους τα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{B\Gamma}$, το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$, με αντιπρόσωπο το διάνυσμα $\mathbf{A\Gamma}$. Συμβολικά

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \tag{1}$$

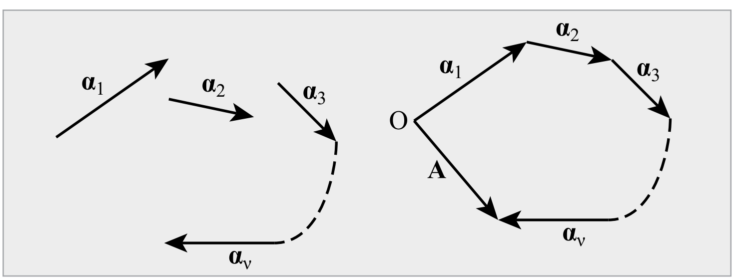
Καθιστούμε τα ανύσματα **α** και **β** διαδοχικά (Σχήμα 1.3). Το άνυσμα που αποτελεί τη συνισταμένη τους, έχει αρχή την αρχή του πρώτου ανύσματος, εδώ του **β**, και πέρας, το πέρας του δεύτερου, **α**.



Σχήμα 1.3. Ορισμός του αθροίσματος δύο διανυσμάτων.

Η διαφορά προσδιορίζεται μέσω της πρόσθεσης: $\mathbf{\Delta}=\mathbf{\alpha}-\mathbf{\beta}=\mathbf{\alpha}+(-\mathbf{\beta})$, όπου το άνυσμα $-\mathbf{\beta}$ είναι το αντίθετο του **β**. Εύκολα γενικεύεται η άθροιση σε ν ανύσματα. Για να προσθέσουμε ν διανύσματα, τα καθιστούμε διαδοχικά, έτσι ώστε το πέρας του ενός να είναι αρχή του επόμενου. Το αποτέλεσμα της άθροισης (η συνισταμένη τους) είναι το άνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας, το πέρας του τελευταίου (Σχήμα 1.4). Συμβολικά:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\alpha}_1 + \mathbf{\alpha}_2 + \ldots + \mathbf{\alpha}_\nu \qquad (2)$$



Σχήμα 1.4. Ορισμός του αθροίσματος ν ανυσμάτων.

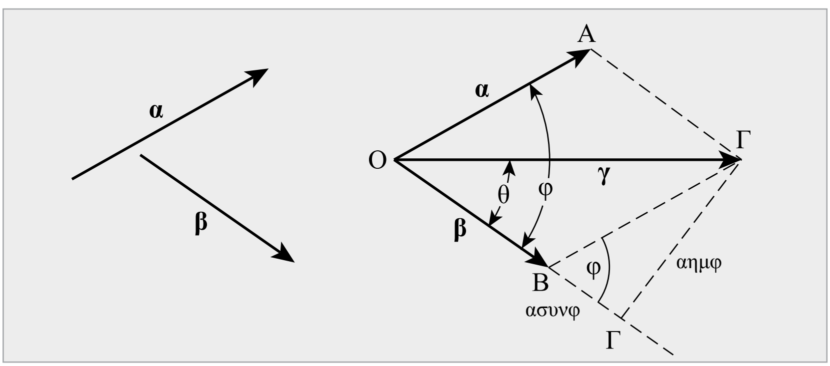
Κανόνας παραλληλογράμμου

Ο κανόνας αυτός αφορά, καταρχήν, στη σύνθεση δύο ανυσμάτων, έστω των **α** και **β**. Τίθενται με κοινή αρχή και από το πέρας εκάστου φέρεται ευθεία παράλληλη προς το άλλο, έτσι ώστε να προκύψει το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο

