$v^{T}Pv = min$

Α. ΔΕΡΜΑΝΗΣ
Α. ΦΩΤΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Πρόλογος

Κύριο χαρακτηριστικό του αντικειμένου του Τοπογράφου Μηχανικού είναι η πολυμορφία του, δεδομένου ότι αυτό καλύπτει ένα ευρύ φάσμα από διαφορετικές επιστήμες, επιστημονικές περιοχές και πεδία εφαρμογών. Κοινός παρονομαστής όλων αυτών των επιμέρους πεδίων είναι βέβαια η μελέτη του γήινου χώρου, αλλά και η κοινή μεθοδολογία για την επίτευξη των στόχων τους. Στη μεθοδολογία αυτή κυριαρχεί η συνόρθωση των διαθέσιμων παρατηρήσεων, με σκοπό την όσο το δυνατόν ακριβέστερη εκτίμηση των σχετικών αγνώστων παραμέτρων.

Δεν θα είναι ίσως υπερβολή να πει κανείς πως η εφαρμογή της συνόρθωσης είναι αυτή που διαχωρίζει την "επιστημονική" από την απλοϊκή εμπειρική προσέγγιση.

Στο βιβλίο "Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης" του πρώτου από τους συγγραφείς, δόθηκε έμφαση στο θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων συνόρθωσης, με στόχο την συγγραφή ενός βασικού συγγράμματος για το αντικείμενο. Η έκταση του αντικειμένου δεν επέτρεψε ούτε την πλήρη κάλυψή του, αλλά ούτε και την προσθήκη (στον 2ο τόμο) των απαραίτητων παραδειγμάτων που χρειάζονται για το πέρασμα από τη θεωρία στην πράξη.

Ύστερα από αρκετά χρόνια εμπειρίας από τη διδασκαλία του αντιστοίχου μαθήματος στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΑΠΘ, ιδίως από τον δεύτερο των συγγραφέων, σκεφθήκαμε πως είναι απαραίτητο ένα περισσότερο "εκπαιδευτικό" σύγγραμμα που θα συμπλήρωνε το ήδη υπάρχον βασικό σύγγραμμα "αναφοράς".

Αποτέλεσμα είναι αυτό εδώ το βιβλίο, όπου γίνεται προσπάθεια να επιτευχθούν τρείς στόχοι.

(α) Παράθεση όλων των πλατειά αποδεκτών μεθόδων συνόρθωσης, σε αλγοριθμική μορφή, χωρίς ανάπτυξη της θεωρητικής τους θεμελίωσης και απόδειξη των σχετικών τύπων.

(β) Εμπέδωση των μεθόδων με τη βοήθεια ενός μεγάλου αριθμού παραδειγμάτων, τα οποία καταλαμβάνουν και το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου. Τα παραδείγματα αυτά ποικίλλουν από τα περισσότερο "τεχνητά", που έχουν καθαρά εκπαιδευτικό χαρακτήρα, μέχρι τα "ρεαλιστικά" παραδείγματα που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες εφαρμογές.

(γ) Παράλληλα με την παραπάνω προσπάθεια εμπέδωσης του τρόπου εφαρμογής των μεθόδων, γίνεται και μία προσπάθεια για την κατανόηση του "πότε" εφαρμόζεται η κάθε μέθοδος, με βάση τα ιδιαίτερα φυσικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου προβλήματος εφαρμογής.

Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στα προβλήματα συνόρθωσης με έμφαση στην ενότητα των διαφόρων μεθόδων και τη σχέση τους με τα φυσικά χαρακτηριστικά του προβλήματος που καλούνται να επιλύσουν.

Τα κεφάλαια 2, 3 και 4 είναι αφιερωμένα στις τρείς βασικές μεθόδους συνόρθωσης (εξισώσεις παρατηρήσεων, εξισώσεις συνθηκών και μικτές εξισώσεις) που συνοδεύονται από αντίστοιχα παραδείγματα εφαρμογών.

Στο 5ο κεφάλαιο εξετάζεται η συνόρθωση με μοντέλα που περιλαμβάνουν και στοχαστικές παραμέτρους, τα οποία, αν και λιγότερο γνωστά, κερδίζουν συνεχώς έδαφος στις εφαρμογές.

Το 6ο κεφάλαιο αποτελεί προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος ανάμεσα στη βασική γνώση των μεθόδων και τα προβλήματα της εφαρμογής τους σε ρεαλιστικές συνθήκες, όπου ένας τεράστιος όγκος παρατηρήσεων πρέπει να αναλυθεί με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Είναι αλήθεια πως οι μέθοδοι συνόρθωσης θα "κατακτηθούν" τελικά από τον χρήστη τους, μέσα από την εφαρμογή τους σε κάποιο ιδιαίτερο επιστημονικό πεδίο. Όμως πολλές φορές οι ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης εφαρμογής επισκιάζουν τα βασικά θεμελιώδη χαρακτηριστικά της συνόρθωσης, με αποτέλεσμα να χάνεται η σύνδεση με το κυρίως σώμα της θεωρίας των συνορθώσεων. Έτσι περιορίζεται, τόσο η κατανόηση της ίδιας της μεθόδου συνόρθωσης, που κάθε φορά εφαρμόζεται, όσο και η δυνατότητα ορθής ερμηνείας και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από αυτή. Για το λόγο αυτό δίνουμε στο 7ο κεφάλαιο ένα πανόραμα των διαφόρων εφαρμογών των συνορθώσεων, όπου, αφήνοντας στην άκρη τις δευτερεύουσες λεπτομέρειες, προσπαθούμε να φωτίσουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά της κάθε εφαρμογής που είναι και τα πιό σημαντικά από τη σκοπιά της κοινής θεωρητικής προσέγγισης.

Ελπίζουμε πως το βιβλίο αυτό θα είναι χρήσιμο, όχι μόνο στους φοιτητές μας για τους οποίους κυρίως γράφτηκε, αλλά και σε όσους συναδέλφους από τον επαγγελματικό χώρο καταφέρνουν, παρά τις γνωστές αντιξοότητες της ελληνικής πραγματικότητας, να υπηρετούν την ιδιότητα του επιστήμονα που μαζί με το πτυχίο τους απέκτησαν.

Η συμβολή στη συγγραφή του βιβλίου αυτού, του συναδέλφου, συνεργάτη και φίλου Δημήτρη Ρωσσικόπουλου, είναι πολύ μεγαλύτερη από όσο οι οποιεσδήποτε ευχαριστίες θα μπορούσαν να εκφράσουν.

