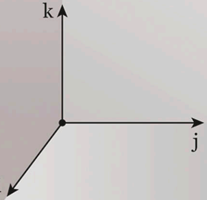
Σάββα
Φλωρά

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης



Β' έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α' έκδοσης

Η συγγραφή αυτού του εγχειριδίου υπαγορεύτηκε από τις ανάγκες της διδασκαλίας του μαθήματος «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ» στους φοιτητές του Τμήματος Γεωπονίας του Α.Π.Θ. Συνεπώς λήφθηκε υπ' όψη ότι στον αναγνώστη του παρόντος είναι ήδη γνωστές οι έννοιες και οι θεωρίες που περιλαμβάνονται στο μάθημα «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι» του προαναφερθέντος Τμήματος. Δηλαδή θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει καλή γνώση των βασικών εννοιών και θεωριών:

(1) *του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής,*

(2) *του Διαφορικού Λογισμού πραγματικών συναρτήσεων δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών,*

(3) *των διπλών και τριπλών ολοκληρωμάτων,*

(4) *των μεθόδων επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων ορισμένης μορφής,*

που διδάχθηκε στο μάθημα «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι».

Κατά τη σύνταξη του κειμένου καταβλήθηκε προσπάθεια να συγκεραστούν οι από τη φύση τους αντιφατικές έννοιες της *συντομίας* και της *πληρότητας*, με επιμονή στον αντικειμενικό σκοπό για την αποσαφήνιση και τη βαθειά κατανόηση της φύσεως των βασικών εννοιών και θεωριών της *Διαννσματικής Ανάλυσης* που παρουσιάζονται στο παρόν εγχειρίδιο.

Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να απευθύνω και γραπτώς τις θερμές μου ευχαριστίες προς τις "Εκδόσεις ΓΙΑΧΟΥΔΗ" και το προσωπικό τους, και ιδιαίτερα προς τον κ. Δημήτριο Κατέρη, για την ευσυνείδητη και αποτελεσματική εργασία τους με την ηλεκτρονική σελιδοποίηση, εκτύπωση και βιβλιοδεσία του βιβλίου αυτού. Επίσης ευχαριστώ θερμά τον κ. Φώτιο Κλάδο για την επιμελημένη και επιτυχή σχεδίαση των σχημάτων.

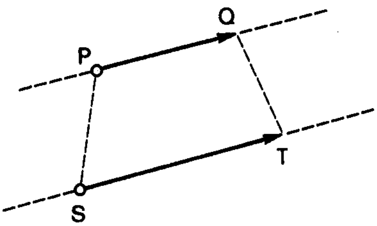
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2001 *Σ. Φλωράς*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

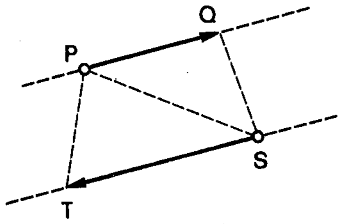
§1. Διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο.

Αν P , Q είναι δύο διαφορετικά σημεία του τρισδιάστατου χώρου, τότε το **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα** (**π.ε.τ.**) $\overrightarrow{PQ}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα PQ στο οποίο ορίζουμε το άκρο P αυτού να είναι η **αρχή** του π.ε.τ. και το άκρο Q αυτού να είναι το **πέρας** του π.ε.τ.

Φορέας του π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ καλείται ο φορέας του ευθυγράμμου τμήματος PQ , δηλαδή είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία P και Q . Το π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ ορίζει επί του φορέα του μία **φορά** *"από το σημείο* P *προς το σημείο* Q". Το π.ε.τ. $\overrightarrow{QP}$ έχει τον ίδιο φορέα (με το π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$) αλλά ορίζει επ' αυτού την **αντίθετη φορά** *"από το σημείο* Q *προς το σημείο* P". **Μήκος** του π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ καλείται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος PQ. Δύο π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{ST}$ καλούνται **συγγραμμικά** όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή **παράλληλα** όταν έχουν παράλληλους φορείς. Δύο συγγραμμικά π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{ST}$ ορίζουν επί του κοινού φορέα αυτών ή την ίδια φορά ή αντίθετες φορές. Τέλος, για δύο παράλληλα π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{ST}$ λέγουμε ότι έχουν την **ίδια φορά** όταν το ευθύγραμμο τμήμα PS είναι πλευρά του τραπεζίου που ορίζουν τα σημεία P , Q , S , T (πρβλ. σχήμα 1) και λέγουμε ότι έχουν **αντίθετες φορές** όταν το ευθύγραμμο τμήμα PS είναι διαγώνιος του τραπεζίου που ορίζουν τα σημεία P , Q , S , T (πρβλ. σχήμα 2).



Σχ. 1



Σχ. 2

Δίνουμε τώρα τους εξής

Ορισμούς 1. **(i)** Δύο π.ε.τ. $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{ST}$ καλούνται **ίσα π.ε.τ.** όταν είναι συγγραμμικά ή παράλληλα, έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια φορά, οπότε και γράφουμε $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$.

(ii) Το **διάνυσμα A** που αντιστοιχεί στο π.ε.τ. $\vec{PQ}$ είναι το σύνολο όλων των π.ε.τ. $\vec{ST}$ του χώρου που είναι ίσα με το $\vec{PQ}$, δηλαδή έχουμε

$$\mathbf{A} = \left\{ \vec{ST} \;\big/\; \vec{ST} = \vec{PQ} \right\}.$$

Κάθε π.ε.τ. $\vec{ST}$ που ανήκει στο διάνυσμα **A** καλείται **αντιπρόσωπος του διανύσματος A**.

