Ι. Ε. ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ

# Ειδικά Θέματα
# Φυσικής

- Μηχανική
- Στατική και Δυναμική των Ρευστών
- Θερμότητα
- Ηλεκτρισμός
- Φωτομετρία

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα*

ISBN 960-431-771-7



Β ΄Εκδοση Δεκέμβριος 2003

---



---

***Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση***

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920.72.222 (3 γραμ.) - Fax: 23920.72.229
e-mail: info@ziti.gr

***Βιβλιοπωλείο***

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310.203.720, Fax 2310.211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

# Αντί προλόγου

Στο βιβλίο αυτό περιλαμβάνονται και αναλύονται έννοιες της Φυσικής, σε επίπεδο μαθήματος γενικής υποδομής, προσαρμοσμένες στις απαιτήσεις και τους στόχους των σπουδών, που παρέχονται στις Σχολές Γεωπονίας της Ανώτατης Εκπαίδευσης. Με οδηγό τον επιδιωκόμενο εκπαιδευτικό χαρακτήρα του συγγράμματος, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε, η διάρθρωση του κειμένου και ο τρόπος ανάλυσης των θεμάτων, να οδηγούν μεθοδικά, στην κατανόηση των θεωρητιών εννοιών και των φαινομένων τεχνολογικού ενδιαφέροντος. Στα πλαίσια αυτής της επιδίωξης περιορίστηκαν, όπου και όσο ήταν δυνατόν, οι εκτεταμένες μαθηματικές αναλύσεις.

Στην εισαγωγή του συγγράμματος, παρουσιάζονται σε περίληψη, τα πρότυπα μεγέθη και οι μονάδες τους, με κύρια αναφορά στα μεγέθη του διεθνούς συστήματος μονάδων. Περιλαμβάνονται, επίσης, σε συντομία, μερικές εισαγωγικές γνώσεις μαθηματικών, για λόγους άμεσης αναφοράς του σπουδαστή, σ’ αυτές.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίδονται σε αδρές γραμμές οι βασικές έννοιες της Μηχανικής, δεδομένου ότι τα θέματα Δυναμικής και τα ενεργειακά θέματα, κυριαρχούν σε κάθε πρακτική εφαρμογή. Επιδιώκεται μ’ αυτό τον τρόπο η αποσαφήνιση των βασικών αυτών εννοιών, που προαπαιτούνται για τη μελέτη των επομένων θεμάτων.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια, 2 και 3, η ανάλυση επικεντρώνεται σε θέματα που αφορούν την Στατική και Δυναμική των ρευστών, την άντληση, τα θερμικά φαινόμενα, τη διάδοση της ενέργειας με τη μορφή θερμότητας, την ακτινοβολία των σωμάτων, τη βασική αρχή του θερμοκηπίου κ.λπ. Τέλος, στα κεφάλαια 4 και 5 περιλαμβάνονται στοιχεία από τον Ηλεκτρισμό και τη Φωτομετρία, σχετικά με μια τυπική ηλεκτρική εγκατάσταση και τα χαρακτηριστικά που αφορούν τις φωτεινές πηγές.

Σε όλη την έκταση της παρουσιαζόμενης ύλης δίδεται ιδιαίτερη έμφαση σε εφαρμογές τεχνολογικού ενδιαφέροντος, που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη κατεύθυνση σπουδών.

*Ιωάννης Φραγκιαδάκης*

Μάρτιος 2002

# Περιεχόμενα

## Εισαγωγή



1ο Κεφάλαιο

## Δυνάμεις και κίνηση

## 2ο Κεφάλαιο

## Ρευστά

3ο Κεφάλαιο

## Θερμότητα

## 4ο Κεφάλαιο

## Στοιχεία από τον Ηλεκτρισμό

5ο Κεφάλαιο

## Στοιχεία από τη Φωτομετρία

# Εισαγωγή

# A Η επιστήμη της Φυσικής

## Φαινόμενο -πείραμα - φυσικός νόμος

## Υπόθεση - θεωρία

Όλα όσα συμβαίνουν ή εξελίσσονται γύρω μας, είτε υποπίπτουν άμεσα στις αισθήσεις μας είτε όχι, αποτελούν τα *φαινόμενα*. Η επιστήμη της Φυσικής έχει ως σκοπό της να διερευνήσει και να περιγράψει την πρωταρχική αιτία των φαινομένων, με στόχο την κατανόηση του κόσμου και της παρουσίας του ίδιου του ανθρώπου σ' αυτόν.

Η επανάληψη ενός φαινομένου από τον άνθρωπο, μέσα σ' ένα ειδικά διαμορφωμένο χώρο, με έλεγχο όλων εκείνων των παραμέτρων που επηρεάζουν την εξέλιξη του, έτσι ώστε να προκύψουν επιβεβαιωμένα συμπεράσματα για την ποιοτική και ποσοτική περιγραφή του φαινομένου, αποτελεί το *πείραμα*. Ο χώρος που παρέχει αυτή την ευχέρεια, του επανειλημμένου ελέγχου και της διαπίστωσης του τρόπου εξέλιξης ενός φαινομένου, ονομάζεται *εργαστήριο*.

Τα γενικότερης ισχύος συμπεράσματα, που προκύπτουν από την μελέτη των αποτελεσμάτων, πληθώρας ομοίων πειραμάτων, διατυπωμένα σε μια απλή και κομψή πρόταση, αποτελούν τον *φυσικό νόμο*, που διέπει το συγκεκριμένο φαινόμενο. Η ανακάλυψη και διατύπωση του φυσικού νόμου οδηγεί αυθόρμητα στην προσπάθεια ερμηνείας του, ώστε αυτός να προκύψει από πρωταρχικές έννοιες της γνώσης. Στα πλαίσια μιας οικουμενικής ερμηνείας των παρατηρουμένων φαινομένων, επιδιώκεται η περιγραφή τους με βάση προτάσεις, η ισχύς των οποίων τίθεται με αξιωματικό τρόπο (*αξιώματα)*. Η συνολική πρόταση ονομάζεται *θεωρία*. Μια θεωρία βασίζεται στα αξιώματά της καθώς και στην περιγραφή ενός συγκεκριμένου *προτύπου (μοντέλου)* της δομής της ύλης (*υπόθεση*) και επιδιώκει να ερμηνεύσει όλα τα φαινόμενα στον κόσμο.