Αθανάσιος Δερμάνης   Αριστείδης Φωτίου

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 1992

Περιεχόμενα

1

Βασικές Έννοιες

1.1. Ανάλυση δεδομένων και συνόρθωση των παρατηρήσεων

Ο όρος συνόρθωση των παρατηρήσεων περιλαμβάνει ένα σύνολο από μεθόδους οι οποίες χρησιμοιούνται για την ανάλυση δεδομένων σε ορισμένες θετικές επιστήμες. Στις επιστήμες αυτές περιλαμβάνονται και οι εφαρμοσμένες επιστήμες που αποτελούν αντικείμενο του Τοπογράφου Μηχανικού, όπως η Γεωδαισία, η Τοπογραφία, η Φωτογραμμετρία, η Τηλεπισκόπηση και η Χαρτογραφία. Η εισαγωγή των μεθόδων για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων οφείλεται αρχικά σε μαθηματικούς, γεωδαίτες και αστρονόμους, όπως ο Gauss και ο Legendre. Η παραπέρα όμως εξέλιξή τους συνδέθηκε με την παράλληλη ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων και της μαθηματικής στατιστικής.

Για να κατανοήσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των μεθόδων συνόρθωσης, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε το ρόλο που παίζει η ανάλυση των δεδομένων στη θεωρητική ανάπτυξη, αλλά και στην καθημερινή εφαρμογή των διαφόρων επιστημών.

Σκοπός κάθε επιστήμης είναι η απόκτηση γνώσης σχετικά με ένα τμήμα του φυσικού κόσμου που μας περιβάλλει (στον οποίο περιλαμβάνονται και τα έμβια όντα και η ανθρώπινη κοινωνία), καθώς και η εφαρμογή των γνώσεων αυτών προς όφελος της ανθρωπότητας. Στην προσπάθεια να αποκτήσει τη γνώση αυτή ο επιστήμονας ερευνητής βασίζεται σε δύο εργαλεία: τη λογική και την παρατήρηση. Με το πείραμα και την παρατήρηση συλλέγονται δεδομένα με βάση τα οποία αναπτύσσεται μία λογική θεωρία σχετική με τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η φύση. Σήμερα η προσπάθεια αυτή έχει αποδώσει πολύ ικανοποιητικούς καρπούς στις επιστήμες που ασχολούνται με την άψυχη ύλη, ενώ ικανοποιητική μπορεί να θεωρηθεί και η γνώση που σχετίζεται με τη λειτουργία των ζωντανών οργανισμών. Αντίθετα, πολύ λιγότερα έχει πετύχει η επιστημονική μέθοδος στις λεγόμενες επιστήμες του ανθρώπου που αχολούνται με τις ανθρώπινες δραστηριότητες, όπως η κοινωνιολογία, η οικονομική, η πολιτική επιστήμη, κλπ. Κι αυτό γιατί τα φαινόμενα που εξετάζουν οι τελευταίες έχουν πολύ μεγαλύτερο βαθμό πολυπλοκότητας και αβεβαιότητας.

Πέρα όμως από την επιστήμη έρευνα υπάρχει και η καθημερινή επιστήμη των εφαρμογών, που ασχολείται με την πρακτική αξιοποίηση της ήδη αποκτημένης θεωρητικής γνώσης. Και στην περίπτωση αυτή τον κυρίαρχο ρόλο παίζει η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων.

Η μορφή των δεδομένων ποικίλλει από επιστήμη σε επιστήμη, ενώ οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση τους εξαρτώνται άμεσα από το επίπεδο της θεωρητικής γνώσης στον αντίστοιχο κλάδο. Έτσι τα δεδομένα μπορεί να είναι είτε οι γενικής μορφής διαπιστώσεις ενός ιστορικού, που μπορούν να περιγραφούν μόνο με τη βοήθεια μιας γλώσσας, είτε τα συμπτώματα μιας νόσου, είτε αριθμητικά δεδομένα, όπως οι τιμές του χρηματιστηρίου μια ορισμένη ημερομηνία ή η μετρημένη με laser απόσταση ανάμεσα σε ένα σημείο στη γη και σε ένα σημείο στη σελήνη σε μια ορισμένη χρονική στιγμή.

Οι μέθοδοι συνόρθωσης είναι μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων που χαρακτηρίζονται από δύο στοιχεία. Το πρώτο είναι ότι τα προς ανάλυση δεδομένα, οι παρατηρήσεις, είναι οι αριθμητικές τιμές μεγεθών που έχουν προκύψει από μετρήσεις. Το δεύτερο στοιχείο είναι η ύπαρξη μιας σαφούς θεωρίας σχετικής με την αλληλεπίδραση των μετρημένων μεγεθών, μεταξύ τους ή και με άλλα φυσικά μεγέθη. Η θεωρία αυτή μπορεί να διατυπωθεί με σαφήνεια, με τη βοήθεια μαθηματικών εξισώσεων που συνδέουν τα σχετικά μεγέθη, τις παραμέτρους του προβλήματος, όπως τα ονομάζουμε. Οι συνήθεις μέθοδοι συνόρθωσης με τις οποίες θα ασχοληθούμε εδώ, στηρίζονται στη χρήση απλών μόνο αλγεβρικών μαθηματικών εξισώσεων, οι οποίες δεν περιλαμβάνουν πιο πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες, όπως διαφορικές και ολοκληρωματικές εξισώσεις.

1.2. Τα βασικά χαρακτηριστικά μιας μεθόδου συνόρθωσης

Κάθε μέθοδος συνόρθωσης ξεκινά από ένα σύνολο εξισώσεων, το μαθηματικό μοντέλο, όπως τις ονομάζουμε, στις οποίες εμφανίζονται οι παράμετροι που έχουν παρατηρηθεί και ενδεχομένως και άλλες παράμετροι που δεν έχουν παρατηρηθεί (άγνωστες παράμετροι). Για τις παρατηρημένες παραμέτρους υπάρχει το σύνολο των αριθμητικών τιμών (παρατηρήσεις) που προέκυψαν από τις μετρήσεις.

Πρέπει να επισημανθεί ότι ο όρος παρατήρηση (ή ισοδύναμα ο όρος μέτρηση) αποδίδει δύο διαφορετικές έννοιες: η πρώτη είναι η διαδικασία της παρατήρησης και η δεύτερη το αριθμητικό αποτέλεσμα. Συνήθως όμως χρησιμοποιούμαι εδώ τον όρο μέτρηση για την διαδικασία και τό όρο παρατήρηση για την αριθμητική τιμή που προκύπτει από τη μέτρηση.

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά το πρόβλημα εμφανίζεται μάλλον απλό: αρκεί να αντικατασταθούν οι παρατηρημένες παράμετροι στις εξισώσεις του μοντέλου με τις τιμές παρατηρήσεων, ώστε να προκύψει ένα νέο σύνολο εξισώσεων που πρέπει να λυθεί. Ένα σύστημα εξισώσεων, όμως, έχει μια μοναδική λύση όταν ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων. Όταν οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους, υπάρχει απειρία λύσεων, ουσιαστικά δηλαδή αδυναμία προσδιορισμού των τιμών των αγνώστων. Αντίθετα, όταν οι εξισώσεις είναι περισσότερες από τους αγνώστους δεν υπάρχει καμία λύση στη γενική περίπτωση.