Στο εξής όταν θα λέγουμε "*το διάνυσμα* $\mathbf{A} = \vec{PQ}$" θα εννοούμε το διάνυσμα **A** που έχει αντιπρόσωπο το π.ε.τ. $\vec{PQ}$, ενώ όταν θα λέγουμε "*το διάνυσμα* $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ *αρχής* P" θα εννοούμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\vec{PQ}$ που αντιπροσωπεύει το διάνυσμα **A**.

Για το διάνυσμα $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ δεν ορίζεται ούτε αρχή ούτε πέρας. Αντίθετα για τυχόν σημείο S του χώρου υπάρχει ακριβώς ένα σημείο T τέτοιο ώστε να είναι $\mathbf{A} = \vec{ST}$ και για τυχόν σημείο T′ του χώρου υπάρχει ακριβώς ένα σημείο S′ τέτοιο ώστε να είναι $\mathbf{A} = \vec{S'T'}$.

Ορισμοί 2. Διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ καλείται η δέσμη των παραλλήλων ευθειών του χώρου που είναι οι φορείς όλων των αντιπροσώπων του **A**, δηλαδή είναι η δέσμη όλων των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία PQ. **Φορά** του διανύσματος $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ καλείται η κοινή φορά όλων των αντιπροσώπων του **A**. **Μέτρο** (ή **μήκος**) του διανύσματος $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ καλείται το κοινό μήκος όλων των αντιπροσώπων του **A** και συμβολίζεται με $|\mathbf{A}|$, δηλαδή έχουμε $|\mathbf{A}| = |PQ| > 0$.

Ορισμοί 3. Γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{A} = \vec{PQ}$ και $\mathbf{B} = \vec{PR}$ καλείται το μέτρο της γωνίας $Q\hat{P}R$, συμβολίζεται με $(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B})$ ή απλά με ένα μικρό γράμμα, π.χ. θ, και εξ ορισμού ισχύει

$$0 \le (\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) \le \pi .$$

Δύο διανύσματα **A** και **B** καλούνται **συγγραμμικά** (ή **παράλληλα**) όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, συμβολίζουμε με **A** // **B**, και τότε είναι

$$(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) = 0 \quad ή \quad \pi .$$

Δύο συγγραμμικά διανύσματα **A** και **B** έχουν ή την **ίδια φορά** όταν είναι $(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) = 0$ ή **αντίθετες φορές** όταν είναι $(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) = \pi$. Δύο διανύσματα **A** και **B** καλούνται **ορθογώνια** (ή **κάθετα**) όταν ισχύει $(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) = \pi/2$ και τότε συμβολίζουμε με $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$. **Επίπεδο** δύο μη-συγγραμμικών διανυσμάτων $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ και $\mathbf{B} = \overrightarrow{PR}$ καλείται η δέσμη όλων των επιπέδων που είναι παράλληλα προς το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία P , Q , R. Τρία διανύσματα $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{C} = \overrightarrow{PS}$ καλούνται **συνεπίπεδα** όταν τα σημεία P , Q , R , S κείνται επί του αυτού επιπέδου.

Ορισμός 4. Ένα διάνυσμα $\mathbf{A}_0$ που έχει μέτρο $|\mathbf{A}_0| = 1$ καλείται **μοναδιαίο διάνυσμα** (ή ***κατεύθυνση***). Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$ υπάρχει ακριβώς ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{A}_0$ που έχει τη διεύθυνση και τη φορά του $\mathbf{A}$, δηλαδή ισχύουν

$$|\mathbf{A}_0| = 1 \qquad \text{και} \qquad (\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{A}_0) = 0 \ ,$$

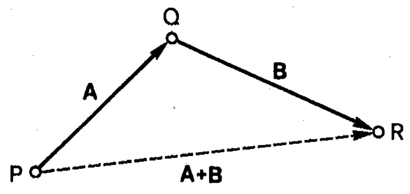
το οποίο καλείται ***κατεύθυνση του διανύσματος*** $\mathbf{A}$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς που έχουμε δώσει μέχρι τώρα το μέτρο $|\mathbf{A}|$ ενός διανύσματος $\mathbf{A}$ είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Είναι λοιπόν χρήσιμο να δεχθούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ενός ακόμη "*διανύσματος με μέτρο* 0" με το ακόλουθο

Αξίωμα 5. Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα με μέτρο 0 που δεν έχει διεύθυνση και φορά, το οποίο καλούμε **μηδενικό διάνυσμα** και θα το συμβολίζουμε με $\mathbf{O}$.

Για το μηδενικό διάνυσμα μπορούμε επίσης να γράφουμε $\mathbf{O} = \overrightarrow{PQ}$, όπου $P \equiv Q$. Το μηδενικό διάνυσμα δεν ορίζει γωνία με άλλο διάνυσμα.

Ορισμός 6. Το **άθροισμα A+B** των διανυσμάτων $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ και $\mathbf{B} = \overrightarrow{QR}$ καλείται το διάνυσμα $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \overrightarrow{PR}$.