(Σχήμα 1.5). Το άνυσμα που έχει αρχή την κοινή αρχή των ανυσμάτων **α** και **β** και συμπίπτει με την αντίστοιχη διαγώνιο του παραλληλογράμμου, αποτελεί τη συνισταμένη τους, **γ**. Αν η σύνθεση αφορά περισσότερα από δύο ανυσμάτων, η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται μεταξύ της συνισταμένης των δύο πρώτων με το τρίτο, της νέας συνισταμένης με το τέταρτο κ.ο.κ. Όπως εύκολα μπορείτε να ελέγξετε, ο κανόνας του παραλληλογράμμου είναι απόρροια του γενικότερου ορισμού των ανυσμάτων. Παρέχει, επιπλέον, τη δυνατότητα άμεσης πειραματικής επαλήθευσης της ισχύος του, ιδιαίτερα στην περίπτωση τριών δυνάμεων. Εφαρμόζοντας στο ένα εκ των δύο τριγώνων του παραλληλογράμμου, το νόμο του συνημιτόνου, προκύπτει το μέτρο, γ, της συνισταμένης:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\,\text{συν}\varphi} \tag{3}$$

όπου τα γράμματα α, β, γ, αντιπροσωπεύουν τα μέτρα των ανυσμάτων **α**, **β**, **γ**, αντίστοιχα και φ είναι η γωνία (≤π) μεταξύ των δύο ανυσμάτων **α**, **β**, (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο των ημιτόνων για το ίδιο τρίγωνο, έπεται:

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}\theta} = \frac{\beta}{\text{ημ}(\varphi-\theta)} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\varphi} \tag{4}$$

Αν προβάλλουμε την συνισταμένη πάνω στην διεύθυνση του **β** (Σχήμα 1.5), τότε, όπως εύκολα ελέγχεται, μπορούμε να γράψουμε:

$$\text{εφ}\theta = \frac{\alpha\cdot\text{ημ}\varphi}{\beta + \alpha\,\text{συν}\varphi} \tag{5}$$

β. Γινόμενο ανυσμάτων (απλά γινόμενα)

i) Εσωτερικό (ή αριθμητικό) γινόμενο.

Ορισμός:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}\varphi \qquad (6)$$

όπου α, β τα μέτρα των ανυσμάτων αυτών και φ η γωνία μεταξύ τους. Αφορά στις περιπτώσεις στις οποίες ένα μονόμετρο φυσικό μέγεθος, προκύπτει ως γινόμενο δύο άλλων ανυσματικών μεγεθών. Παραδείγματος χάριν, το έργο, στο οποίο θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 4. Ορίζεται[3] ως το γινόμενο της δύναμης, $\mathbf{F}$ (άνυσμα), επί την μετατόπιση $d\mathbf{r}$ (άνυσμα), του σημείου εφαρμογής της:

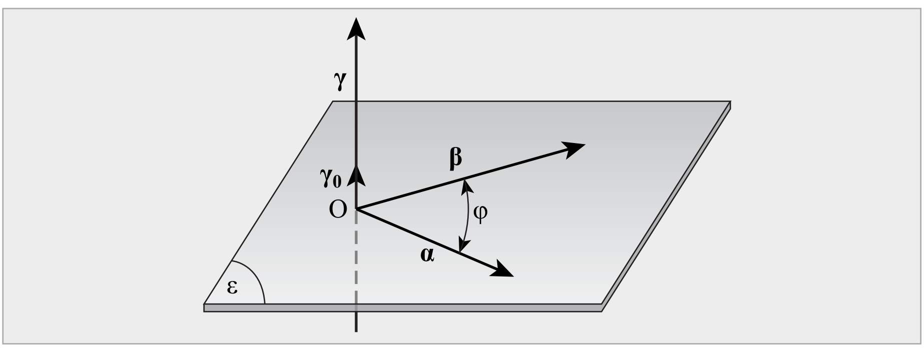
$$6\,W = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

ii) Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο.

Ορισμός:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\text{ημ}\varphi\cdot\boldsymbol{\gamma_0} \qquad (7)$$

όπου $\boldsymbol{\gamma}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ (Σχήμα 1.6). Σημειώστε ότι: $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$.