Κάθε θεωρία ισχύει μέχρις ότου προταθεί μία νέα, η οποία χαρακτηρίζεται, μετά από πειραματική διαπίστωση, από ευρύτερο πεδίο ερμηνείας φαινομένων. Η υπερκάλυψη της παλαιότερης θεωρίας σημαίνει κατά κανόνα την κατάργησή της. Η Ειδική θεωρία της Σχετικότητας, που προτάθηκε από τον Einstein, ερμήνευσε πλήθος πειραματικών παρατηρήσεων, που μέχρι τότε δημιουργούσαν πονοκέφαλο στους επιστήμονες της εποχής, υπερκαλύπτοντας την παλαιότερη θεωρία του Newton.

Παρά ταύτα, στο μεγαλύτερο πλήθος των επίγειων μηχανικών θεμάτων, μελετών και κατασκευών, εξυπηρετεί με την απλότητά της, η εφαρμογή της θεωρίας του Newton, επειδή οι ταχύτητες που σχετίζονται με την πλειονότητα αυτών των κατασκευών, είναι ασήμαντες συγκρινόμενες με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Η θεωρία του Einstein παρουσίασε μια άλλη εικόνα για τον χώρο και το χρόνο. Οι ιδέες της συστολής του χώρου και της διαστολής του χρόνου, όχι μόνο προκάλεσαν επανάσταση την εποχή που πρωτοδιατυπώθηκαν αλλά συνεχίζουν να εντυπωσιάζουν και να προκαλούν τη νόησή μας. Σύμφωνα, πάντως, με την θεωρία του Newton δεν υπάρχει όριο στην ενέργεια που μπορούμε να δώσουμε σ' ένα σώμα. Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα των βασικών παραδοχών της θεωρίας αυτής, σύμφωνα με την οποία η μάζα του σώματος είναι σταθερή, ανεξάρτητη της ταχύτητας του.

Αντίθετα, σύμφωνα με την θεωρία του Einstein η μάζα του σώματος αυξάνει με την ταχύτητα του, απειριζόμενη καθώς αυτή πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Το γεγονός αυτό σήμερα, λαμβάνεται υπ' όψη σ' όλες τις εφαρμογές επιτάχυνσης φορτισμένων σωματιδίων στον τομέα της Πυρηνικής Φυσικής. Ως θεωρητικό αποτέλεσμα, είναι απόρροια του αξιώματος της θεωρίας Einstein: *η ταχύτητα του φωτός στο κενό (~300.000 km/s) αποτελεί παγκόσμια σταθερά, ανεξάρτητη από την ταχύτητα του συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο γίνεται η μέτρηση της.*

Στο σύγγραμμα αυτό, με βάση όσα εκτέθηκαν, η ανάπτυξη και εξέταση των γενικών και ειδικών θεμάτων βασίζεται στη θεωρία του Newton.

**Σύστημα SI**

| | |
|---|---|
| Μήκος | 1 m |
| Μάζα | 1 kg |
| Χρόνος | 1 s |
| Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος | 1 A |
| Θερμοκρασία | 1 K |
| Φωτοβολία | 1 Cd |

## B Διεθνές Σύστημα μονάδων (Système International, S.I.)

Το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται σήμερα περιλαμβάνει ως θεμελιώδη μεγέθη: το μήκος, τη μάζα, το χρόνο, την ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, τη θερμοκρασία και τη φωτοβολία.

- **Μήκος**, με μονάδα το μέτρο μήκους (1 m). Το πρότυπο μέτρο, μία ράβδος από PtIr, φυλάσσεται στο μουσείο Μέτρων και Σταθμών, στην πόλη Sevres της Γαλλίας, κοντά στο Παρίσι. Για να αποκτήσει το μέτρο την ιδιότητα του αμετάβλητου συγκρίνεται με το μήκος κύματος λ, της ακτινοβολίας που εκπέμπεται όταν ηλεκτρόνιο του συγκεκριμένου ατόμου του ισοτόπου 86 του Κρυπτού αποδιεγείρεται από την στάθμη 5d στην 2p. Η σύγκριση αυτή δίδει:

$$1\text{ m} = 1.650.763{,}73 \cdot \lambda_{(86\text{Kr}\ (5\text{d} \rightarrow 2\text{p}))}$$

  *Σύγχρονος ορισμός του 1 m.* Από το 1983 και μετά, το μέτρο μήκους ορίζεται ως: *το μήκος που διανύει το φως στο κενό μέσα σε 1/299.792.458 του πρότυπου δευτερολέπτου, όπως αυτό ορίζεται στα επόμενα* (Μέτρο χρόνου, ορισμός ΙΙΙ).

- **Μάζα**, με μονάδα το χιλιόγραμμο (1 kg). Το πρότυπο μάζας είναι η μάζα ενός συμπαγούς κυλίνδρου από PtIr με συγκεκριμένες διαστάσεις (ύψος κυλίνδρου 39 mm, διάμετρος βάσης 39 mm). Η μάζα αυτή είναι ίση με τη μάζα 1 $\ell$ (1000 $cm^3$, 1$cm^3$ = 1ml) νερού θερμοκρασίας 4 °C και ατμοσφαιρικής πίεσης 760 torr. Η συνηθισμένη συσκευασία με την οποία διατίθεται το εμφιαλωμένο επιτραπέζιο νερό, είναι σε φιάλες που αναγράφουν περιεχόμενο 1,5 $\ell$ νερού. Η μάζα του είναι πρακτικά, 1,5 kg.

- **Χρόνος**, με μονάδα το δευτερόλεπτο (1 s). Υπάρχουν διάφοροι τρόποι καθορισμού του δευτερολέπτου που όλοι σχετίζονται με περιστροφική ή ταλαντωτική κίνηση.

  I) *Η περιστροφή της Γης γύρω απ' τον άξονά της* καθορίζει τον λεγόμενο Παγκόσμιο χρόνο, ως

  $$1\ \text{s} = \frac{1}{86400}\ \text{Μέσης Ηλιακής Μέρας}$$

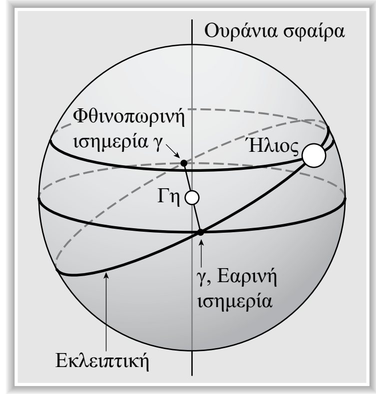
  όπου η Μέση Ηλιακή Μέρα είναι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μεσουρανήσεων του Ήλιου στον ίδιο τόπο.