Σχ. 3

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός αυτός περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ οπότε $P \equiv Q$ ή $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ οπότε $Q \equiv R$.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι για την πρόσθεση διανυσμάτων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1.	$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$,	2.	$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$,
3.	$\mathbf{O}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,	4.	$\forall \mathbf{A} \Rightarrow \exists -\mathbf{A} : -\mathbf{A}+\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

Σημειώνουμε ότι για το διάνυσμα $\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ}$ το **αντίθετο διάνυσμα** $-\mathbf{A}$ της ιδιότητας 4 είναι το διάνυσμα $-\mathbf{A} = \overrightarrow{QP}$. Ακόμη ισχύουν οι ιδιότητες :

5. $\big\lvert\,\lvert\mathbf{A}\rvert - \lvert\mathbf{B}\rvert\,\big\rvert \le \lvert\mathbf{A}+\mathbf{B}\rvert \le \lvert\mathbf{A}\rvert + \lvert\mathbf{B}\rvert$
6. $\lvert\mathbf{A}+\mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert + \lvert\mathbf{B}\rvert$, αν και μόνον αν τα διανύσματα **A** και **B** έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά ή $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ή $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.
7. $\lvert\mathbf{A}+\mathbf{B}\rvert = \big\lvert\,\lvert\mathbf{A}\rvert - \lvert\mathbf{B}\rvert\,\big\rvert$, αν και μόνον αν τα διανύσματα **A** και **B** έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετες φορές ή $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ή $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

Οι ιδιότητες 5-7 είναι οι γνωστές ανισοϊσότητες για τις πλευρές του τριγώνου PQR, πρβλ. Σχ. 3.

Ορισμός 7. Το **βαθμωτό γινόμενο** $\lambda.\mathbf{A}$ του αριθμού $\lambda \in \Re$ επί το διάνυσμα **A** καλείται το διάνυσμα που έχει μέτρο

$$\lvert\lambda.\mathbf{A}\rvert = \lvert\lambda\rvert . \lvert\mathbf{A}\rvert ,$$

διεύθυνση τη διεύθυνση του **A** (όταν $\lambda \neq 0$ και $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$) και φορά την ίδια με το διάνυσμα **A** όταν $\lambda > 0$ και αντίθετη με το διάνυσμα **A** όταν $\lambda < 0$.

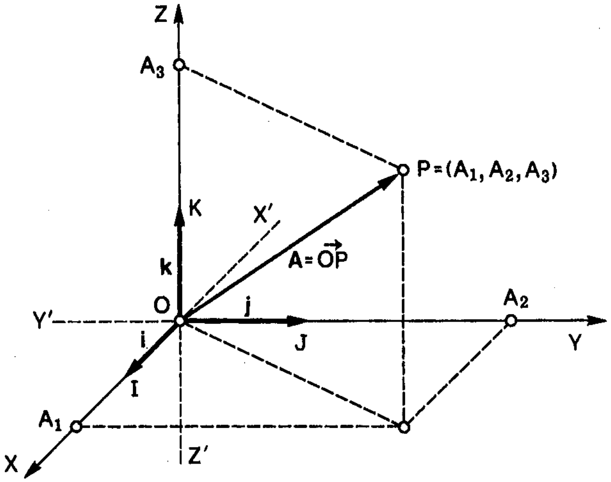
Συνεπώς για $\lambda \neq 0$ και $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ τα διανύσματα **A** και $\lambda.\mathbf{A}$ είναι συγγραμμικά. Εύκολα διαπιστώνεται ότι για το βαθμωτό γινόμενο διανύσματος ισχύουν οι ιδιότητες :

1. $\kappa.(\lambda.\mathbf{A}) = (\kappa\lambda).\mathbf{A} = \lambda.(\kappa.\mathbf{A})$,	2. $(\kappa+\lambda).\mathbf{A} = \kappa.\mathbf{A} + \lambda.\mathbf{A}$,
3. $\kappa.(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \kappa.\mathbf{A} + \kappa.\mathbf{B}$,	4. $(-\kappa).\mathbf{A} = \kappa.(-\mathbf{A}) = -(\kappa.\mathbf{A})$,
5. $\mathbf{A} = \lvert\mathbf{A}\rvert.\mathbf{A}_0$, όπου $\mathbf{A}_0$ είναι η κατεύθυνση του $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$.	

Εύκολα διαπιστώνεται ότι όλες οι έννοιες που ορίσαμε για τα διανύσματα με τη βοήθεια αντιπροσώπων π.ε.τ. αυτών είναι ανεξάρτητες από την επιλογή των αντιπροσώπων.

§2. *Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων* x, y, z .

Στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z με **αρχή** το σημείο O, με **άξονες** τις προσανατολισμένες ευθείες X′X, Y′Y, Z′Z που τέμνονται στο O και είναι ανά δύο κάθετες και **θετικούς ημιάξονες** τις ημιευθείες OX, OY, OZ (πρβλ. σχήμα). Λέγοντας **δεξιόστροφο** εννοούμε ότι πληρούται **ο κανόνας των τριών δακτύλων του αριστερού χεριού** :



" Όταν ο αντίχειρας του αριστερού χεριού δείχνει το θετικό ημιάξονα OX *και ο μεσαίος δάκτυλος δείχνει το θετικό ημιάξονα* OY, *τότε ο δείκτης του αριστερού χεριού δείχνει το θετικό ημιάξονα* OZ ."

Επί των θετικών ημιαξόνων OX, OY, OZ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία

$$I = (1,0,0) \ , \quad J = (0,1,0) \ , \quad K = (0,0,1)$$

για τα οποία έχουμε OI=OJ=OK=1, καθώς και τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{i} = \vec{OI} \quad , \quad \mathbf{j} = \vec{OJ} \quad , \quad \mathbf{k} = \vec{OK} \quad ,$$

τα οποία είναι οι κατευθύνσεις των τριών αξόνων του συστήματος.