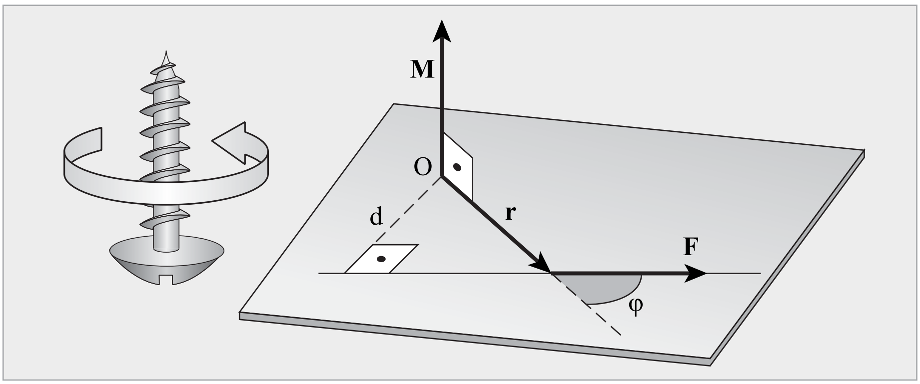


Σχήμα 1.6. Το άνυσμα **γ** είναι εξωτερικό γινόμενο των **α**, **β**.

3. Για το στοιχειώδες έργο χρησιμοποιείται το σύμβολο 6 W, προκειμένου να τονιστεί το γεγονός ότι το μέγεθος έργο, δεν έχει νόημα ως διαφορικό (διαφορά τιμών του), επειδή το έργο δεν αποτελεί προϋπάρχουσα ποσότητα για το σύστημα. Το ίδιο ισχύει για την θερμότητα, όπου, αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε το σύμβολο 6 Q. Αντίθετα, η εσωτερική ενέργεια ενός σώματος έχει την έννοια της περιεχόμενης ποσότητας και άρα έχει φυσικό νόημα η διαφορά της.

Εύκολα μπορείτε να δείξετε ότι, το μέτρο του $\boldsymbol{\gamma}$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. Το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται π.χ. στον ορισμό της ροπής δύναμης:

$$\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \quad \text{με μέτρο} \quad M^{(0)} = F\cdot r\cdot \etaμφ = F\cdot d \ (\text{Σχήμα 1.7}).$$



Σχήμα 1.7. Ορισμός της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Χρησιμοποιείται, επίσης, στον καθορισμό της μαγνητικής δύναμης σε κινούμενο φορτίο $\mathbf{F}=q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}$ όπου q το φορτίο, $\boldsymbol{\upsilon}$ η ταχύτητα του και $\mathbf{B}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου στη θέση του κινούμενου φορτίου q. Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου είναι προφανές, ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ είναι κάθετη και στα δύο ανύσματα $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\mathbf{B}$.

γ) Αναλυτικός υπολογισμός γινομένου ανυσμάτων

Έστω τα ανύσματα

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x\mathbf{i} + \alpha_y\mathbf{j} + \alpha_z\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_x\mathbf{i} + \beta_y\mathbf{j} + \beta_z\mathbf{k}.$$

i) Εσωτερικό γινόμενο

Συμβολικά γράφουμε:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = (\alpha_x\mathbf{i} + \alpha_y\mathbf{j} + \alpha_z\mathbf{k})\cdot(\beta_x\mathbf{i} + \beta_y\mathbf{j} + \beta_z\mathbf{k}).$$

Εκτελώντας τις τυπικές πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_x\cdot\beta_x + \alpha_y\cdot\beta_y + \alpha_z\cdot\beta_z}$$

ii) Εξωτερικό γινόμενο

Το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων δίδει:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\quad \text{και}\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

Η αντιστροφή στη σειρά πολλαπλασιασμού προκαλεί, όπως έχει ήδη επισημανθεί, αλλαγή στο πρόσημο του αποτελέσματος. Συμβολικά γράφουμε:

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = (\alpha_x\mathbf{i} + \alpha_y\mathbf{j} + \alpha_z\mathbf{k}) \times (\beta_x\mathbf{i} + \beta_y\mathbf{j} + \beta_z\mathbf{k}).$$

Αντί της αναλυτικής παράστασης του πολ/σμού, ακολουθούμε ένα περισσότερο κομψό τρόπο, χρησιμοποιώντας ορίζουσες. Ο τρόπος που εκτελείται το εξωτερικό γινόμενο περιγράφεται με συμπυκνωμένη μορφή, από την ορίζουσα

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{vmatrix}$$

Οι αναλυτικές πράξεις στην ορίζουσα μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους. Δύο τρόποι που χρησιμοποιούνται στην πράξη, είναι:

1^{ος} Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες σε συνέχεια με τις τρεις αρχικές και σχηματίζουμε τα γινόμενα κατά τις διαγωνίους. Τα τρία πρώτα θετικά (από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά) και τα επόμενα τρία αρνητικά (από πάνω δεξιά προς τα κάτω αριστερά):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & \beta_x & \beta_y \end{array} = (\alpha_y\beta_z-\alpha_z\beta_y)\mathbf{i} + (\alpha_z\beta_x-\alpha_x\beta_z)\mathbf{j} + (\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x)\mathbf{k}$$

2^{ος} Αναλύουμε την ορίζουσα σε υποορίζουσες

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_y & \beta_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix}\mathbf{k} =$$

$$= (\alpha_y\beta_z-\alpha_z\beta_y)\mathbf{i} - (\alpha_x\beta_z-\alpha_z\beta_x)\mathbf{j} + (\alpha_x\beta_y-\alpha_y\beta_x)\mathbf{k}$$

Το αποτέλεσμα είναι, φυσικά, ίδιο με το αποτέλεσμα του τρόπου 1.

Παραδείγματα

1. *Υπολογίστε τα μέτρα του αθροίσματος και της διαφοράς των ανυσμάτων.*

$$\boldsymbol{\alpha} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Λύση:

α) Άθροισμα $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

β) Διαφορά $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\Delta} = [2-(-1)]\,\mathbf{i} + [-1-(+2)]\,\mathbf{j} + [1-(-1)]\,\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Άρα $\Delta = \sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{22}$

2. *Το άνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης* $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (N) *είναι* $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (m). *Υπολογίστε το άνυσμα της ροπής* $\mathbf{M}$

Λύση:

Εξ ορισμού

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Το μέτρο της θα ισούται με: $M = \sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{72} \simeq 8,5$ N·m.

3. *Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των ανυσμάτων:* $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ και $\boldsymbol{\beta} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Λύση:

Είναι φανερό ότι η λύση θα προκύψει από σχέση, που να συνδέει τα δοθέντα ανύσματα με τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας μεταξύ τους. Π.χ. η σχέση του εσωτερικού γινομένου των δύο ανυσμάτων, επειδή σ' αυτήν περιέχεται η ζητούμενη γωνία μεταξύ τους:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\text{συνφ} \quad \Rightarrow \quad \text{συνφ} = \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\alpha\cdot\beta}$$

Συνεπώς, απομένει να υπολογίσουμε τα: $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ και τα μέτρα α, β. Για τον υπολογισμό του $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ αρκεί να παρατηρήσετε ότι από τα γινόμενα των συνιστωσών των είναι μη μηδενικά, μόνο αυτά που αντιστοιχούν στον ίδιο άξονα, δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y = 4$.

Επίσης $\alpha = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\beta = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Τελικά $$\text{συν} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 70^\circ.$$

Παρατήρηση: Για τη λύση των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορείτε να εργαστείτε και με το εξωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων.

1.2 Παράγωγος συνάρτησης

1.2.1. Ορισμός (μιά διάσταση)

Έστω η συνάρτηση f(x), με πεδίο ορισμού το Δ.

> *Ορίζουμε ως παράγωγο της f(x) στη θέση x_0, το όριο (εφόσον υπάρχει) του κλάσματος* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *όταν το* $x \to x_0$.

Για την παράγωγο χρησιμοποιούνται τα σύμβολα: $f'(x)$ ή $\dfrac{df(x)}{dx}$ (Σύμβολο του Newton). Έτσι,

$$f'(x=x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \underset{x \to x_0}{\text{ορ}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν, αντί των ζευγαριών $\{x_0, f(x_0)\}$, $\{x, f(x)\}$, χρησιμοποιήσουμε τα ισοδύναμα ζευγάρια $\{x, f(x)\}$ και $\{x+\Delta x, f(x+\Delta x)\}$, τότε η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

για την παράγωγο στο τυχαίο σημείο x.

Η δεύτερη, τρίτη κ.λπ. παράγωγος προκύπτει με ισάριθμη επανάληψη της παραγώγισης και για την συμβολική παράστασή τους χρησιμοποιούνται οι μορφές[4]:

για τη 2^{η} παράγωγο: $f''(x)$ ή $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ και γενικότερα,

για την ν^{η} παράγωγο: $f^{(\nu)}(x)$ ή $\dfrac{d^{(\nu)} f(x)}{dx^{(\nu}}$), όπου $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$, η τάξη παραγώγισης.