Ο αριθμός των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων. Στη συνόρθωση, δεν είναι δυνατό να υπάρξει εκ των προτέρων περιορισμός στον αριθμό των παρατηρήσεων. Αντίθετα όση περισσότερη πληροφορία είναι διαθέσιμη, τόσο το καλύτερο, επειδή ελέγχεται έτσι καλύτερα η επίδραση των σφαλμάτων. Επομένως έχουμε πάντοτε περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους και επομένως αδυναμία λύσης του συστήματος.

Ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση του προβλήματος είναι η οριακή περίπτωση, όπου οι αρχικές εξισώσεις του μοντέλου δεν περιέχουν άλλες άγνωστες παραμέτρους, εκτός από τις παραμέτρους που έχουν παρατηρηθεί. Η αντικατάσταση των παρατηρημένων παραμέτρων με οποιεσδήποτε αυθαίρετες τιμές θα οδηγούσε σε μη ικανοποίηση των εξισώσεων, σύμφωνα και με τη μαθηματική απαίτηση για αδυναμία λύσης, αφού οι εξισώσεις είναι περισσότερες από τον αριθμό (μηδέν!) των αγνώστων παραμέτρων. Θα περίμενε όμως κανείς να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις για τις συγκεκριμένες τιμές που προέκυψαν από τις παρατηρήσεις και επομένως κάθε άλλο παρά αυθαίρετες είναι. Στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει και ο λόγος είναι απλός: το μαθηματικό μοντέλο είναι ένα κατασκεύασμα της ανθρώπινης λογικής που αποτελεί μια απλοποιημένη, και επομένως όχι πιστή, εικόνα μιας πολύ πιο περίπλοκης φυσικής πραγματικότητας. Με την αντικατάσταση των παραμέτρων που παρατηρήθηκαν με τις τιμές που προέκυψαν από τις παρατηρήσεις, το μοντέλο έρχεται κατά κάποιο τρόπο σε σύγκρουση με την πραγματικότητα και φανερώνονται οι όποιες αδυναμίες του, μικρές ή μεγάλες.

Η μόνη διαφυγή από το "αδιέξοδο" είναι να αναγνωριστεί άμεσα ότι οι παρατηρούμενες παράμετροι του μοντέλου και οι αριθμητικές τιμές που δίνουν οι μετρήσεις δεν ταυτίζονται. Οι διαφορές αυτές ονομάζονται, κάπως αυθαίρετα, ***σφάλματα των παρατηρήσεων***, ενώ βέβαια στην πραγματικότητα οφείλονται σε κάποια "σφάλματα του μαθηματικού μοντέλου". Τα σφάλματα ορίζονται σαν οι διαφορές

σφάλμα παραμέτρου = παρατήρηση - παρατηρούμενη παράμετρος

όπου η επιλογή του προσήμου είναι αυθαίρετη (συμβατική). Θα μπορούσε δηλαδή να είχε χρησιμοποιηθεί και η αντίστροφη διαφορά.

Τα σφάλματα αποτελούν νέες πρόσθετες άγνωστες παραμέτρους, που θα εμφανιστούν αναγκαστικά στις εξισώσεις του μοντέλου, όπου κάθε παρατηρούμενη παράμετρος θα αντικατατάθεί πλέον όχι με την αντίστοιχη παρατήρηση αλλά με την παρατήρηση μείον το σφάλμα. Με το τρόπο όμως αυτό καταλήγουμε σε ένα συνολικό αριθμό αγνώστων παραμέτρων, που είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων και επομένως υπάρχουν άπειρες δυνατές λύσεις.

Η συνόρθωση, σε πρώτη φάση, δεν είναι παρά ένας τρόπος επιλογής μιας από τις άπειρες δυνατές λύσεις των εξισώσεων του μοντέλου. Τα όργανα των μετρήσεων έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε τα σφάλματα τους να είναι μικρά (στην πραγματικότητα: έτσι ώστε αυτό που μετρούν να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν καλύτερα στις αντίστοιχες παραμέτρους του μοντέλου). Έτσι από τις άπειρες δυνατές λύσεις, "λογικές", ή τέλος πάντων "αποδεκτές", είναι μόνο εκείνες λύσεις στις οποίες τα άγνωστα σφάλματα παίρνουν μικρές τιμές. Για να επιλεγεί μία από τις αποδεκτές αυτές λύσεις, πρέπει να οριστεί μία ποσότητα (κριτήριο βελτιστοποίησης της λύσης) που να σχετίζεται με τα σφάλματα και να μετρά συλλογικά με κάποιο τρόπο το μέγεθος τους. Η επιθυμητή μοναδική και "βέλτιστη" λύση είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την ποσότητα κριτήριο. Δύο πιθανές επιλογές είναι το άθροισμα των απολύτων τιμών των σφαλμάτων και η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ανάμεσα σε όλα τα σφάλματα. Η επιλογή όμως, που οδηγεί σε ευκολότερη λύση, από αλγοριθμική σκοπιά, είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων. Έτσι προκύπτει λοιπόν μία συγκεκριμμένη μέθοδος συνόρθωσης η ***μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων***. Στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα σύνολο μεθόδων που δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα αλλά διαφοροποιούνται, όπως θα δούμε, ανάλογα με ορισμένα χαρακτηριστικά του μαθηματικού μοντέλου.

Ο λόγος για τον οποίο επικράτησε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι ο εξής: η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης επιτυγχάνεται μαθηματικά με τον μηδενισμό των παραγώγων της, και το πλεονέκτημα μίας συνάρτησης 2ου βαθμού (τετράγωνα) είναι ότι έχει παραγώγους 1ου βαθμού, των οποίων ο μηδενισμός οδηγεί σε απλές γραμμικές εξισώσεις που είναι εύκολο να λυθούν.

Η παραπάνω προσέγγιση έχει ένα μειονέκτημα: αντιμετωπίζει όλα τα σφάλματα ομοιόμορφα, χωρίς να λαμβάνει υπόψη της τη δυνατότητα κάποιων παρατηρήσεων να έχουν στην πραγματικότητα μικρότερα σφάλματα απ' ότι άλλες, οπότε μία “καλύτερη” λύση θα έπρεπε να αντιστοιχίσει σε αυτές μικρότερα σφάλματα. Τις παρατηρήσεις με μικρότερα σφάλματα τις χαρακτηρίζουμε λέγοντας ότι έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια, και μία λύση που λαμβάνει υπόψη τις ακρίβειες είναι η ***μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων με βάρη.*** Η μέθοδος αυτή ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων πολλαπλασιασμένων με κάποια αντίστοιχα βάρη. Μεγαλύτερα βάρη επιβάλλουν μικρότερα (σε απόλυτη τιμή) σφάλματα, οπότε τα βάρη πρέπει να είναι κατά κάποιο τρόπο ανάλογα με την ακρίβεια των αντιστοίχων παρατηρήσεων.