Αν $P = (A_1, A_2, A_3)$ είναι τυχόν σημείο του χώρου, τότε το διάνυσμα $\mathbf{A} = \vec{OP}$ καλείται **διάνυσμα θέσεως** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του σημείου P και είναι φανερό ότι ισχύει :

$$\mathbf{A} = A_1.\mathbf{i} + A_2.\mathbf{j} + A_3.\mathbf{k} \ . \tag{1}$$

Τότε οι συντεταγμένες A_1, A_2, A_3 του σημείου P καλούνται και **συντεταγμένες του διανύσματος** $A = \vec{OP}$ για το οποίο χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Τα διανύσματα $A_1.\mathbf{i}$, $A_2.\mathbf{j}$, $A_3.\mathbf{k}$ έχουν αντίστοιχα τη διεύθυνση των αξόνων X'X, Y'Y, Z'Z και καλούνται **συνιστώσες του διανύσματος** $\mathbf{A}=\vec{OP}$. Σύμφωνα με τη σχέση (1) το διάνυσμα **A** ισούται με το άθροισμα των τριών συνιστωσών αυτού. Το μέτρο $|\mathbf{A}|$ του διανύσματος **A** ισούται με το μήκος OP και συνεπώς

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad .$$

Εύκολα διαπιστώνονται οι παρακάτω χρήσιμες σχέσεις :

1. Για τα σημεία $P = (x_1, y_1, z_1)$ και $Q = (x_2, y_2, z_2)$ ισχύει
$$\mathbf{A} = \vec{PQ} = (x_2 - x_1).\mathbf{i} + (y_2 - y_1).\mathbf{j} + (z_2 - z_1).\mathbf{k} \ , \text{ ή}$$
$$\mathbf{A} = \vec{PQ} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)\ .$$

2. Για τα διανύσματα $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ και $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ισχύει
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1,\ A_2 + B_2,\ A_3 + B_3)\ .$$

3. Για το διάνυσμα $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ και τον αριθμό $\lambda \in \Re$ ισχύει
$$\lambda.\mathbf{A} = (\lambda.A_1\ , \lambda.A_2\ , \lambda.A_3)\ .$$

§3. Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Ορισμός 1. Εσωτερικό (ή **αριθμητικό**) **γινόμενο** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ των διανυσμάτων **A** και **B** καλείται ο αριθμός

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{cases} |\mathbf{A}|\,.\,|\mathbf{B}|\,.\ \text{συν}\,(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B}) & ,\ \text{όταν } \mathbf{A} \neq \mathbf{O} \text{ και } \mathbf{B} \neq \mathbf{O}\,, \\ 0 & ,\ \text{όταν } \mathbf{A} = \mathbf{O} \text{ ή } \mathbf{B} = \mathbf{O}\,. \end{cases}$$

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 2. Για τα διανύσματα **A** και **B** ισχύει $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ αν και μόνον αν είναι $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ ή $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ ή $\mathbf{B}=\mathbf{O}$.

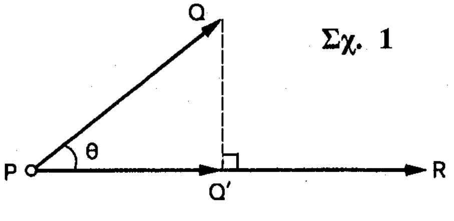
Με τη βοήθεια της έννοιας του εσωτερικού γινομένου δίνουμε τον εξής

Ορισμό 3. Αν **A** και **B** είναι μη-μηδενικά διανύσματα και $\mathbf{b}_0$ είναι η κατεύθυνση του **B**, τότε **η προβολή του διανύσματος A επί του διανύσματος B** είναι το διάνυσμα

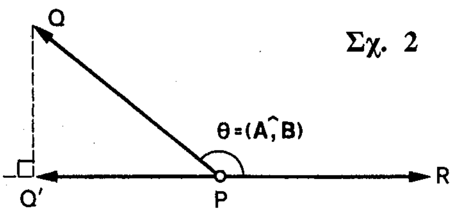
$$p_B(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_0).\mathbf{b}_0 \quad ,$$

δηλαδή έχουμε (πρβλ. Σχ. 1 και Σχ. 2)

$$p_B(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|.\text{συν}(\mathbf{A} \hat{,} \mathbf{B})\,.\mathbf{b}_0 \quad .$$



Σχ. 1



Σχ. 2

$\mathbf{A}=\vec{PQ}$, $\mathbf{B}=\vec{PR}$, $QQ'\perp PR$, οπότε $p_B(\mathbf{A})=\vec{PQ'}$.

Επειδή προφανώς ισχύει :

$$[\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{b}_0)]\,.\,(-\mathbf{b}_0) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_0)\,.\mathbf{b}_0 \quad ,$$

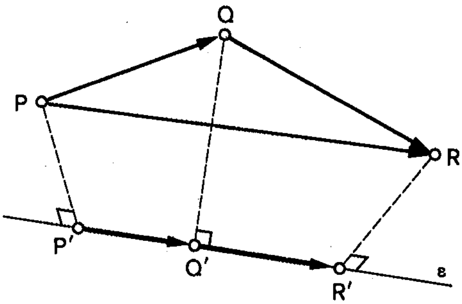
προκύπτει ότι η προβολή $p_B(\mathbf{A})$ του **A** επί του **B** είναι ανεξάρτητη από το μέτρο και τη φορά του διανύσματος **B** και εξαρτάται μόνον από τη διεύθυνση του **B**. Για το λόγο αυτό η προβολή $p_B(\mathbf{A})$ καλείται και **προβολή του διανύσματος A κατά τη διεύθυνση του διανύσματος B** και συμβολίζεται και $p_\varepsilon(\mathbf{A})$, όπου ε είναι τυχούσα ευθεία της διεύθυνσης του **B**.

Για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι ιδιότητες :

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, 2. $\lambda.(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\lambda.\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda.\mathbf{B})$,
3. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,
4. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ και $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$,
5. Αν $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, τότε
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \ ,$$
6. Αν $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = |\mathbf{A}|^2$.

Εδώ αποδεικνύουμε την παραπάνω ιδιότητα 3 που παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον, ενώ η απόδειξη των υπολοίπων αφήνεται στον αναγνώστη σαν άσκηση.