  II) *Η περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο* καθορίζει τον λεγόμενο *χρόνο των αστρονομικών εφημερίδων*. Με βάση την κίνηση αυτή, το δευτερόλεπτο ορίζεται ως εξής:

  $$1\ \text{s} = \frac{1}{31.556.945{,}9747}\ \text{του Τ.Ε}^{1}.\ 1900$$

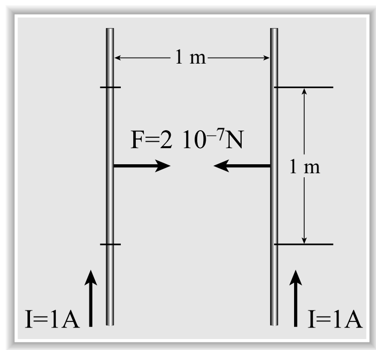
  *III) Σύγχρονος ορισμός του 1 s. Βασίζεται στην ταλαντωτική κίνηση των ατόμων του Κεσίου 133 ($^{133}Cs$) μέσα σε μαγνητικό πεδίο.*

  Το οριζόμενο έτσι πρότυπο δευτερόλεπτο περιέχει 9.192.631,77 περιόδους ταλάντωσης συντονισμού των ατόμων Κεσίου. Το ατομικό ρολόι Κεσίου χάνει 1 s σε περισσότερο από 3000 χρόνια.




**Σχήμα Ε1.** Τα σημεία τομής του ουράνιου ισημερινού και της εκλειπτικής ονομάζονται εαρινή (γ) και φθινοπωρινή (γ′) ισημερία, αντιστοίχως.

- **Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος** με μονάδα το 1 A (1Ampere). Ορίζεται ως η ένταση, δύο ίσων ρευμάτων, τα οποία διαρρέοντας δύο παράλληλους μεταλλικούς αγωγούς (σχ. Ε2), που απέχουν μεταξύ τους 1 m, προκαλούν δυνάμεις αλληλεπίδρασης (έλξης ή άπωσης, ανάλογα με τη φορά των ρευμάτων) ίσες με $2{\times}10^{-7}$ N, ανά μέτρο μήκους των αγωγών αυτών.




**Σχήμα Ε2.** Διάταξη για τον ορισμό της μονάδας της έντασης ηλεκτρικού ρεύματος 1Ampere.

- **Θερμοκρασία**, με μονάδα τον βαθμό Kelvin (1 K). Το 0 K της κλίμακας αυτής αντιστοιχεί στους –273 $^oC$. Μεταξύ των ενδείξεων T και θ των δύο κλιμάκων υφίσταται η απλή σχέση: $T=273+\theta$.

- **Φωτοβολία**, με μονάδα την Candela (1 cd). *Φωτοβολία* είναι το πηλίκο της συνολικής ισχύος της ορατής ακτινοβολίας (δηλαδή σ' όλα τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος) που εκπέμπει μία φωτεινή πηγή, μέσα σε μια στοιχειώδη στερεά γωνία dΩ, δια της γωνίας αυτής. Ένας κώνος με κορυφή στο κέντρο μίας σφαίρας ακτίνας $R=1$ m, που αποκόπτει από την επιφάνειά της τμήμα εμβαδού 1 $m^2$, προσδιορίζει στερεά γωνία ίση με ένα στερακτίνιο (1sr). Ολόκληρη η σφαίρα έχει 4π sr (Κεφάλαιο 5).

  *Μία φωτεινή πηγή χαρακτηρίζεται από φωτοβολία 1 cd, όταν κάθε $cm^2$ της επιφάνειάς της εκπέμπει, κάθετα προς αυτήν, συνολική φωτεινή ισχύ ίση με το 1/60 της συνολικής ισχύος της ορατής περιοχής του φάσματος, της ακτινοβολίας που εκπέμπεται κάθετα από*

1. Τ.Ε. = Τροπικό Έτος = χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του Ήλιου από το σημείο της εαρινής ισημερίας.

*επιφάνειά 1 $cm^2$ λευκόχρυσου (Pt), που βρίσκεται στη θερμοκρασία τήξης του (1770 °C), σε πίεση 1Atm*

*Σύγχρονος ορισμός της cd*: Το 1979, στην αντίστοιχη συνάντηση της Διεθνούς Επιτροπής Μέτρων και Σταθμών, η 1 cd ορίστηκε ως:

*"η φωτοβολία μιας σημειακής μονοχρωματικής φωτεινής πηγής, συχνότητας $540 \times 10^{12}$Hz ή μήκους κύματος 555 nm (μέγιστο ευαισθησίας ανθρώπινου οφθαλμού), η οποία δίδει γωνιακή ροή ακτινοβολίας (Radiant intensity), ίση με* $\frac{1}{683}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$"

- Η **δύναμη** είναι *παράγωγο* μέγεθος στο SI και η μονάδα της σ' αυτό είναι το 1 N (Newton). Παρά ταύτα, ως πρότυπη μονάδα δύναμης ορίζεται το 1 kp, που είναι θεμελιώδης μονάδα στο Τεχνικό Σύστημα, το οποίο δεν χρησιμοποιείται πια. *1 kp είναι η δύναμη που ασκείται από τη γη σε μάζα 1kg, που βρίσκεται σε σημείο όπου η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι g= 9,8066 $m/s^2$*. Ο τόπος αυτός, προσεγγιστικά, αντιστοιχεί σε γ.π. 45°, στην επιφάνεια της θάλασσας. Η σχέση του με το 1 N, είναι:

$$1 \text{ kp} = 9{,}8066 \text{ N} \approx 9{,}81 \text{ N}$$

Παρατήρηση: Επειδή, πολύ συχνά γίνεται χρήση μονάδων άλλων συστημάτων, εκτός του SI, θεωρείται εντελώς απαραίτητη η γνώση, τουλάχιστον των περισσότερο απλών σχέσεων αυτών των μονάδων, με τις αντίστοιχες του συστήματος SI. Π.χ. μεταξύ του συστήματος CGS και του SI οι αντιστοιχίες είναι:

για τη μάζα $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$,<br>
για το μήκος $1\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$ και<br>
για τη δύναμη $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$.

## Γ Γενικές γνώσεις από τα μαθηματικά

### I. Γραφική παράσταση

Η γραφική παράσταση ενός μεγέθους y, π.χ. του ύψους ενός ανθρώπου ή κάποιου φυτού σε συνάρτηση με ένα άλλο μέγεθος x, π.χ. την ηλικία του ανθρώπου ή του φυτού αντίστοιχα, έχει ως στόχο να καταδείξει, με άμεσο και απλό τρόπο, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεταβολής του μεγέθους. Για να κατασκευάσουμε μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση, αρκεί να καταγράψουμε κατά ζεύγη (*διατεταγμένα ζεύγη*) τις τιμές των συσχετιζόμενων μεγεθών και να προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα προς τα ζεύγη αυτά σημεία του επιπέδου, που καθορίζεται από τους άξονες x′Ox και y′Oy.