Εξετάζοντας παραπάνω το πρόβλημα της συνόρθωσης με ένα τρόπο καθαρά “ντετερμινιστικό” (δηλαδή χωρίς προσφυγή στη θεωρία των πιθανοτήτων), καταλήγουμε σε ένα κρίσιμο πρόβλημα: Με ποιο τρόπο θα πρέπει να καθορίζονται τα βάρη; Και αφού θα πρέπει να είναι ανάλογα των ακριβειών με ποιο τρόπο θα πρέπει να προσδιορίζονται ποσοτικά οι ακρίβειες των μετρήσεων; Με αυτά τα αναπάντητα ερωτήματα η ντετερμινιστική προσέγγιση έχει φθάσει στα όριά της.

1.3. Ο ρόλος της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής Βέλτιστη εκτίμηση παραμέτρων

Για να λυθεί το πρόβλημα των βαρών στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (με βάρη), είναι απαραίτητη η λεπτομερέστερη μελέτη των σφαλμάτων, με στόχο και τον καθορισμό ενός κατάλληλου μέτρου της ακρίβειας των παρατηρήσεων. Αν μία μέτρηση επαναληφθεί, κάτω από συνθήκες που φαινομενικά είναι οι ίδιες ώστε να ισχύει το ίδιο μαθηματικό μοντέλο, οι τιμές που θα προκύψουν θα ποικίλλουν. Αυτή η αβεβαιότητα, η σχετική με τις τιμές των παρατηρήσεων, οδηγεί στη χρησιμοποίηση της θεωρίας των πιθανοτήτων για την περιγραφή της συμπεριφοράς τους. Αυτή η περιγραφή είναι δυνατή, όταν οι συχνότητες με τις οποίες εμφανίζονται διάφορες τιμές της παρατήρησης, αποκτούν κάποια κανονικότητα καθώς αυξάνει το πλήθος των επαναλήψεων, και φαίνονται να τείνουν σε κάποια όρια. Τα όρια αυτά οδηγούν σε ένα μαθηματικό μοντέλο περιγραφής των συχνοτήτων των τιμών "σε άπειρες επαναλήψεις". Στο μοντέλο αυτό οι οριακές συχνότητες αντικαθίστανται από τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων τιμών: όσο πιο συχνή είναι η εμφάνιση μιας συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής "σε πάρα πολλές επαναλήψεις" τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα εμφάνισης της ίδιας τιμής σε μία μοναδική επανάληψη.

Έτσι οι παρατηρήσεις θεωρούνται δειγματικές τιμές τυχαίων μεταβλητών, και ένα μέτρο της ακρίβειάς τους δίνεται από τη μεταβλητότητά τους: όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια. Επειδή η παρατήρηση είναι το άθροισμα της ντετερμινιστικής (όχι τυχαίας) παρατηρούμενης παραμέτρου, που εμφανίζεται στο μοντέλο, και του σφάλματος, οι παρατηρήσεις θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές μόνο επειδή τα σφάλματα μπορούν να θεωρηθούν τυχαίες μεταβλητές. Τα τυχαία αυτά σφάλματα αντανακλούν την τυχαία (δηλαδή απρόβλεπτη και αβέβαιη) απόκλιση της πραγματικότητας από την εξιδανικευμένη και απλοποιημένη συμπεριφορά που περιγράφει το μαθηματικό μοντέλο.

Για να αποτελέσει όμως η μεταβλητότητα ένα πραγματικό μέτρο της ακρίβειας είναι απαραίτητη ακόμη μία προϋπόθεση: η προσδοκία (θεωρητική μέση τιμή) της παρατήρησης να ταυτίζεται με την πραγματική τιμή της παρατηρούμενης ποσότητας. Πρέπει δηλαδή οι παρατηρήσεις να έχουν δειγματικές τιμές, των οποίων η διασπορά (η μεταβλητότητα είναι η θεωρητική διασπορά) να πραγματοποιείται γύρω από την πραγματική τιμή. Τα σφάλματα στην περίπτωση αυτή έχουν προσδοκία μηδέν και ο όρος ***τυχαίο σφάλμα*** σημαίνει ότι το σφάλμα μιας παρατήρησης είναι τυχαία μεταβλητή με μηδενική προσδοκία.

Όταν δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, η διαφορά ανάμεσα στην προσδοκία της παρατήρησης και την πραγματική τιμή της παρατηρούμενης παραμέτρου αποτελεί ένα πρόσθετο σφάλμα, το οποίο ονομάζεται ***συστηματικό σφάλμα***. Ο όρος αυτός αντανακλά το γεγονός ότι το σφάλμα αυτό εμφανίζεται συστηματικά το ίδιο σε κάθε επανάληψη της παρατήρησης, σε αντίθεση με το τυχαίο σφάλμα, το οποίο μεταβάλλεται από παρατήρηση σε παρατήρηση, όντας άλλοτε θετικό και άλλοτε αρνητικό, άλλοτε μεγαλύτερο και άλλοτε μικρότερο, έτσι ώστε να ακολουθεί μία κατανομή με μηδενική προσδοκία.

Για την εκτέλεση της συνόρθωσης υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις είναι απαλλαγμένες από συστηματικά, καθώς και από τα διάφορα ***χονδροειδή σφάλματα***. Αν δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο πρέπει να εντοπιστούν και να απομακρυνθούν οι παρατηρήσεις με χονδροειδή σφάλματα ή και να βελτιωθεί το μαθηματικό μοντέλο, ώστε να ανταποκρίνεται καλύτερα στην πραγματικότητα, και να απομακρυνθούν έτσι τα συστηματικά σφάλματα. Ας σημειωθεί ότι η συνόρθωση παρέχει, όπως θα δούμε, τα μέσα και για τον εντοπισμό χονδροειδών ή συστηματικών σφαλμάτων.

Με τη βοήθεια της υπόθεσης ότι τα σφάλματα είναι τυχαία μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα της επιλογής των βαρών. Όμως η λύση αυτού του προβλήματος δεν είναι παρά ένα έμμεσο αποτέλεσμα της λύσης ενός νέου προβλήματος που διαμορφώνεται στα πλαίσια της στοχαστικής (πιθανοτιστικής) προσέγγισης στο πρόβλημα της συνόρθωσης: τον προσδιορισμό ***βέλτιστων εκτιμήσεων*** των αγνώστων παραμέτρων. Το πρόβλημα αυτό αντικαθιστά το ντετερμινιστικό πρόβλημα του προσδιορισμού μιας λύσης με όσο το δυνατόν μικρότερα σφάλματα, σύμφωνα με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων με βάρη.