Απόδειξη της ιδιότητας 3. Θεωρούμε μίαν ευθεία ε της διεύθυνσης του **A** και τα διανύσματα $\mathbf{B} = \overrightarrow{PQ}$ και $\mathbf{C} = \overrightarrow{QR}$ (πρβλ. σχήμα 3). Θεωρούμε τις προβολές P', Q', R' αντίστοιχα των σημείων P, Q, R επί της ευθείας ε, δηλαδή είναι $PP' \perp \varepsilon$, $QQ' \perp \varepsilon$, $RR' \perp \varepsilon$. Τότε οι προβολές των διανυσμάτων $\mathbf{B}=\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{C} = \overrightarrow{QR}$ και $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \overrightarrow{PR}$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος **A** είναι αντίστοιχα τα διανύσματα



Σχ. 3

$$p_\varepsilon(\mathbf{B}) = \overrightarrow{P'Q'} \quad , \quad p_\varepsilon(\mathbf{C}) = \overrightarrow{Q'R'} \quad \text{και} \quad p_\varepsilon(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \overrightarrow{P'R'}$$

και συνεπώς ισχύει

$$p_\varepsilon(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = p_\varepsilon(\mathbf{B}) + p_\varepsilon(\mathbf{C}) \ .$$

Αν $\boldsymbol{\alpha}_0$ είναι η κατεύθυνση του διανύσματος **A**, τότε η τελευταία σχέση δίνει

$$\left[(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\boldsymbol{\alpha}_0\right].\boldsymbol{\alpha}_0 = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\alpha}_0).\boldsymbol{\alpha}_0 + (\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\alpha}_0).\boldsymbol{\alpha}_0 \quad ,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το μέτρο $|\mathbf{A}|$ του διανύσματος **A** και λαμβάνοντας υπ' όψη τις ιδιότητες 1 και 2 προκύπτει :

$$\left[(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}\right].\boldsymbol{\alpha}_0 = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}).\boldsymbol{\alpha}_0 + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}).\boldsymbol{\alpha}_0 \quad ,$$

ή $$\left[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})\right].\boldsymbol{\alpha}_0 = \left[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right].\boldsymbol{\alpha}_0 \quad ,$$

ή $$\left[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\right].\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{O} \quad ,$$

ή $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) = 0 \quad ,$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση της ιδιότητας 3. ▲

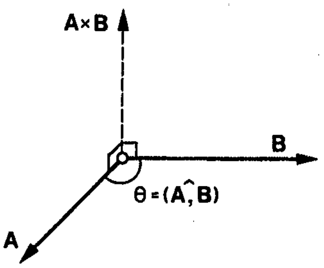
Ορισμός 4. Αν τα διανύσματα $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ και $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ δεν είναι συγγραμμικά (οπότε ορίζεται το επίπεδο των **A** και **B**), τότε **εξωτερικό** (ή **διανυσματικό**) **γινόμενο** του **A** επί του **B** καλείται το διάνυσμα $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ που έχει μέτρο

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.\eta\mu(\mathbf{A}\,\hat{,}\,\mathbf{B}) \,, \qquad (*)$$

διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των **A** και **B**, δηλαδή ισχύει :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\perp\mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}\perp\mathbf{B} \quad ,$$

και με φορά τέτοια ώστε η τριάδα διανυσμάτων $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ να αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων, δηλαδή να πληρούται ο κανόνας των τριών δακτύλων του αριστερού χεριού.



Σχ. 4

Αν, τώρα, τα διανύσματα $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ και $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$ είναι συγγραμμικά ή αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα **A** και **B** είναι το **O**, τότε εξ ορισμού

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{O} \quad ,$$

δηλαδή ισχύει και πάλιν η σχέση (*) για το μέτρο $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 5. Για τα διανύσματα **A** και **B** ισχύει $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{O}$ αν και μόνον αν είναι $\mathbf{A}/\!/\mathbf{B}$ ή $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ ή $\mathbf{B}=\mathbf{O}$.

Για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι ιδιότητες :

1. $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, 2. $\lambda.(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\lambda.\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(\lambda.\mathbf{B})$,

3. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$,

4. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{O}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$,

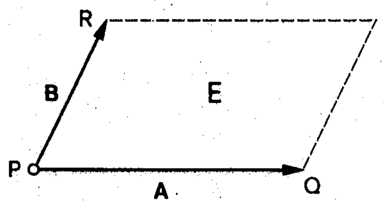
5. Αν $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, τότε ισχύει

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \,,$$

όπου η *"σχηματική"* ορίζουσα αναπτύσσεται κατά τα στοιχεία-κατευθύνσεις της πρώτης γραμμής σαν κανονική ορίζουσα.

6. Αν E είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{A}=\vec{PQ}$ και $\mathbf{B}=\vec{PR}$ κοινής αρχής P, τότε ισχύει :