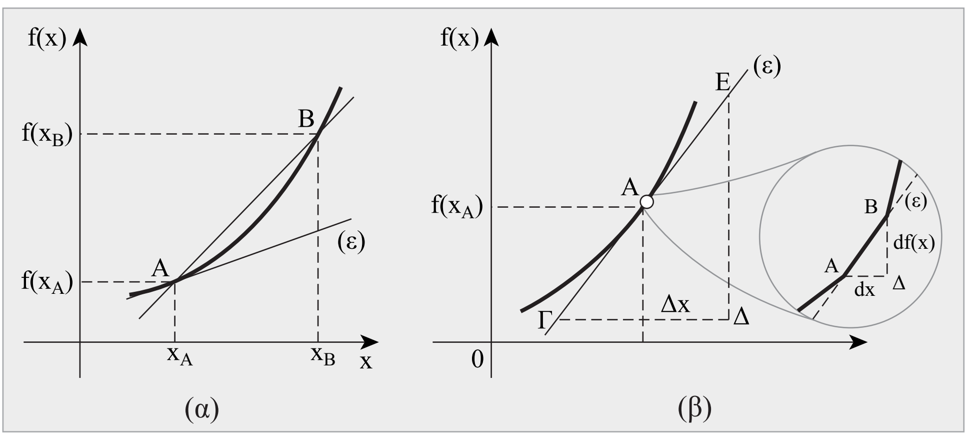
1.2.2. Φυσική σημασία παραγώγου

4. Στην περίπτωση χρονικών συναρτήσεων, η παράγωγός τους ως προς το χρόνο συμβολίζεται, πολλάκις, με κουκίδες, πάνω απ' το σύμβολο της συνάρτησης $\dot{f}(t)$, $\ddot{f}(r)$, $\dddot{f}(t)$ κ.λπ., για την πρώτη, τη δεύτερη, την τρίτη, κ.λπ., παράγωγό της. Παραδείγματος χάριν, αν η απομάκρυνση του κινητού είναι x $(x=x(t))$, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του μπορούν να συμβολιστούν με $\dot{x}$, $\ddot{x}$ και $\dddot{x}$, αντίστοιχα.

Από καθαρά μαθηματικής πλευράς, η παραγώγιση είναι μια διαδικασία δημιουργίας μιας νέας συνάρτησης, ακολουθώντας συγκεκριμένα βήματα ή κανόνες, όπως αυτά καθορίζονται από τον ορισμό της παραγώγου. Η φυσική της σημασία προκύπτει από τον ορισμό της. Η παράγωγος είναι η κλίση της καμπύλης που αποτελεί γραφική παράσταση της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο της. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση δίδεται στο σχήμα 1.8α. Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ, που τέμνει την δεδομένη καμπύλη $f(x)$, στα σημεία Α, Β, που αντιστοιχούν στις τετμημένες x_A και x_B. Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι:

$$K = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

Όταν το $x_B \to x_A$, δηλαδή το Β πλησιάζει το Α, που διατηρείται σταθερό, η ευθεία ΑΒ αλλάζει συνεχώς κλίση και όταν το Β πλησιάσει σε απειροστή απόσταση το Α, τότε γίνεται εφαπτομένη της καμπύλης στο x_A, (ευθεία (ε) Σχήμα 1.8β).



Σχήμα .1.8. (α) Η κλίση της εφαπτομένης (ε), στο σημείο Α της καμπύλης, ισούται με την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f(x), που περιγράφει την καμπύλη, στο ίδιο σημείο. **(β)** Ένας εναλλακτικός τρόπος για να αναδειχθεί η φυσική σημασία της παραγώγου. Η δεδομένη καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως πολυγωνική γραμμή, με άπειρο πλήθος απειροστών ευθυγράμμων τμημάτων. Στο σημείο Α, το ευθύγραμμο απειροστό τμήμα είναι το ΑΒ′. Παρ’ ότι απειροστό, για τις ανάγκες της παρουσίασης, ας φανταστούμε ότι το παρατηρούμε μέσα από ένα μεγεθυντικό φακό. Ουσιαστικά, το ΑΒ′ αποτελεί το κοινό τμήμα της καμπύλης και της εφαπτομένης της, στο Α. Οι προβολές του στους άξονες x και f(x), αντίστοιχα, είναι dx και df(x). Η κλίση του, df(x)/dx, εκφράζει την παράγωγο της f(x), στο Α. Όπως γίνεται φανερό, η κλίση Δf(x)/Δx, της ευθείας (ε), που υπολογίζεται με μέτρηση των πεπερασμένων πλευρών του τριγώνου ΓΔΕ, ισούται με την κλίση του τμήματος ΑΒ′. Συνεπώς, η παράγωγος της f(x) στο Α, ανάγεται στον υπολογισμό της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας (ε), στο ίδιο σημείο.