Για τη διατύπωση του νέου προβλήματος παρατηρούμε ότι κάθε εκτίμηση μιας άγνωστης παραμέτρου δεν μπορεί παρά να υπολογιστεί με βάση τη μόνη διαθέσιμη πληροφορία, δηλαδή τις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Ο όρος άγνωστη παράμετρος περιλαμβάνει εδώ κάθε ντετερμινιστική παράμετρο, όπως οι πραγματικές τιμές των παρατηρούμενων παραμέτρων, οι μη παρατηρούμενες παράμετροι που εμφανίζονται στο μαθηματικό μοντέλο (αυτές που συνήθως αποκαλούμε αγνώστους), αλλά και κάθε άλλη παράμετρος που δεν εμφανίζεται στο μοντέλο, όμως σχετίζεται με τις υπόλοιπες παραμέτρους. Κάθε εκτίμηση, λοιπόν, μιας παραμέτρου είναι μία συνάρτηση των παρατηρήσεων, και το πρόβλημα είναι πώς θα επιλεγεί η ***βέλτιστη*** (καλύτερη δυνατή) συνάρτηση. Για να πραγματοποιηθεί η επιλογή αυτή είναι απαραίτητο να δοθεί ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο στον μέχρι στιγμής ασαφή όρο ***βέλτιστη εκτίμηση***. Εφόσον οι παρατηρήσεις είναι τυχαίες μεταβλητές, το ίδιο θα συμβαίνει και για την εκτίμηση μιας παραμέτρου που είναι συνάρτηση των παρατηρήσεων.

Κάθε παρατήρηση έχει προσδοκία την πραγματική τιμή της παρατηρούμενης παραμέτρου, πράγμα που επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί η μεταβλητότητά της σαν μέτρο της ακρίβειάς της. Είναι φυσικό να απαιτήσουμε την ίδια ιδιότητα από την εκτίμηση, οπότε θα μπορεί η μεταβλητότητά της να χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο ακρίβειας. Η εκτίμηση μιας παραμέτρου, της οποίας η προσδοκία ταυτίζεται με την πραγματική τιμή της παραμέτρου, ονομάζεται ***ανεπηρέαστη εκτίμηση***. Ο όρος αυτός σημαίνει ότι η εκτίμηση είναι απαλλαγμένη από μία συστηματική παρέκκλιση. Αν επαναληφθούν οι μετρήσεις θα προκύψουν διαφορετικές τιμές των παρατηρήσεων, και από αυτές θα υπολογιστεί μία διαφορετική εκτίμηση της παραμέτρου. Όταν η εκτίμηση είναι ανεπηρέαστη, τότε διαφορετικές τιμές της εκτίμησης που προκύπτουν από επαναλήψεις των μετρήσεων έχουν μέση τιμή, η οποία τείνει προς την πραγματική τιμή καθώς το πλήθος των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο. Η διασπορά δηλαδή των εκτιμήσεων πραγματοποιείται γύρω από την αντίστοιχη πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Όταν έχει επιλεγεί μία συνάρτηση για τον υπολογισμό της εκτίμησης, με βάση τις παρατηρήσεις, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων και να υπολογιστεί από τις μεταβλητότητες των παρατηρήσεων και η μεταβλητότητα της εκτίμησης. Η ακρίβεια της εκτίμησης, εφόσον βέβαια αυτή είναι ανεπηρέαστη, είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητά της. Είναι, λοιπόν, φυσικό να θεωρήσουμε ότι βέλτιστη εκτίμηση είναι η εκτίμηση με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, δηλαδή εκείνη που είναι ανεπηρέαστη και έχει την ελάχιστη δυνατή μεταβλητότητα. Η ανεπηρέαστη εκτίμηση με ελάχιστη μεταβλητότητα (δηλαδή ουσιαστικά η εκτίμηση με τη μεγαλύτερη ακρίβεια) ονομάζεται ***βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση***.

Το πρόβλημα της βέλτιστης ανεπηρέαστης εκτίμησης μιας παραμέτρου είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης των παρατηρήσεων που οδηγεί σε ανεπηρέαστη εκτίμηση με ελάχιστη μεταβλητότητα. Πρέπει δηλαδή ανάμεσα σε όλες τις δυνατές συναρτήσεις να προσδιοριστούν πρώτα αυτές οι οποίες οδηγούν σε ανεπηρέστες εκτιμήσεις, και από το περιορισμένο σχετικά αυτό σύνολο να εντοπιστεί η συνάρτηση εκείνη που οδηγεί σε εκτίμηση με την ελάχιστη μεταβλητότητα. Η απευθείας επίλυση του προβλήματος αυτού δεν είναι δυνατή στη γενική περίπτωση, επειδή το σύνολο όλων των δυνατών συναρτήσεων είναι πολύ μεγάλο και είναι αδύνατο να περιγραφεί με ένα μαθηματικό μοντέλο. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητος ένας συμβιβασμός: αντί για το σύνολο όλων των συναρτήσεων περιοριζόμαστε στις ***γραμμικές*** συναρτήσεις, δηλαδή στις εκτιμήσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων. Το πρόβλημα του προσδιορισμού της βέλτιστης γραμμικής συνάρτησης αντικαθίσταται από το ισοδύναμο πρόβλημα του προσδιορισμού των βέλτιστων τιμών των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού.

Έτσι στη θέση της βέλτιστης ανεπηρέαστης εκτίμησης έχουμε μία ***βέλτιστη γραμμική ανεπηρέαστη εκτίμηση*** (BLUE = Best Linear Unbiased Estimation). Η βέλτιστη γραμμική ανεπηρέαστη εκτίμηση έχει γενικά μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση, και επομένως είναι λιγότερο ικανοποιητική. Όμως οι δύο εκτιμήσεις ταυτίζονται όταν ισχύει η επιπρόσθετη υπόθεση ότι τα τυχαία σφάλματα, και επομένως και οι παρατηρήσεις, ακολουθούν την κανονική κατανομή (κατανομή του Gauss).

Η λύση του προβλήματος της βέλτιστης ανεπηρέαστης εκτίμησης δίνει τις ίδιες τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους, όπως και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων με βάρη, αρκεί τα βάρη να είναι αντίστροφα των μεταβλητοτήτων ή, γενικότερα, ο πίνακας των βαρών να είναι ο αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητότητας των σφαλμάτων. Έτσι έχει λυθεί, με έναν έμμεσο τρόπο, και το πρόβλημα της επιλογής των βαρών στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με βάρη.

1.4. Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

Η ύπαρξη διαφορετικών επιμέρους μεθόδων για τη συνόρθωση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που όλες τους ακολουθούν το κριτήριο της βέλτιστης ανεπηρέαστης γραμμικής εκτίμησης, οφείλεται στη δυνατότητα να πάρει το μαθηματικό μοντέλο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες μορφές. Έτσι όλες οι επιμέρους μέθοδοι δίνουν ουσιαστικά ταυτόσημα αποτελέσματα. Οι πολύ μικρές διαφορές, που μπορεί να εμφανιστούν, οφείλονται στα διαφορετικά υπολογιστικά σφάλματα (σφάλματα στρογγύλευσης), καθώς και στα διαφορετικά σφάλματα της γραμμικοποίησης της διαφορετικής μορφής του μοντέλου. Η γραμμικοποίηση αυτή είναι απαραίτητη, όπως θα δούμε, για την εφαρμογή του κάθε επιμέρους αλγορίθμου συνόρθωσης.