$$E = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| .$$

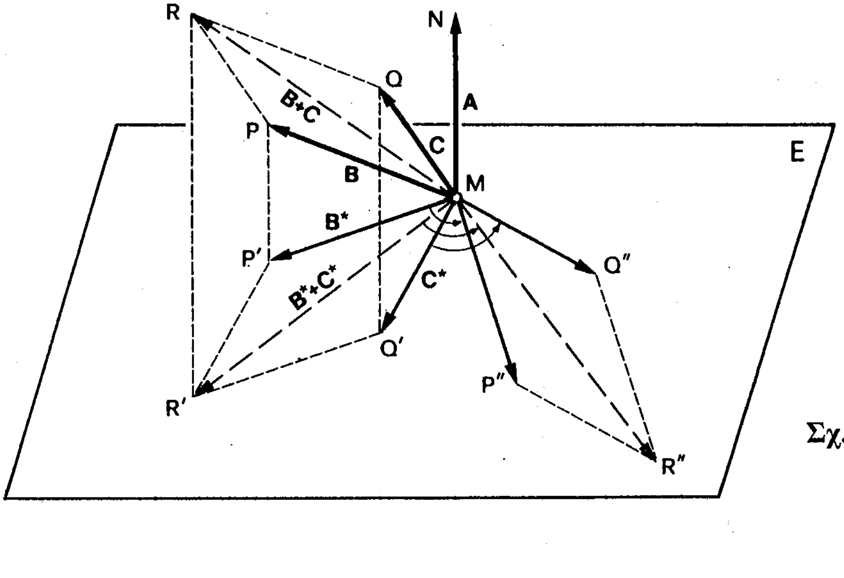


Εδώ αποδεικνύουμε την παραπάνω ιδιότητα 3 που παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες, ενώ η απόδειξη των υπολοίπων αφήνεται στον αναγνώστη σαν άσκηση.

Απόδειξη της ιδιότητας 3. Θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{A}=\vec{MN}$, $\mathbf{B}=\vec{MP}$, $\mathbf{C}=\vec{MQ}$, $\mathbf{B}+\mathbf{C} = \vec{MR}$ καθώς και το επίπεδο E που είναι κάθετο του $\mathbf{A}=\vec{MN}$ στο σημείο M (πρβλ. σχήμα 6).΄Εστω P', Q', R' οι προβολές των σημείων P, Q, R στο επίπεδο E αντίστοιχα και θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{B}^* = \vec{MP'} \ , \ \mathbf{C}^* = \vec{MQ'} \ , \ (\mathbf{B}+\mathbf{C})^* = \vec{MR'} \ .$$

Προφανώς είναι $\mathbf{B}^*=\mathbf{B}-p_A(\mathbf{B})$, $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-p_A(\mathbf{C})$, $(\mathbf{B}+\mathbf{C})^* = \mathbf{B}+\mathbf{C}-p_A(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.



Σχ. 6

Τα διανύσματα $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$, $(\mathbf{B}+\mathbf{C})^*$, επειδή κείνται στο επίπεδο E είναι ορθογώνια με το διάνυσμα $\mathbf{A}$ και έχουν μέτρα :

$$|\mathbf{B}^*| = MP' = MP.\eta\mu\, M\hat{P}P' = MP.\eta\mu\, P\hat{M}N = |\mathbf{B}|.\,\eta\mu(\mathbf{A}\,\hat{,}\,\mathbf{B})$$

και όμοια $|\mathbf{C}^*| = |\mathbf{C}|.\,\eta\mu(\mathbf{A}\,\hat{,}\,\mathbf{C})$, $|(\mathbf{B}+\mathbf{C})^*| = |\mathbf{B}+\mathbf{C}|.\,\eta\mu(\mathbf{A}\,\hat{,}\,\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

Η προβολή $MP'R'Q'$ του παραλληλογράμμου $MPRQ$ επί του επιπέδου E είναι επίσης π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο και συνεπώς έχουμε :

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})^* = \mathbf{B}^*+\mathbf{C}^* .$$

Αν $\mathbf{A}_0$ είναι η κατεύθυνση του $\mathbf{A}$, τότε επειδή $\mathbf{B}^* \perp \mathbf{A}_0$ έχουμε

$$|\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}| = |\mathbf{B}|.\eta\mu\ (\mathbf{A}\,\hat{,}\,\mathbf{B}) = |\mathbf{B}^*| = |\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}^*| ,$$

και προφανώς τα εξωτερικά γινόμενα $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}$ και $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}^*$ έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά (διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο M, P, P' και φορά τέτοια ώστε τα συστήματα $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}, \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B})$ και $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}^*, \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}^*)$ να είναι δεξιόστροφα). Άρα είναι $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}^* = \overrightarrow{MP''}$ και μάλιστα $P'' \in E$ (επειδή $MP'' \perp MN$) , $P'\hat{M}P'' = \pi/2$ και $MP'' = |\mathbf{B}^*| = MP'$.

Ακριβώς όμοια έχουμε $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{C} = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{C}^* = \overrightarrow{MQ''}$, $Q'' \in E$, $Q'\hat{M}Q'' = \pi/2$ και $MQ'' = |\mathbf{C}^*| = MQ'$, και ανάλογα $\mathbf{A}_0 \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}_0 \times (\mathbf{B}+\mathbf{C})^* = \mathbf{A}_0 \times (\mathbf{B}^* + \mathbf{C}^*) = \overrightarrow{MR''}$, $R'' \in E$, $R'\hat{M}R'' = \pi/2$ και $MR'' = |(\mathbf{B}+\mathbf{C})^*| = MR'$.

Άρα το τετράπλευρο $MP''R''Q''$ είναι η θέση που καταλαμβάνει το παραλληλόγραμμο $MP'R'Q'$ όταν αυτό κείμενο πάντοτε επί του επιπέδου E περιστραφεί περί του σημείου M κατά γωνία $\pi/2$. Άρα το τετράπλευρο $MP''R''Q''$ είναι παραλληλόγραμμο (και μάλιστα ίσο με το $MP'R'Q'$), απ' όπου προκύπτει :

$$\mathbf{A}_0 \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \overrightarrow{MR''} = \overrightarrow{MP''} + \overrightarrow{MQ''} = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_0 \times \mathbf{C} .$$

Πολ/ζοντας την τελευταία σχέση με το μέτρο $|\mathbf{A}|$ του $\mathbf{A}$ και λαμβάνοντας υπ' όψη την ιδιότητα 2 έχουμε :

$$(|\mathbf{A}|.\mathbf{A}_0) \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \big(|\mathbf{A}|.\mathbf{A}_0\big) \times \mathbf{B} + \big(|\mathbf{A}|.\mathbf{A}_0\big) \times \mathbf{C} ,$$

ή $$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} . \qquad \blacktriangle$$

Ορισμός 6. Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων **A**, **B**, **C** (με αυτήν τη σειρά) καλείται ο α ρ ι θ μ ό ς

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\ .$$

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 7. Για τα διανύσματα **A** , **B** , **C** ισχύει $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}]=0$ αν και μόνον αν τα διανύσματα **A** , **B** , **C** είναι συνεπίπεδα (συμπεριλαμβάνοντας και τις ειδικές περιπτώσεις : (i) ένα από τα διανύσματα αυτά να είναι το **O**, και (ii) δύο τουλάχιστον από τα διανύσματα αυτά να είναι συγγραμμικά).