Γενικότερα, κάθε τέτοια γραφική παράσταση μπορεί να περιγραφεί με μαθηματική σχέση, που τη συμβολίζουμε $f(x, y)=0$ ή $y=f(x)$. Η σχέση αυτή αποτελεί την *αλγεβρική μορφή* της γραφικής παράστασης. Σε μερικές περιπτώσεις οι σχέσεις αυτές έχουν μία απλή μορφή όπως π.χ. της ευθείας, της παραβολής 2ου βαθμού και του εκθετικού $e^{-x}$. Οι γενικές αλγεβρικές εκφράσεις των πολύ γνωστών αυτών σχέσεων είναι:

σχέση 1ου βαθμού $y = αx + β$

σχέση 2ου βαθμού $y = αx^2 + βx + γ$

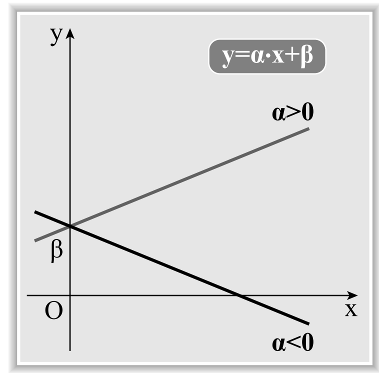
εκθετικό: $y=αe^{-x}$ ή $y=α(1-e^{-x})$

όπου α, β, γ, πραγματικοί αριθμοί.

Η πρώτη απ' αυτές, περιγράφει φαινόμενα όπου η εξαρτημένη μεταβλητή y, μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Μ' άλλα λόγια, τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) τοποθετημένα στο επίπεδο των αξόνων x′x και y′y καθορίζουν μία ευθεία γραμμή. Αυτή η ευθεία γραμμή μπορεί να έχει θετική ($α>0$) ή αρνητική ($α<0$) κλίση. Στην πρώτη περίπτωση, καθώς το x αυξάνεται το y αυξάνεται ενώ στη δεύτερη καθώς το x αυξάνεται το y ελαττώνεται όπως φαίνεται στο σχήμα Ε3. Το β είναι το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y κι αυτό γίνεται φανερό όταν στη θέση του x, τεθεί το 0. Αν το $β=0$ τότε $y=αx$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το y είναι ευθέως ανάλογο του x. Παραδείγματος χάριν, στο νόμο του Ohm, το ρεύμα είναι ευθέως ανάλογο της εφαρμοζόμενης τάσης,

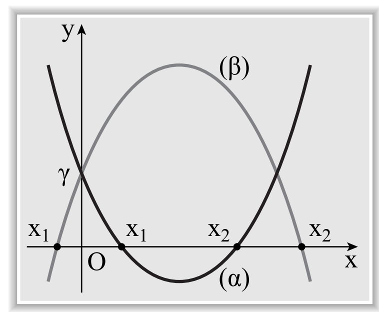
$$I = (1/R)V,$$

όπου R η ηλεκτρική *αντίσταση* του αγωγού. Ως αντίσταση ενός αγωγού ορίζεται το πηλίκο V/I, της τάσης που εφαρμόζεται στον αγωγό δια της έντασης του ρεύματος που τον διαρρέει, ανεξάρτητα από την ισχύ ή όχι του νόμου του Ohm γι' αυτόν τον αγωγό.



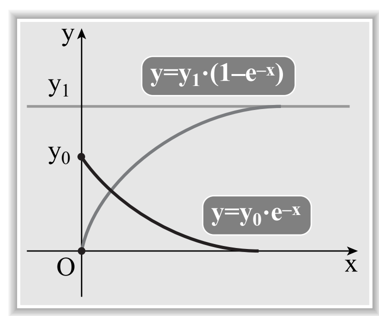

Σχήμα Ε3. Γραφική παράσταση ευθείας με θετική ($α>1$) και αρνητική ($α<0$) κλίση.

Η δεύτερη των εξισώσεων, η δευτεροβάθμια, περιγράφει φαινόμενα στα οποία, όταν μεταβάλλεται το x, το y μεταβάλλεται περισσότερο ή λιγότερο απ' ό,τι στη γραμμική μεταβολή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η γραφική παράσταση $y=f(x)$ να παρουσιάζει είτε μία κορυφή είτε μία κοιλάδα (σχ. Ε4) (σε εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού εμφανίζονται περισσότερες της μιας κορυφές ή κοιλάδες: *ακρότατα*). Στην πρώτη περίπτωση όπου παρουσιάζεται μέγιστο ο συντελεστής του $x^2$, το α, είναι αρνητικός αριθμός ($α<0$, περίπτωση (β), σχ. Ε4). Στην δεύτερη περίπτωση παρουσιάζεται ένα ελάχιστο και το α είναι θετικός αριθμός ($α>0$, περίπτωση (α), σχ. Ε4). Π.χ., ένα σώμα που βάλλεται ελεύθερα ($g=10\ m/s^2$) και κατακόρυφα προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα $v_0=2\ m/s$, απομακρύνεται από το σημείο βολής σύμφωνα με την σχέση $y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 2t-5t^2$ (SI), όπου το α της γενικής έκφρασης του τριωνύμου έχει την τιμή $-5\ (m/s^2)$.




Σχήμα Ε4. Γραφική παράσταση παραβολής με τα κοίλα προς τα πάνω (α) και τα κοίλα προς τα κάτω (β).

Φαινόμενα τα οποία κατά την εξέλιξή τους παρουσιάζουν ασυμπτωτική συμπεριφορά, δηλαδή καθώς αυξάνεται η μεταβλητή x, η εξαρτημένη μεταβλητή y παίρνει τιμές, που όλο και πλησιάζουν μία σταθερή τιμή, περιγράφονται μέσω συνδυασμών της μαθηματικής συνάρτησης $e^{-x}$ (σχ. Ε5). Συνήθως οι τιμές του y καταλήγουν στο 0, αν ξεκινούν από κάποια μεγαλύτερη τιμή (εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση) ή σε κάποια μέγιστη τιμή αν ξεκινούν απ' το 0 (εκθετικά αύξουσα συ-




Σχήμα Ε5. Γραφική παράσταση που περιγράφει φαινόμενα «κορεσμού» ενός φυσικού μεγέθους ή φαινόμενα στα οποία το μέγεθος ελαττώνεται ασυμπτωτικά από μια αρχική τιμή $y_0$, προς μια σταθερή τιμή π.χ. προς το 0.