Άρα στο όριο αναφερόμαστε στην κλίση της εφαπτομένης ευθείας, στη δεδομένη καμπύλη, στο συγκεκριμένο σημείο x_0, του ορισμού, το οποίο στην προηγηθείσα περιγραφή, είναι το σημείο x_A. Η παράγωγος λοιπόν μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x, είναι μια νέα συνάρτηση, η οποία προσδιορίζει την κλίση της ευθείας, που εφάπτεται στην καμπύλη, στο ίδιο σημείο x και άρα το μέγεθος της αύξησης ή ελάτωσης της συνάρτησης, με δεδομένο βήμα πάνω στον άξονα x, στο σημείο υπολογισμού της κλίσης.

Πολλά φυσικά μεγέθη ορίζονται με βάση την έννοια της παραγώγου. Το οριζόμενο μέγεθος προκύπτει ως ρυθμός ή βαθμίδα, με την οποία μεταβάλλονται άλλα μεγέθη. Έτσι, προσδιορίζεται π.χ. ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός οχήματος, $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\upsilon}/dt$, που αποτελεί την επιτάχυνσή του, ο ρυθμός παραγωγής ή κατανάλωσης έργου, δηλαδή, η ισχύς, $P = 6\,W/dt$, ο ρυθμός μεταβολής μαγνητικής ροής, ο οποίος προσδιορίζει την εμφανιζόμενη εξ επαγωγής τάση (Νόμος της επαγωγής $E = -d\Phi_B/dt$), η βαθμίδα ελάττωσης της θερμοκρασίας ανά μονάδα πάχους μέσα σ' ένα σώμα, dT/dx, κ.α.

1.2.3. Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων μιας μεταβλητής

α) Παραγώγιση γινομένου. Έστω το γινόμενο των συναρτήσεων

$$\Gamma(x) = f(x)\cdot g(x).$$

Η παραγώγιση γίνεται ως εξής:

$$\Gamma'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

β) Παραγώγιση κλάσματος. Έστω το κλάσμα

$$K(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

με $g(x) \neq 0$, για κάθε x του πεδίου ορισμού. Τότε:

$$K'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

γ) Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης της μορφής F(x) = f(g(x)). Η παραγώγιση της F(x) ως προς x, διευκολύνεται αν χρησιμοποιήσουμε ενδιάμεση μεταβλητή z = g(x). Οι διαδοχικές πράξεις περιγράφονται από τη σχέση:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dz}\,\frac{dz}{dx}$$

1.2.4. Παραδείγματα εφαρμογής του ορισμού της παραγώγου

Δίδονται μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα υπολογισμού της παραγώγου μιας δεδομένης συνάρτησης, με βάση τον ορισμό της.

1. Έστω $f(x)=x^2$. Αντίστοιχα $f'(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} (2x+\Delta x) = 2x$$

2. $f(x) = \text{ημ}x$, $f(x+\Delta x) = \text{ημ}(x+\Delta x) \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\text{ημ}(x+\Delta x) - \text{ημ}x}{\Delta x} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(\text{ημ}x\,\text{συν}(\Delta x) + \text{συν}x\,\text{ημ}(\Delta x)) - \text{ημ}x}{\Delta x}$$

Όταν όμως $\Delta x \to 0$ τότε $\text{συν}\Delta x \approx 1$ και $\text{ημ}\Delta x \approx \Delta x$. Συνεπώς,

$$\frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\text{ημ}x \cdot 1 + (\text{συν}x)\Delta x - \text{ημ}x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \text{συν}x = \text{συν}x$$

3. $f(x) = e^x$, $f(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} e^x(e^{\Delta x} - 1)\Delta x = e^x \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Όταν όμως $\Delta x \to 0$ τότε $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$. Έτσι, τελικά, $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$.