Για το μικτό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι ιδιότητες :

1. Αν είναι $\mathbf{A}=(A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B}=(B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{C}=(C_1, C_2, C_3)$, τότε ισχύει

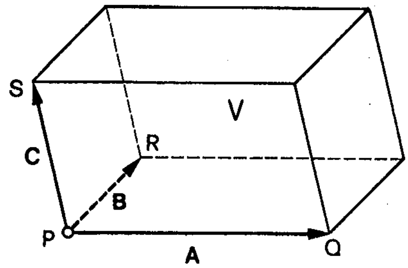
$$[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}\ .$$

2. $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = [\mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{A}] = [\mathbf{C}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ και συνεπώς $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

3. Αν το σύστημα διανυσμάτων $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ είναι δεξιόστροφο, τότε ισχύει $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}]>0$, ενώ αν το σύστημα $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ είναι αριστερόστροφο, τότε ισχύει $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}]<0$.

4. Αν V είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{A}=\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{B}=\overrightarrow{PR}$, $\mathbf{C}=\overrightarrow{PS}$ κοινής αρχής P, τότε ισχύει

$$V = \pm[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}]\ .$$



Ασκήσεις

1. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 5 του εσωτερικού γινομένου, 5 και 6 του εξωτερικού γινομένου, 1 και 4 του μικτού γινομένου.

2. Να αποδειχθεί ότι για το τυχόν διάνυσμα **A** ισχύει

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}).\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}).\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}).\mathbf{k} \ .$$

3. Δίνονται τα σημεία $P=(3,-4,2)$, $Q=(4,-2,1)$, $S=(-1,2,-2)$ και $T=(2,1,-1)$ και να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{A}=\overrightarrow{PQ}$ και $\mathbf{B}=\overrightarrow{ST}$ είναι ορθογώνια.

4. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\mathbf{A} = \mathbf{i}-2.\mathbf{j}+3.\mathbf{k}$ σε άθροισμα δύο διανυσμάτων από τα οποία το ένα να είναι συγγραμμικό και το άλλο ορθογώνιο προς το διάνυσμα $\mathbf{B} = 2.\mathbf{i}+\mathbf{j}-2.\mathbf{k}$.

5. Δίνονται τα σημεία $P=(3,1,-1)$, $Q=(5,2,-3)$, $S=(4,-1,2)$ και να βρεθούν: (i) η απόσταση του S από την ευθεία PQ, (ii) το εμβαδόν του τριγώνου PQS .

6. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $P=(3,1,2)$, $Q=(4,1,-5)$, $S=(5,2,1)$.

7. Αν τα μοναδιαία διανύσματα **a** και **b** σχηματίζουν γωνία θ, τότε να αποδειχθεί ότι είναι $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 2$ συν $(\theta/2)$. (*Υπόδειξη* : Θεωρείστε τη σχέση

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})} \quad .)$$

8. Για τα διανύσματα $\mathbf{A}=2.\mathbf{i}+\mathbf{j}-3.\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}-2.\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-4.\mathbf{k}$ να βρεθούν τα γινόμενα: $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}]$, $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία

$$P=(2,1,-2)\ ,\ Q=(-1,2,-3)\ \text{ και }\ R=(4,1,0).$$

(*Υπόδειξη* : Το σημείο $T=(x,y,z)$ κείται στο επίπεδο των σημείων P, Q, R αν και μόνον αν τα διανύσματα $\mathbf{A}=\overrightarrow{PT}$, $\mathbf{B}=\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{C}=\overrightarrow{PR}$ είναι συνεπίπεδα.)

10. Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου με κορυφές τα σημεία

$$P=(2,1,1),\ Q=(1,-1,2)\ ,\ R=(0,1,-1)\ ,\ S=(1,-2,1)\ .$$

11. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $S=(3,2,1)$ από το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $P=(1,1,0)$, $Q=(3,-1,1)$, $R=(-1,0,2)$.

12. Για τυχόντα διανύσματα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ να αποδειχθεί η ιδιότητα

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}).\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).\mathbf{C}\ .$$

(*Υπόδειξη* : Θεωρείστε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων και κάντε χρήση των ιδιοτήτων 5 για το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο.)

13. Αν η κατεύθυνση $\mathbf{a}$ σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα γωνίες

$$(\mathbf{i}\,\hat{,}\,\mathbf{a})=\alpha\ ,\ (\mathbf{j}\,\hat{,}\,\mathbf{a})=\beta\ ,\ (\mathbf{k}\,\hat{,}\,\mathbf{a})=\gamma\ ,$$

τότε τα συν α, συν β, συν γ καλούνται **συνημίτονα της κατεύθυνσης a**. Να δειχθεί ότι είναι :

(i) $$\mathbf{a}=\text{συν}\,\alpha\,.\,\mathbf{i}+\text{συν}\,\beta\,.\,\mathbf{j}+\text{συν}\,\gamma\,.\,\mathbf{k}\ ,$$

(ii) αν $\mathbf{A}=A_1.\mathbf{i}+A_2.\mathbf{j}+A_3.\mathbf{k}$ είναι τυχόν διάνυσμα, τότε

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=A_1\text{συν}\,\alpha+A_2\text{συν}\beta+A_3\text{συν}\,\gamma\ .$$

14. Αν το επίπεδο E_1 ορίζεται από τα σημεία

$$P_1=(1,0,2)\ ,\ Q_1=(-2,2,0)\ ,\ R_1=(6,-2,4)$$

και το επίπεδο E_2 ορίζεται από τα σημεία

$$P_2=(1,-1,0)\ ,\ Q_2=(0,1,2)\ ,\ R_2=(2,1,2)\ ,$$

τότε να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα E_1 και E_2.