Γιατί όμως υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές εξισώσεις μαθηματικού μοντέλου, και πώς συνδέονται μεταξύ τους οι διάφορες δυνατές επιλογές; Καταρχήν πρέπει να υπάρξει διάκριση ανάμεσα στο ειδικότερο μαθηματικό μοντέλο και στο γενικότερο μοντέλο, που είναι το σύνολο των υποθέσεων των σχετικών με το τμήμα της φυσικής πραγματικότητας το οποίο σκοπεύουμε να μελετήσουμε αξιοποιώντας τις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Το μαθηματικό μοντέλο της συνόρθωσης είναι ένας από όλους τους δυνατούς τρόπους περιγραφής με εξισώσεις, του ίδιου πάντα γενικού μοντέλου. Το γενικό μοντέλο περιλαμβάνει το σύνολο των υποθέσεων σχετικά με το φυσικό μοντέλο, όπως πχ. οι νόμοι του Νεύτωνα και η Ευκλείδεια γεωμετρία, καθώς και τα στοιχεία περιγραφής του φυσικού συστήματος που θέλουμε να μελετήσουμε.

Ο όρος ***φυσικό σύστημα*** αναφέρεται σε ένα τμήμα του φυσικού κόσμου, που θεωρούμε ότι μπορεί να μελετηθεί αγνοώντας την εξάρτησή του από την εξωτερική του πραγματικότητα. Το φυσικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο παραμέτρων, άπειρων συνήθως σε αριθμό, οι οποίες όμως αλληλοσυνδέονται με εξισώσεις που πηγάζουν από το σύνολο των υποθέσεων του αντίστοιχου γενικού μοντέλου. Στις παραμέτρους του μοντέλου συμπεριλαμβάνονται *αυτονόητα* και οι παρατηρούμενες παράμετροι. Από μία άλλη σκοπιά, οι παράμετροι του φυσικού συστήματος δεν είναι άλλες από το σύνολο των παραμέτρων που μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των παρατηρούμενων παραμέτρων, όλες δηλαδή οι παράμετροι που θα μπορούσαν να αναγνωριστούν και να προσδιοριστούν αν ήταν γνωστές οι πραγματικές τιμές των παρατηρούμενων παραμέτρων (αν δεν υπήρχαν δηλαδή τα σφάλματα των μετρήσεων). Έτσι οι παρατηρούμενες παράμετροι αποτελούν ένα σύνολο παραμέτρων περιγραφής του φυσικού συστήματος. Γενικότερα, ένα σύνολο παραμέτρων του φυσικού συστήματος ονομάζονται ***παράμετροι περιγραφής*** (του συστήματος), όταν κάθε άλλη παράμετρος μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση των παραμέτρων αυτών.

Ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό κάθε φυσικού συστήματος είναι ο ελάχιστος δυνατός αριθμός παραμέτρων σε ένα σύνολο παραμέτρων περιγραφής. Ο ελάχιστος αυτός αριθμός ονομάζεται ***παραμετρικός βαθμός*** του φυσικού συστήματος. Οι παράμετροι ενός σύνολου περιγραφής με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό παραμέτρων, ίσο δηλαδή με τον παραμετρικό βαθμό, ονομάζονται ***θεμελιώδεις παράμετροι περιγραφής***.

Το μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για τη συνόρθωση περιλαμβάνει οπωσδήποτε τις προφανείς σχέσεις που συνδέουν τις γνωστές παρατηρήσεις $\mathbf{y}^b$ με τις άγνωστες παρατηρούμενες παραμέτρους $\mathbf{y}^\alpha$ και τα άγνωστα σφάλματα $\mathbf{v}$

(1) $$\mathbf{y}^b = \mathbf{y}^\alpha + \mathbf{v} \quad ,$$

καθώς και έναν αριθμό ***ανεξάρτητων*** μαθηματικών εξισώσεων που συνδέουν τις παρατηρούμενες παραμέτρους και (ενδεχομένως) κάποιες άλλες άγνωστες παραμέτρους $\mathbf{x}^\alpha$ του φυσικού συστήματος

(2) $$\mathbf{F}(\mathbf{y}^\alpha,\mathbf{x}^\alpha) = \mathbf{0} \quad .$$

Το πλήθος s των εξισώσεων στη σχέση (2) δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο, αλλά πρέπει να συνδέεται με το πλήθος n των παρατηρούμενων παραμέτρων $\mathbf{y}^\alpha$ (πλήθος των διαθέσιμων παρατηρήσεων), με το πλήθος m των αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{x}^\alpha$, και με τον παραμετρικό βαθμό r του φυσικού συστήματος. Εφόσον το φυσικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί με r παραμέτρους, ενώ στο μοντέλο (2) εμφανίζεται ένας αριθμός n+m αγνώστων, το μοντέλο θα πρέπει να περιλαμβάνει τόσες εξισώσεις (δεσμεύσεις) όσες και οι πλεονάζουσες άγνωστες παράμετροι, να ισχύει δηλαδή η σχέση

(3) $$s = n + m \quad r \quad .$$

Στη σχέση αυτή, n είναι το πλήθος των διαθέσιμων παρατηρήσεων και r ο παραμετρικός βαθμός του φυσικού συστήματος. Η μόνη δυνατή επιλογή είναι εκείνη του πλήθους m των επιπλέον (μη παρατηρούμενων) αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$, από τις οποίες θα προκύψει και ο αριθμός s των εξισώσεων του μοντέλου $\mathbf{F}(\mathbf{y}^{\alpha},\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$.

Οι ***βαθμοί ελευθερίας*** σε ένα πρόβλημα συνόρθωσης είναι η διαφορά

(4) $$f = n \quad r$$

ανάμεσα στο πλήθος των παρατηρήσεων n και τον παραμετρικό βαθμό r του φυσικού συστήματος.

Ανάλογα με τον αριθμό m των αγνώστων παραμέτρων και τη γενική μορφή των εξισώσεων $\mathbf{F}(\mathbf{y}^{\alpha},\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$ του μοντέλου, προκύπτουν οι παρακάτω επιμέρους μέθοδοι συνόρθωσης:

εξισώσεις παρατηρήσεων:

$m = r$ $\qquad$ $s = n$ $\qquad$ $\mathbf{y}^{\alpha} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

εξισώσεις συνθηκών:

$m = 0$ $\qquad$ $s = n \ \ r$ $\qquad$ $\mathbf{g}(\mathbf{y}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

μικτές εξισώσεις:

$0 < m \quad r$ $\qquad$ $n \quad r < s = n+m \quad r \quad n$ $\qquad$ $\mathbf{F}(\mathbf{y}^{\alpha},\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

εξισώσεις παρατηρήσεων με ὂ δεσμεύσεις:

$r+k = m$ $\qquad$ $s = n+k$ $\qquad$ $\mathbf{y}^{\alpha} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

μικτές εξισώσεις με ὂ δεσμεύσεις:

$k < m \quad r+k$ $\qquad$ $n+k \ \ r < s = n+m \ \ r \quad n+k$ $\qquad$ $\mathbf{F}(\mathbf{y}^{\alpha},\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

Στις εξισώσεις παρατηρήσεων οι άγνωστες παράμετροι $\mathbf{x}^{\alpha}$ είναι θεμελιώδεις παράμετροι περιγραφής του φυσικού συστήματος. Στις εξισώσεις παρατηρήσεων με δεσμεύσεις καθώς και στις μικτές εξισώσεις με δεσμεύσεις, οι άγνωστες παράμετροι $\mathbf{x}^{\alpha}$ δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπως συμβαίνει στις αντίστοιχες μεθόδους χωρίς δεσμεύσεις. Από τις m παραμέτρους $\mathbf{x}^{\alpha}$, οι τιμές των k από αυτές είναι καθορισμένες όταν είναι γνωστές οι τιμές των υπολοίπων m k. Για το λόγο αυτό συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο οι k δεσμεύσεις $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$, ώστε να αυξηθεί το πλήθος των εξισώσεων κατά k, όση και η αντίστοιχη αύξηση του αριθμού των παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$ από m k ανεξάρτητες σε m εξαρτημένες.