4. Παραγώγιση της $e^{\varphi(x)}$. Σύμφωνα με τη γενική αντιμετώπιση, θέτουμε $z=\varphi(x)$ και άρα

$$\frac{de^{\varphi(x)}}{dx} = \frac{de^z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot \varphi'(x) = \varphi'(x) \cdot e^{\varphi(x)}.$$

1.3 Ολοκλήρωση συνάρτησης

1.3.1. Αόριστο ολοκλήρωμα

Το ολοκλήρωμα αποτελεί εξέλιξη της άθροισης ποσοτήτων στην περίπτωση που οι αθροιζόμενες ποσότητες γίνονται απειροστές, απείρου πλήθους. Για διδακτικούς λόγους, αρχικά, θα παρουσιάσουμε τη μαθηματική διαδικασία υπολογισμού του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης και θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στη φυσική του σημασία, σε επόμενη παράγραφο.

Έστω η συνάρτηση f(x), η οποία είναι συνεχής στο διάστημα ορισμού της Δ,

> *Ορίζουμε ως αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f(x) μια νέα συνάρτηση $I_1(x)$, έτσι ώστε:*
>
> $I_1'(x) = f(x)$ *Ορισμός παράγουσας ή αρχικής συνάρτησης*

Επειδή και η συνάρτηση $I_1(x)+c$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά, ικανοποιεί την σχέση ορισμού, είναι κι αυτή παράγουσα. Η σταθερά εκφράζει την αοριστία προσδιορισμού της παράγουσας.

> *Το σύνολο των παραγουσών ή αρχικών συναρτήσεων ορίζεται ως αόριστο ολοκλήρωμα* I(x) *και γράφεται συμβολικά ως εξής:*
>
> $$I(x) = \int f(x)dx + c$$

Σύμφωνα με την συμβολική αυτή παράσταση, μετά τον υπολογισμό της βασικής μαθηματικής έκφρασης της συγκεκριμένης παράγουσας, πρέπει να προσθέσουμε μια σταθερά, δηλαδή, ποσότητα ανεξάρτητη της μεταβλητής x. Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι, η ολοκλήρωση, ως μαθηματική πράξη, είναι μεν η **αντίστροφη διαδικασία** της παραγώγισης συνεχών συναρτήσεων, εισάγει, όμως, αοριστία ως προς τον προσδιορισμό της αρχικής συνάρτησης. Π.χ. αν $f(x)=x^2$ τότε $f'(x)=2x=g(x)$. Ολοκληρώνοντας την $g(x)$ έχουμε:

$$I_1(x) = \int g(x)dx = \int 2xdx = x^2 \quad \text{και άρα} \quad I(x) = x^2 + c$$

Προέκυψε, δηλαδή, η αρχική συνάρτηση με αοριστία, η οποία εκφράζεται από τη σταθερά c.

Στα φυσικά προβλήματα, η αοριστία αίρεται με χρήση των **αρχικών συνθηκών** ή των **οριακών συνθηκών**, ανάλογα με το εξεταζόμενο πρόβλημα. Οι αρχικές συνθήκες αποτελούν δεδομένα του προβλήματος, που αναφέρονται στις τιμές των φυσικών μεγεθών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή (π.χ. ταχύτητα ή/και επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=0$ s), ενώ οι οριακές συνθήκες αναφέρονται στις τιμές του μεγέθους σε δεδομένες θέσεις του χώρου εφαρμογής. Π.χ. στην περίπτωση μιας παλλόμενης χορδής, τα δύο της άκρα, στα οποία είναι στερεωμένη, αποτελούν δεσμούς κίνησης (πλάτος ταλάντωσης, $y_0=0$).