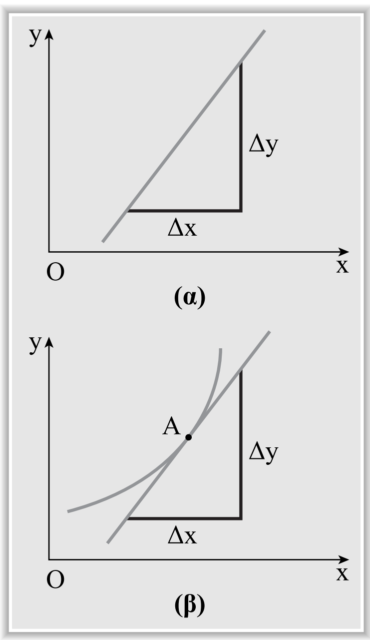
νάρτηση) Στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι το φαινόμενο παρουσιάζει *κορεσμό*. Π.χ. η τάση στους οπλισμούς ενός πυκνωτή που φορτίζεται από μια πηγή σταθερής ΗΕΔ.

Πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό μίας γραφικής παράστασης είναι η *κλίση* της σε κάθε σημείο της. Η κλίση παρέχει πληροφορία για την αργή ή γρήγορη θετική ή αρνητική εξέλιξη ενός μεγέθους σε συνάρτηση με άλλο. Αν η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή, η κλίση της είναι σ' όλα τα σημεία ίδια και προσδιορίζεται ως εξής: κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα πάνω στην ευθεία.

Έστω $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ τα μήκη των άλλων πλευρών (σχ. Ε6,α), αντίστοιχα προς τους άξονες x, y. Το πηλίκο

$$\kappa = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ορίζεται ως κλίση της ευθείας. Όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε, ο συντελεστής α, στην αλγεβρική μορφή της ευθείας ($y = \alpha x + \beta$), αντιπροσωπεύει την κλίση της ευθείας.




Σχήμα Ε6. Προσδιορισμός της κλίσης σε μια ευθεία (α) και στο σημείο Α μιας καμπύλης (β): $K_A = \Delta y / \Delta x$

Στην περίπτωση που η γραφική παράσταση είναι καμπύλη γραμμή σε κάθε σημείο αντιστοιχεί διαφορετική κλίση. Για να βρούμε την κλίση της σε ένα συγκεκριμένο σημείο, φέρουμε την αντίστοιχη εφαπτομένη ευθεία και στη συνέχεια βρίσκουμε την κλίση αυτής της ευθείας, όπως προηγουμένως (σχ. Ε6,β). Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι κάθε απειροστό τμήμα της καμπύλης δεν διαφέρει πρακτικά από ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Σε μία παραβολή 2$^{ου}$ βαθμού, η οποία παρουσιάζει μέγιστο, η κλίση ελαττώνεται από σημείο σε σημείο, καθώς το x αυξάνει και μάλιστα περνά από θετικές τιμές σε αρνητικές, στο x, που αντιστοιχεί στην κορυφή. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται ελάχιστο ισχύουν τα αντίστροφα. Όταν η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα x, η κλίση είναι 0.

Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης αποτελούν σημαντικότατα εργαλεία για την μελέτη των συναρτήσεων κατά γενικό τρόπο. Η παράγωγος αποτελεί την μαθηματική έκφραση της κλίσεως της συνάρτησης σε ένα σημείο της ενώ το ολοκλήρωμα, εκφράζει το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης του γραφήματος και του άξονα των x. Στα σημεία μεγίστου και ελαχίστου μιας συνάρτησης, η παράγωγος παίρνει τιμή μηδέν. Συνεπώς, αξιοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, στην περίπτωση των αναλυτικά εκφρασμένων συναρτήσεων, οι ρίζες της πρώτης παραγώγου προσδιορίζουν τα ακρότατα της συνάρτησης.

Με βάση τις παραπάνω γενικές παρατηρήσεις, μπορούμε να επεξεργαστούμε κάθε γραφική παράσταση και να συνάγουμε πολύ σημαντικά συμπεράσματα. Ιδιαίτερη σημασία έχουν διαγράμματα στα οποία, ως άξονα x, έχουμε τον χρόνο t. Η κλίση σ' αυτά παρέχει το ρυθμό εξέλιξης των μεγεθών που εξαρτώνται από τον χρόνο. Παραδείγματος χάριν, τα γραφήματα, της ταχύτητας δράσης ενός φαρμάκου σε ζωικό ή φυτικό οργανισμό, ή ο ρυθμός κυτταρικής αναπαραγωγής κ.α.

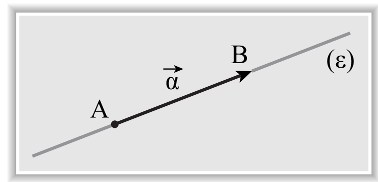
## ΙΙ. Ανύσματα

Μερικά από τα φυσικά μεγέθη απαιτούν για τον ορισμό τους μόνο το μέτρο του μεγέθους δηλαδή την αριθμητική τιμή και την μονάδα μέτρησής του. Ονομάζονται *μονόμετρα μεγέθη*. Π.χ. μάζα 10 kg ή θερμοκρασία 50 °C.

Άλλα φυσικά μεγέθη απαιτούν για τον πλήρη καθορισμό τους περισσότερα στοιχεία. Π.χ. η ταχύτητα ενός κινητού απαιτεί εκτός του μέτρου της και τον προσδιορισμό της *κατεύθυνσής* της, δηλαδή της *διεύθυνσης* και της *φοράς* κίνησης του κινητού. Τέτοια μεγέθη χαρακτηρίζονται ως *διανυσματικά* ή *ανυσματικά*.

*Ως άνυσμα ορίζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος σημείων.*

Παραδείγματος χάριν, το άνυσμα ΑΒ, στο σχήμα Ε7, προσδιορίζεται από τα σημεία Α και Β, με φορά από το Α προς Β. Συμβολίζουμε το άνυσμα με $\overrightarrow{AB}$ αλλά ο περισσότερο χρησιμοποιούμενος συμβολισμός είναι αυτός με ένα γράμμα και ένα βελάκι επάνω του, π.χ. $\vec{\alpha}$ (σχ. Ε7). Όταν θα αναφερόμαστε στο μέτρο του ανύσματος $\vec{\alpha}$, το $|\vec{\alpha}|$, θα χρησιμοποιούμε, για απλότητα, το ίδιο γράμμα ως σύμβολο, χωρίς το βελάκι δηλαδή $|\vec{\alpha}| = \alpha$.