Τα διαφορετικά μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τις παραπάνω επιμέρους μεθόδους, σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα συνόρθωσης, πηγάζουν από το ίδιο γενικό μοντέλο και είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Η ισοδυναμία αυτή εκφράζεται μαθηματικά από τη δυνατότητα κάθε επιμέρους μοντέλου να προκύψει από το άλλο με τη βοήθεια στοιχειωδών μαθηματικών διαδικασιών, όπως:

αντικατάσταση ορισμένων αγνώστων παραμέτρων από τις σχέσεις που τις εκφράζουν ως συναρτήσεις ενός ίσου αριθμού νέων αγνώστων παραμέτρων.

απαλοιφή μιας άγνωστης παραμέτρου και μιας εξίσωσης (μία από τις εξισώσεις επιλύεται ως προς μία παράμετρο και η παράμετρος αυτή αντικαθίσταται στις υπόλοιπες εξισώσεις από τη σχέση που προέκυψε).

προσθήκη μιας νέας άγνωστης παραμέτρου και μίας εξίσωσης (αντίστροφη της προηγούμενης διαδικασίας).

Έτσι, εξισώσεις συνθηκών μπορούν να προκύψουν αν απαλοιφούν από τις εξισώσεις παρατηρήσεων όλες οι άγνωστες παράμετροι. Αν απαλοιφούν ορισμένες μόνο από τις παραμέτρους προκύπτουν μικτές εξισώσεις. Αν οι δεσμεύσεις επιλυθούν ως προς k από τις άγνωστες παραμέτρους, και αν οι παράμετροι αυτές αντικατασταθούν στις υπόλοιπες εξισώσεις από τις σχέσεις που προκύπτουν, είναι δυνατόν να μετατραπούν οι εξισώσεις παρατηρήσεων με δεσμεύσεις σε απλές εξισώσεις παρατηρήσεων. Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να μετατραπούν και οι μικτές εξισώσεις με δεσμεύσεις σε απλές μικτές εξισώσεις.

Σκοπός της συνόρθωσης είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης γραμμικής ανεπηρέαστης εκτίμησης $\hat{q}$ οποιασδήποτε παραμέτρου $q = q(\mathbf{y}^{\alpha})$ του φυσικού συστήματος. Αυτό επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας πρώτα τις εκτιμήσεις $\hat{\mathbf{x}}^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{y}}^{\alpha}$ των $\mathbf{x}^{\alpha}$, $\mathbf{y}^{\alpha}$, αντίστοιχα, από τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί κάθε άλλη εκτίμηση $\hat{q}$, δεδομένου ότι για κάθε παράμετρο q είναι γνωστή η σχέση της με τις παραμέτρους του μοντέλου. Η παράμετρος αυτή έχει μία από τις εξής τρείς δυνατές μορφές:

(5) $$q = q(\mathbf{y}^{\alpha}) \,, \qquad q = q(\mathbf{x}^{\alpha}) \,, \qquad q = q(\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{y}^{\alpha}) \,.$$

Μία διαφορετική ομάδα μοντέλων προκύπτει όταν χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητες άγνωστες παράμετροι $\mathbf{x}^{\alpha}$, οι οποίες δεν είναι παράμετροι του φυσικού συστήματος και επομένως δεν θα ήταν δυνατόν να προσδιοριστούν, ακόμη και αν οι τιμές των παρατηρούμενων παραμέτρων $\mathbf{y}^{\alpha}$ ήταν γνωστές. Τα μοντέλα αυτά ονομάζονται ***μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό***, για λόγους που σχετίζονται με το βαθμό των συντελεστών πινάκων στη γραμμικοποιημένη μορφή των μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά δεν είναι "ορθά διατυπωμένα", και η χρήση τους θα έπρεπε κανονικά να αποφεύγεται. Όμως η χρήση τους είναι ορισμένες φορές επιβεβλημένη σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση ο αρχικός στόχος ήταν η μελέτη ενός φυσικού συστήματος στο οποίο ανήκουν οι παράμετροι $\mathbf{x}^{\alpha}$, και γι' αυτό επιλέχθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιέχει και τις παραμέτρους αυτές. Αδυναμίες όμως στο σχεδιασμό ή στην εκτέλεση των μετρήσεων οδήγησαν σε παρατηρήσεις παραμέτρων $\mathbf{y}^{\alpha}$, οι οποίες δεν "καλύπτουν" το φυσικό σύστημα στόχο, αλλά μόνο ένα μέρος του. Έτσι το σύνολο των συναρτήσεων των $\mathbf{y}^{\alpha}$ αποτελούν τις παραμέτρους ενός μικρότερου φυσικού συστήματος που περιέχεται στο αρχικό.

Η δεύτερη περίπτωση έχει αμεσότερη σχέση με τις εφαρμογές στις επιστήμες του Τοπογράφου Μηχανικού. Παρά το γεγονός ότι στόχος είναι, πράγματι, η μελέτη του φυσικού συστήματος που καλύπτουν οι παρατηρημένες παράμετροι $\mathbf{y}^{\alpha}$, η διαμόρφωση εξισώσεων του μοντέλου δεν είναι πρακτικά εύκολη όταν χρησιμοποιηθούν μόνο παράμετροι του συστήματος. Αντίθετα, η διαμόρφωση των εξισώσεων του μοντέλου είναι πολύ εύκολη αν εισαχθούν παράμετροι $\mathbf{x}^{\alpha}$ οι οποίες δεν ανήκουν στο αρχικό φυσικό σύστημα, αλλά σε ένα διευρυμένο φυσικό σύστημα που περιέχει το αρχικό (με την έννοια ότι κάθε παράμετρος του αρχικού συστήματος είναι αυτόματα και παράμετρος του διευρυμένου). Έτσι το μοντέλο χωρίς πλήρη βαθμό, αν και θεωρητικά ακατάλληλο, χρησιμοποιείται γιατί πλεονεκτεί από αλγοριθμική σκοπιά.