Το επόμενο πρόβλημα είναι παράδειγμα αρχικών συνθηκών:

Υλικό σημείο, περνά τη χρονική στιγμή $t=0$ s, *από τη θέση* $x(0)=x_0$, *με αρχική ταχύτητα,* $\upsilon(0)=\upsilon_0$, *κινούμενο με ομαλά επιταχυνομένη κίνηση, πάνω σε ευθεία γραμμή. Ποια η θέση και η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή* t;

Οι αρχικές συνθήκες για το πρόβλημα είναι το x_0 για την απομάκρυνση και η υ_0, για την ταχύτητα, τη χρονκή στιγμή $t=0$. Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος δίδεται στην παράγραφο 2.6, του 2^{ου} Κεφαλαίου, που αναφέρεται στην κίνηση. Εκεί δείχνεται ο τρόπος χρησιμοποίησης των δεδομένων αυτών, προκειμένου να αρθεί η αοριστία των τελικών αποτελεσμάτων, για το $x(t)$ και το $\upsilon(t)$.

1.3.2. Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ορίζουμε ως ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ *μεταξύ των τιμών* $x_1=\alpha$ *και* $x_2=\beta$ *τη διαφορά* $I(\beta)-I(\alpha)$, *των τιμών του αορίστου ολοκληρώματος στις θέσεις* α *και* β.

Δηλαδή
$$I = \left[I(x)\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(x)dx = I(\beta) - I(\alpha)$$

Σημειώστε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα είναι συνάρτηση, ενώ το ορισμένο είναι μια συγκεκριμένη τιμή.

Παράδειγμα:

Έστω $f(x)=x$. Τότε $I_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ και $I(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$ (συνάρτηση)

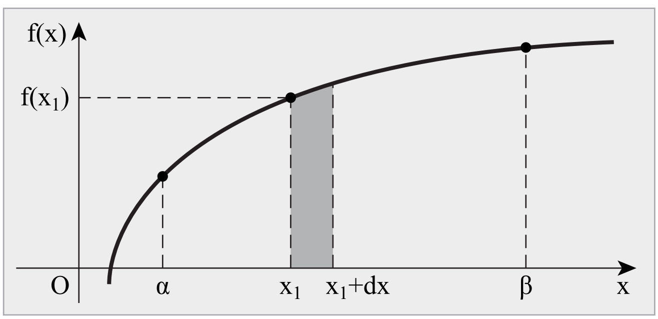
Το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής, μεταξύ των θέσεων $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, είναι

$$[I(x)]_1^2 = I(2) - I(1) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$$

1.3.3. Φυσική σημασία του ολοκληρώματος

Το σύμβολο της ολοκλήρωσης $\int$, δεν είναι τίποτε άλλο παρά διαμορφωμένο, το αρχικό γράμμα S, της Λατινικής λέξης Summa, που σημαίνει άθροισμα ή ολικό ποσό. Αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι, το ολοκλήρωμα είναι εξέλιξη της έννοιας της άθροισης, στην περίπτωση που οι αθροιζόμενες ποσότητες γίνονται απειροστές και το πλήθος τους άπειρο. Όλα τα παραπάνω εμπεριέχονται συμπυκνωμένα στη συμβολική γραφή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$



Σχήμα 1.9. Το γινόμενο $f(x_1)dx$, ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.

Το $f(x)dx$ είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδό[5] κάτω από την καμπύλη $f(x)$, μεταξύ x και $x+dx$ και άρα ο συμβολική γραφή του ολοκληρώματος ερμηνεύεται ως το άθροισμα των μικρών εμβαδών, μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x, ανάμεσα στα σημεία α και β (Σχήμα 1.9).

---

5. Το πλεονέκτημα που προσφέρει η χρησιμοποίηση των απειροστών ποσοτήτων και μεταβολών, είναι το εξής (μια διάσταση): Μέσα σε ένα απειροστό τμήμα, dx, μπορούμε, με βεβαιότητα μεγαλύτερη κι απ' την καλύτερη πειραματική ακρίβεια του μεγέθους, να θεωρήσουμε, την οποιαδήποτε συνάρτηση, $f(x)$, σταθερή. Βεβαίως, από το ένα απειροστό τμήμα στο επόμενο, η συνάρτηση μεταβάλλεται, κατά απειροστό ποσό, $df(x) = f(x+dx) - f(x)$. Συνεπώς, μέσα στο τμήμα dx, το γινόμενο $f(x)dx$, ισούται, ακριβώς, με το εμβαδόν κάτω απ' την καμπύλη, μεταξύ αυτής και του άξονα x.