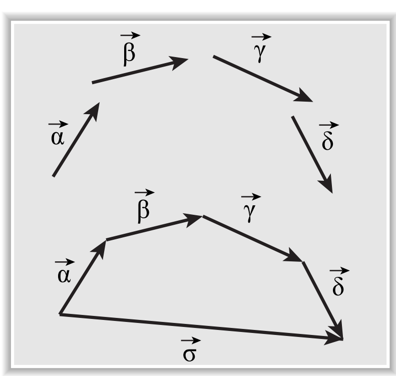



**Σχήμα Ε7**. Συμβολική παράσταση ανύσματος.

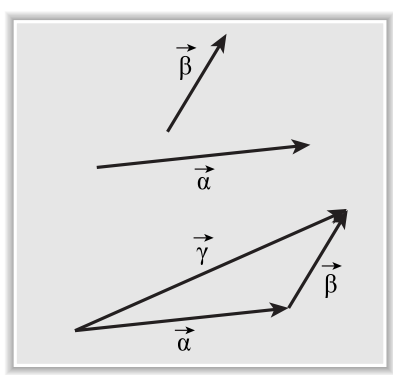
### Πράξεις στα ανύσματα

***i) Άθροισμα ανυσμάτων***

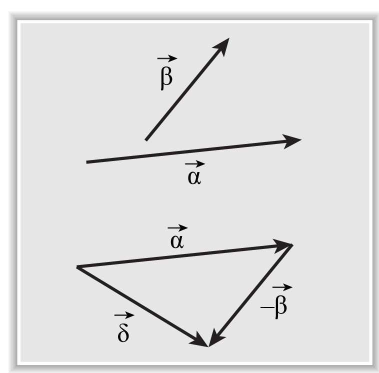
Για να προσθέσουμε ένα πλήθος ανυσμάτων ακολουθούμε την εξής απλή διαδικασία: με παράλληλη μεταφορά τα καθιστούμε διαδοχικά, δηλαδή η αρχή του επόμενου να ταυτίζεται με το πέρας του προηγούμενου. Ως συνισταμένη τους ορίζεται το άνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας, το πέρας του τελευταίου. Π.χ. η συνισταμένη $\vec{\sigma}$ για τα τέσσερα ανύσματα του σχ. Ε8, $\vec{\sigma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}$. Η πρόσθεση δύο ανυσμάτων γίνεται όπως στο σχ. Ε9α ενώ η διαφορά δύο ανυσμάτων δεν είναι τίποτα άλλο από την άθροιση του μειωτέου με τον αντίθετο του αφαιρετέου. Δηλαδή $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ (σχ. Ε9,β).



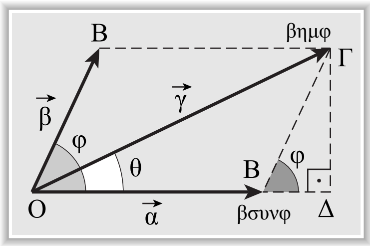

**Σχήμα Ε8**. Εφαρμογή του ορισμού του αθροίσματος ανυσμάτων.




**Σχήμα Ε9α**. Πρόσθεση δύο ανυσμάτων σύμφωνα με τον γενικό ορισμό του αθροίσματος ανυσμάτων.




**Σχήμα Ε9β**. Τρόπος αφαίρεσης δύο ανυσμάτων, με βάση τον ορισμό.




Σχήμα Ε10. Άθροιση δύο ανυσμάτων σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

**Κανόνας του παραλληλογράμμου**: Η πρόσθεση δύο ανυσμάτων μπορεί να γίνει ισοδύναμα με τον βασικό ορισμό, με ένα πιο πρακτικό τρόπο. Χωρίς να αλλάξουμε κατευθύνσεις στα δύο ανύσματα, τα μετατοπίζουμε παράλληλα ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή Ο (σχ. Ε10). Από τα πέρατα τους φέρουμε παραλλήλους προς τους φορείς των δύο ανυσμάτων οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Το άνυσμα $\vec{ΟΓ}=\vec{γ}$, είναι σύμφωνα με τον βασικό ορισμό, η συνισταμένη των δεδομένων ανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

Αναλυτικά, το μέτρο της είναι

$$γ = \sqrt{α^2 + β^2 + 2αβσυνφ}$$

και η γωνία κατεύθυνσής της θ, δίδεται από τη σχέση:

$$εφθ = \frac{φ \cdot ημφ}{α + β \cdot συνφ}$$

***ii) Γινόμενο ανυσμάτων***

Ορίζουμε δύο διαφορετικών τύπων γινόμενα:

α) *Εσωτερικό ή αριθμητικό γινόμενο*. Συμβολίζεται με $(\vec{α}\cdot\vec{β})$ ή πιο απλά $\vec{α}\cdot\vec{β}$, αφορά σε μονόμετρο μέγεθος και ορίζεται ως:

$$\vec{α}\cdot\vec{β} = α \cdot β \cdot συνφ$$

όπου φ η γωνία μεταξύ των δύο ανυσμάτων.

Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου είναι το έργο μιας δύναμης $\vec{F}$:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = F \cdot s \cdot συνφ$$

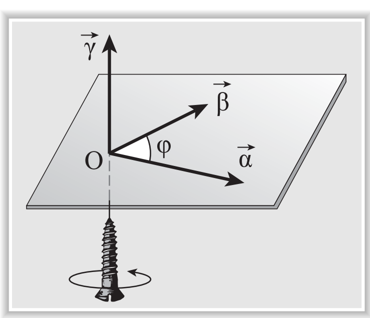
όπου $\vec{s}$ το άνυσμα που περιγράφει την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

β) *Εξωτερικό ή ανυσματικό γινόμενο*. Αφορά σε διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως:

$$\vec{γ} = \vec{α} \times \vec{β}$$

*Χαρακτηριστικά του ανύσματος $\vec{γ}$:*

- Το άνυσμα $\vec{γ}$ είναι κάθετο στα ανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$, δηλαδή στο επίπεδό τους και έχει μέτρο: $γ = α \cdot β \cdot ημφ$
- Η φορά του $\vec{γ}$ προσδιορίζεται είτε με τον κανόνα του δεξιού χεριού είτε με τον κανόνα της δεξιόστροφης βίδας (σχ. Ε11), κανόνες οικείοι, που δεν απαιτούν ιδιαίτερη ανάλυση.
  Στο εξωτερικό γινόμενο, η σειρά γραφής των ανυσμάτων, έχει συνέπεια στο πρόσημο του γινομένου: $\vec{α}\times\vec{β}=-\vec{β}\times\vec{α}$.