Φυσικά δεν είναι δυνατή η εκτίμηση των $\mathbf{x}^{\alpha}$ (και όσων παραμέτρων q ανήκουν στο διευρυμένο φυσικό σύστημα αλλά όχι όμως και στο αρχικό), με βάση μόνο τις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται το εξής τέχνασμα: Αν r είναι ο παραμετρικός βαθμός του αρχικού φυσικού συστήματος και r+k ο αντίστοιχος του διευρυμένου, εισάγονται επιπλέον στο μοντέλο k κατάλληλες αυθαίρετες δεσμεύσεις $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$, οι οποίες ονομάζονται ***ελάχιστες δεσμεύσεις***. Οι ελάχιστες δεσμεύσεις εισάγουν πληροφορία, η οποία θα επέτρεπε τον προσδιορισμό όλων των παραμέτρων του διευρυμένου συστήματος αν ήταν γνωστές οι τιμές των παρατηρούμενων παραμέτρων $\mathbf{y}^{\alpha}$. Οι τιμές όμως, που θα προέκυπταν για τις παραμέτρους που δεν ανήκουν και στο αρχικό σύστημα, θα ήταν εντελώς αυθαίρετες. Αντίθετα οι τιμές των παραμέτρων του αρχικού συστήματος, που θα μπορούσαν να προσδιοριστούν και χωρίς την εισαγωγή των δεσμεύσεων, δεν επηρεάζονται καθόλου από αυτές. Στην πραγματικότητα βέβαια οι τιμές των $\mathbf{y}^{\alpha}$ είναι άγνωστες, και οι ελάχιστες δεσμεύσεις επιτρέπουν την εκτίμηση και των παραμέτρων $\mathbf{x}^{\alpha}$.

Οι παράμετροι $q = q(\mathbf{x}^{\alpha})$ ή $q = q(\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{y}^{\alpha})$ του διευρυμένου μοντέλου χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: στις ***εκτιμήσιμες παραμέτρους***, που ανήκουν και στο αρχικό σύστημα, και στις ***μη εκτιμήσιμες*** που ανήκουν μόνο στο διευρυμένο. Οι εκτιμήσεις $\hat{\mathbf{x}}^{\alpha}$ και οι $\hat{q} = q(\hat{\mathbf{x}}^{\alpha})$ ή $\hat{q} = q(\hat{\mathbf{x}}^{\alpha}, \hat{\mathbf{y}}^{\alpha})$ μπορούν πάντοτε να υπολογιστούν, αλλά έχουν νόημα μόνον όταν η αντίστοιχη παράμετρος q είναι εκτιμήσιμη, οπότε και είναι ανεξάρτητες από την όποια επιλογή ελαχίστων δεσμεύσεων. Διαφορετικά η εκτίμηση $\hat{q}$ είναι διαφορετική για κάθε διαφορετική επιλογή των ελαχίστων δεσμεύσεων.

Παράδειγμα:

Για να γίνουν οι παραπάνω έννοιες ευκολότερα κατανοητές θα χρησιμοποιηθεί ένα πολύ απλό παράδειγμα: σ' ένα οριζόντιο δίκτυο με μορφή τριγώνου έχουν μετρηθεί οι 3 γωνίες A, B, C και οι τρείς πλευρές a, b, c. Το γενικότερο μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι η ευκλείδια γεωμετρία του επιπέδου. Για την επιλογή ενός μαθηματικού μοντέλου μπορούν να χρησιμοποιηθούν η επίπεδη τριγωνομετρία και η αναλυτική γεωμετρία του επιπέδου, που αποτελούν και οι δύο μεθόδους μαθηματικής περιγραφής της ευκλείδειας γεωμετρίας του επιπέδου. Το φυσικό σύστημα το οποίο καλύπτουν οι παρατηρούμενες παράμετροι αποτελείται από όλες τις παραμέτρους που σχετίζονται με το σχήμα και το μέγεθος του τριγώνου. Μερικές από αυτές είναι οι εξής:

τα ύψη του τριγώνου
η περίμετρος
το μήκος της προβολής κάθε πλευράς σε οποιαδήποτε από τις άλλες
η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου
το εμβαδόν του τριγώνου
η απόσταση κάθε κορυφής από το μέσο της απέναντι πλευράς
ο λόγος δύο οποιωνδήποτε πλευρών
κ.λ.π.

Ο παραμετρικός βαθμός του φυσικού συστήματος είναι $r = 3$. Αρκούν 3 παράμετροι για να προσδιοριστεί το σχήμα και το μέγεθος του τριγώνου. Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι $n = 6$ και οι βαθμοί ελευθερίας είναι $f = n$ $r = 6$ $3 = 3$. Μερικά παραδείγματα θεμελιωδών παραμέτρων περιγραφής είναι τα εξής:

a, b, c
A, b, c
A, B, c
…
a, A, ύψος h_A
Συντεταγμένες x_C, y_C της κορυφής C, και x_B της κορυφής B, σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και άξονα των x κατά μήκος της πλευράς c.

Αν A , B , C , a , b , c είναι οι παρατηρήσεις (αριθμητικές τιμές που προέκυψαν από τις μετρήσεις) και v_A, v_B, v_C, v_a, v_b, v_c τα αντίστοιχα άγνωστα σφάλματα, οι σχέσεις (1) είναι οι εξής

$$\begin{aligned} A &= A + v_A \ , & a &= a + v_a \\ B &= B + v_B \ , & b &= b + v_b \\ C &= C + v_C \ , & c &= c + v_c \end{aligned}$$

Το μαθηματικό μοντέλο θα συμπεριλαμβάνει τις 6 παρατηρούμενες παραμέτρους

$$\mathbf{y}^{\alpha} = [\, A \;\; B \;\; C \;\; a \;\; b \;\; c \,]^T$$

και m επιπλέον άγνωστες παραμέτρους. Ο αριθμός των εξισώσεων θα είναι $s = n+m \;\; r = 6+m \;\; 3 = m+3$.

Ορισμένα παραδείγματα επιλογής μοντέλου είναι τα εξής:

Εξισώσεις παρατηρήσεων:

$m = r = 3 \qquad s = n = 6 \qquad\qquad \mathbf{y}^{\alpha} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \mathbf{0}$

$\mathbf{x}^{\alpha} = [\, x_1^{\alpha} \;\; x_2^{\alpha} \;\; x_3^{\alpha} \,]^T = [\, a \;\; b \;\; c \,]^T$

$$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) \qquad \begin{aligned} A &= \arccos \frac{(x_2^{\alpha})^2 + (x_3^{\alpha})^2 \quad (x_1^{\alpha})^2}{2\, x_2^{\alpha}\, x_3^{\alpha}} \ , & a &= x_1^{\alpha} \\ B &= \arccos \frac{(x_1^{\alpha})^2 + (x_3^{\alpha})^2 \quad (x_2^{\alpha})^2}{2\, x_1^{\alpha}\, x_3^{\alpha}} \ , & b &= x_2^{\alpha} \\ C &= \arccos \frac{(x_1^{\alpha})^2 + (x_2^{\alpha})^2 \quad (x_3^{\alpha})^2}{2\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\alpha}} \ , & c &= x_3^{\alpha} \end{aligned}$$