(*Υπόδειξη :* Προσδιορίστε διανύσματα κάθετα στα δύο επίπεδα και υπολογίστε τη γωνία αυτών.)

§ 4. *Διανυσματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής.*

Θεωρούμε μία συνάρτηση

$$\mathbf{A} : \Delta \ni t \;\mapsto\; \mathbf{A}(t) \quad ,$$

που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ των πραγματικών αριθμών και σε κάθε τιμή $t \in \Delta$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t η αντίστοιχη τιμή $\mathbf{A}(t)$ της συνάρτησης $\mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα

$$\mathbf{A}(t) = A_1(t).\,\mathbf{i} + A_2(t).\,\mathbf{j} + A_3(t).\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

του τρισδιάστατου χώρου $\Re^3$. Η συνάρτηση $\mathbf{A}$ λέγουμε τότε ότι είναι μία **διανυσματική συνάρτηση** μίας μεταβλητής που ορίζεται στο διάστημα $\Delta \subset \Re$, από τη σχέση δε (1) προσδιορίζονται τρεις αριθμητικές συναρτήσεις

$$A_1(t) \;,\quad A_2(t) \;,\quad A_3(t) \;,$$

που ορίζονται επίσης στο διάστημα $\Delta \subset \Re$ και καλούνται **συντεταγμένες συναρτήσεις** της $\mathbf{A}$.

Ορισμός 1. Αν φ είναι μία αριθμητική συνάρτηση και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις, όλες με πεδίο ορισμού το ίδιο διάστημα $\Delta \subset \Re$, τότε ορίζονται στο διάστημα Δ και οι συναρτήσεις :

(i) Το **άθροισμα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$** είναι η διανυσματική συνάρτηση που πληροί τη σχέση

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(t) = \mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t) \qquad , \quad \forall\, t \in \Delta \,.$$

(ii) Το **βαθμωτό γινόμενο $\varphi.\mathbf{A}$** είναι η διανυσματική συνάρτηση που πληροί τη σχέση

$$(\varphi\,.\,\mathbf{A})(t) = \varphi(t)\,.\,\mathbf{A}(t) \qquad , \quad \forall\, t \in \Delta \,.$$

(iii) Το **εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$** είναι η αριθμητική συνάρτηση που πληροί τη σχέση

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(t) = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t) \qquad , \quad \forall\, t \in \Delta \,.$$

(iv) Το **εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$** είναι η διανυσματική συνάρτηση που πληροί τη σχέση

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})(t) = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t) \qquad , \quad \forall\, t \in \Delta \,.$$

(v) Το **μέτρο** $|\mathbf{A}|$ είναι η αριθμητική συνάρτηση που πληροί τη σχέση

$$|\mathbf{A}|(t) = |\mathbf{A}(t)| \qquad , \ \forall\ t \in \Delta \ .$$

Ορισμός 2. **(i)** Η διανυσματική συνάρτηση **A** που ορίζεται στο διάστημα $\Delta \subset \Re$ καλείται **συνεχής στο εσωτερικό σημείο** $t_0 \in \Delta$, όταν για κάθε ε>0, οσονδήποτε μικρόν, υπάρχει δ=δ(ε)>0 τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0)| < \varepsilon \qquad ,\forall\ t \in \Delta \quad \text{και} \quad |t - t_0| < \delta \ .$$

(ii) Η διανυσματική συνάρτηση **A** που ορίζεται στο ανοικτό διάστημα $\Delta \subset \Re$ καλείται **συνεχής στο** Δ , όταν η **A** είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Δ.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα το

Θεώρημα 1. Η σταθερή διανυσματική συνάρτηση **A**(t)=**A** για κάθε $t \in \Delta$ είναι συνεχής στο Δ.

Θεώρημα 2. Άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη : Αν **A** , **B** είναι δύο διανυσματικές συναρτήσεις συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $\Delta \subset \Re$, τότε για κάθε $t_0 \in \Delta$ και ε>0 υπάρχουν

$$\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon) > 0 \qquad \text{και} \qquad \delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon) > 0$$

τέτοιοι ώστε να είναι:

$$|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad , \ \forall\ t \in \Delta \quad \text{και} \quad |t - t_0| < \delta_1 \ ,$$

$$|\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad , \ \forall\ t \in \Delta \quad \text{και} \quad |t - t_0| < \delta_2 \ .$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $t \in \Delta$ και $|t - t_0| < \delta$ είναι:

$$|(\mathbf{A} + \mathbf{B})(t) - (\mathbf{A} + \mathbf{B})(t_0)| = |\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t) - \mathbf{A}(t_0) - \mathbf{B}(t_0)| \leq$$

$$\leq \ |\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0)| + |\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Άρα η συνάρτηση **A+B** είναι συνεχής στο τυχόν σημείο $t_0 \in \Delta$. ▲

Θεώρημα 3. Αν φ και **A** είναι αντίστοιχα αριθμητική και διανυσματική συναρτήσεις συνεχείς στο ανοικτό διάστημα Δ, τότε και το βαθμωτό γινό-