Σχήμα Ε11. Εξωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων. Διακρίνεται η δεξιόστροφη βίδα, η φορά μετακίνησης της οποίας προσδιορίζει την φορά του $\vec{γ}$, όταν περιστρέφεται το α ώστε να συμπέσει με το β (το πρώτο στο δεύτερο άνυσμα, όπως αυτά αναγράφονται στο εξωτερικό γινόμενο.

Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς ένα σημείο Ο (σχ. 1.10, Κεφάλαιο 1), είναι ένα άνυσμα που προκύπτει ως ανυσματικό γινόμενο του ανύσματος θέσης $\vec{r}$ της δύναμης, επί την δύναμη αυτή:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Το μέτρο του ανύσματος της ροπής είναι $M=rFημφ=F\cdot d$, όπου $d=rημφ$ η απόσταση του σημείου Ο από τον φορέα της δύναμης (σχ. 1.10).

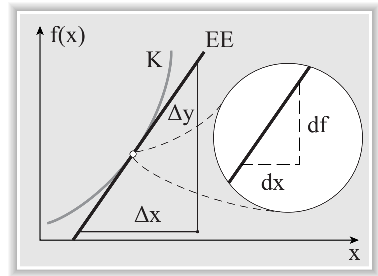
## III. Παράγωγος και ολοκλήρωση συνάρτησης

### Α. Παράγωγος συνάρτησης

***Ορισμός*[2] *(Σε χώρο μιας διάστασης)***

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$, σε μια συγκεκριμένη τιμή του x, είναι απλά, η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο αυτό της καμπύλης, που παριστά την συνάρτηση $f(x)$. Στην παράγραφο Ι, γνωρίσαμε την έννοια της κλίσης μιας ευθείας γραμμής καθώς και την κλίση μιας καμπύλης σ' ένα σημείο της. Μια μεταβολή dx της ανεξάρτητης μεταβλητής x, προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή της συνάρτησης κατά df. Το ορθογώνιο τρίγωνο, με πλευρές τα απειροστά τμήματα df και dx, είναι όμοιο με αυτό που σχηματίζομε για να υπολογίσουμε την κλίση της ευθείας (όσο γίνεται με μεγάλες πλευρές, προκειμένου να μετρηθούν με το μικρότερο σχετικό σφάλμα) που είναι εφαπτομένη στην καμπύλη, στο ίδιο σημείο. Η πλευρά $\Delta y$ του μεγάλου τριγώνου είναι η αντίστοιχη της πλευράς df του τριγώνου απειροστών διαστάσεων. Ομοίως η πλευρά $\Delta x$, της πλευράς dx. Συνεπώς, η κλίση της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο, που είναι η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό, προκύπτει, με βάση τους λόγους ομοιότητας των τριγώνων, ίση με

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \textit{κλίση της εφαπτομένης ευθείας, στο συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης.}$$




**Σχήμα Ε12.** Το ορθογώνιο τρίγωνο εντός του κύκλου, απειροστών διαστάσεων, που προσδιορίζει την μεταβολή της συνάρτησης σε μια απειροστή μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x, είναι όμοιο με το μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο, που προσδιορίζει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας ΕΕ, στο συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης Κ.

Με βάση τον ορισμό αυτό, προκύπτουν εύκολα τα αποτελέσματα του διπλανού πίνακα.

**Παράγωγος συνάρτησης**

| F(x) | F′(x) |
|---|---|
| α (ανεξ. x) | 0 |
| $\alpha\cdot f(x)$ | $\alpha\cdot f'(x)$ |
| $x^n$ | $n\cdot x^{n-1}$ |
| ημφ | συνφ |
| συνφ | −ημφ |
| $e^x$ | $e^x$ |

### Β. Ολοκλήρωση συνάρτησης

***Αόριστο ολοκλήρωμα***

Η αντίστροφη διαδικασία που οδηγεί, εν γένει, από την παράγωγο στην αρχική συνάρτηση, γίνεται με τη διαδικασία της ολοκλήρωσης. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης μιας συνάρτησης $f(x)$, είναι μια νέα συνάρτηση, την οποία ας συμβολίσουμε με $I_1(x)$, που προκύπτει από την δοσμένη, με βάση την επόμενη απαίτηση:

*«Η παράγωγος της $I_1(x)$ να ισούται με την ολοκληρωτέα $f(x)$»*

ή $$I_1'(x) = f(x)$$

Η συνάρτηση $I_1(x)$ ονομάζεται, γι' αυτό το λόγο, παράγουσα, επειδή απ' αυτήν παράγεται η ολοκληρωτέα. Επειδή, μάλιστα και η συνάρτηση $I_1(x)+C$, όπου C μια αυθαίρετη σταθερά, ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση ορισμού του ολοκληρώματος, είναι κι αυτή παράγουσα.

2. Στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος, περιορίζεται η παρουσίαση των εννοιών αυτών, κυρίως στην φυσική τους σημασία.

Το σύνολο των παραγουσών ή αρχικών συναρτήσεων ορίζεται ως αόριστο ολοκλήρωμα I(x), της f(x) και γράφεται συμβολικά ως εξής:

$$I(x) = \int f(x)dx + c$$

**Ολοκλήρωμα συνάρτησης**

| f(x) | Παράγουσα |
|---|---|
| 1 | x |
| $x^n$ | $x^n/(n+1)$ |
| ημφ | –συνφ |
| συνφ | ημφ |
| $e^x$ | $e^x$ |

Η μορφή αυτή δηλώνει ότι, μετά τον υπολογισμό της βασικής μαθηματικής έκφρασης της συγκεκριμένης παράγουσας, πρέπει να προσθέσουμε μια σταθερή (δηλαδή ποσότητα ανεξάρτητη της μεταβλητής x), η οποία και δηλώνει την αοριστία προσδιορισμού της παράγουσας. Συνεπώς, η ολοκλήρωση, ως μαθηματική πράξη, αποτελεί την **αντίστροφη διαδικασία** της παραγώγισης συνεχών συναρτήσεων, με τη διαφορά ότι αυτή η διαδικασία εμπεριέχει αοριστία, ως προς τον προσδιορισμό της αρχικής συνάρτησης. Π.χ. αν $f(x)=x$ τότε μια παράγουσά της είναι η $I_1(x)=x^2/2$, διότι η παραγώγιση της $I_1$ δίδει την αρχική f(x). Το ίδιο όμως συμβαίνει και με την παράγουσα $x^2/2+10$. Η παράγωγός της είναι πάλι $f'(x)=x$.

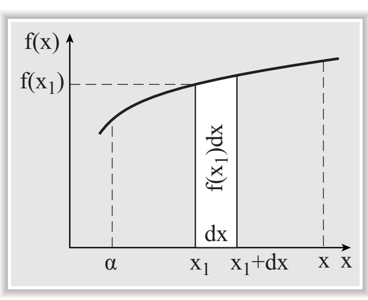
Στα φυσικά προβλήματα, η αοριστία αίρεται με χρήση των **αρχικών συνθηκών** ή των **οριακών συνθηκών**, του υπό εξέταση προβλήματος. Οι αρχικές συνθήκες αποτελούν δεδομένα του προβλήματος, που αναφέρονται στις τιμές των βασικών μεταβλητών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή (π.χ. η ταχύτητα ή η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t=0 s), ενώ οι οριακές συνθήκες αναφέρονται στις τιμές των βασικών μεγεθών σε δεδομένες θέσεις του χώρου εφαρμογής (π.χ. στην περίπτωση μιας παλλόμενης χορδής, στερεωμένης στα δύο της άκρα, τα σημεία αυτά, αποτελούν δεσμούς, δηλαδή θέσεις μηδενικής απομάκρυνσης των σημείων της χορδής).

### Φυσική σημασία του ολοκληρώματος

Το σύμβολο της ολοκλήρωσης $\int$, δεν είναι τίποτε άλλο παρά διαμορφωμένο, το αρχικό γράμμα S, της λέξης άθροισμα στην Ιταλική (Somma) ή Αγγλική (Sum) γλώσσα. Αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι, το ολοκλήρωμα είναι εξέλιξη της έννοιας της άθροισης, στην περίπτωση που οι αθροιζόμενες ποσότητες γίνονται απειροστές και το πλήθος τους άπειρο.

Για το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται επίσης ο συμβολισμός

$$I(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$




**Σχήμα Ε13.** Το γινόμενο f(x)dx, ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $f(x_1)$ και dx.

Με τη μορφή αυτή αναφερόμαστε στο εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης f(x) και του άξονα των x, από το σημείο α μέχρι το σημείο x (Σχήμα Ε13) και έχει την μορφή συνάρτησης του ορίου ολοκλήρωσης, x, όπου το όριο α παίζει το ρόλο της παραμέτρου ή της σταθεράς η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από της αρχικές συνθήκες του αντιστοίχου προβλήματος. Το $f(x_1)dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη f(x), μεταξύ $x_1$ και $x_1+dx$.

Αν στη θέση του x τεθεί ορισμένη τιμή, β, τότε προκύπτει το ορισμένο ολοκλήρωμα, μεταξύ α και β. Το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με τη διαφορά των τιμών του αορίστου στα δύο όρια:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = I(\beta) - I(\alpha)$$

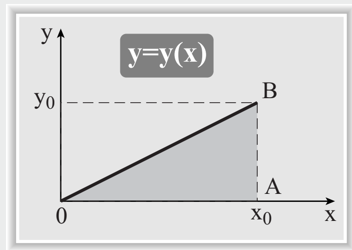
**Παράδειγμα**

*Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $y=\alpha x$ μεταξύ των σημείων 0 και $x_0$.*

**Λύση**

$$I(0, x_0) = \int_0^{x_0} y(x)dx = \alpha\int_0^{x_0} xdx = \alpha \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{x_0} = \frac{1}{2}\alpha x_0^2$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με το εμβαδόν $\left(= \frac{1}{2} y_0 x_0\right)$ του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του διπλανού σχήματος. Παραδείγματος χάρη, στην περίπτωση της δύναμης ελατηρίου που υπακούει στο νόμο του Hooke ($F=k\cdot\Delta l$), το εμβαδόν κάτω απ' την ευθεία $F=k\cdot\Delta l$, μέχρι το $\Delta l_0$, ισούται με το έργο της δύναμης αυτής, κατά την παραμόρφωση του αρχικού του μήκους (ελεύθερου), κατά $\Delta l_0$, δηλαδή $W=\frac{1}{2}k\cdot(\Delta l_0)^2$.




**Σχήμα Ε13.** Το γινόμενο f(x)dx, ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.

## Ασκήσεις

***Γραφικές παραστάσεις***

**1.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x+5$ σε ορθογώνιους άξονες. Πόση η κλίση της; Το σημείο (3, 8) ανήκει στην καμπύλη; Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x, ανάμεσα στα σημεία (1, 0) και (5, 0).

**2.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $y=x^2+5$ και να βρείτε γραφικά την κλίση της στα σημεία (0,5), (–1,6) και (1,6).

***Ανύσματα***

**1.** Οι πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου αποτελούν ανύσματα μέτρου α. Υπολογίστε το μέτρο του αθροίσματός τους. (Απ: 0 ή 2α)

**2.** Τρία ανύσματα ίδιου μέτρου α έχουν κοινή αρχή και οι φορείς τους σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες 120° ανά δύο. Πόσο είναι το μέτρο του αθροίσματός τους; (Απ: 0 ή 2α)

**3.** Δίδονται δύο ανύσματα α, β. Αθροίστε τα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Δείξτε ότι η διαφορά τους είναι η διαγώνια που δεν έχει κοινή αρχή με τα δοσμένα ανύσματα.

**4.** Δύο κάθετα μεταξύ τους ανύσματα έχουν μέτρα 3 και 5 (αυθαίρετες μονάδες). Να βρείτε τα χαρακτηριστικά του αθροίσματός τους, δηλαδή το μέτρο και την διεύθυνση του.

**5.** Δύο ανύσματα έχουν ίδιο μέτρο. Ποίο το εσωτερικό τους γινόμενο στις περιπτώσεις που τα δύο ανύσματα είναι
α) ομοπαράλληλα β) αντιπαράλληλα και γ) κάθετα μεταξύ τους.
Τα ίδια όπως στην άσκηση 5, όσον αφορά το εξωτερικό γινόμενο.

***Παραγώγιση - Ολοκλήρωση***

**1.** α) Υπολογίστε την παράγωγο συνάρτηση, της $f(x)=2x^2+3x+1$. β) Υπολογίστε την κλίση της δοσμένης συνάρτησης στο $x=0$. γ) Σε ποιο σημείο η κλίση της συνάρτησης αυτής, γίνεται μηδέν; Προσδιορίστε το ακρότατο (Μέγιστο – ελάχιστο).

**2.** Σχεδιάστε την συνάρτηση της παραγώγου, της συνάρτησης της άσκησης 1, σε διάγραμμα $f'(x)-x$.

**3.** α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=2x^2$.
β) Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα της ίδιας συνάρτησης, από $x_1=1$ έως $x_2=2$.

**4.** Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu 2\pi t$,
α) μέσα σε μια περίοδο
β) Μέσα στη μισή περίοδο.