ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Α. ΦΛΟΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Α.Π.Θ.

ΙΩΑΝΝΟΥ Χ. ΣΧΟΙΝΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
- ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
- ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
- ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1999

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό καλύπτει τη βασική ύλη του μαθήματος «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ» που περιλαμβάνεται στο σημερινό πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Γεωλογίας του Α.Π.Θ και που διδάσκεται στη διάρκεια του δεύτερου εξαμήνου.

Απευθύνεται, βέβαια, στους φοιτητές του Τμήματος Γεωλογίας, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και από φοιτητές άλλων Τμημάτων Θετικών Επιστημών.

Διαβάζεται εύκολα, γιατί είναι απλά γραμμένο, σε σχεδόν ανεξάρτητα κεφάλαια. Δίνει ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές και δεν εμβαθύνει πολύ στη θεωρία, όπως θ' έπρεπε αν απευθυνόταν στους φοιτητές των μαθηματικών.

Μετά από μια σύντομη παρουσίαση της θεωρίας, για την πληρέστερη εμπέδωση της ύλης λύνονται πολλά επιλεγμένα παραδείγματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνεται ένα πλήθος ασκήσεων και προβλημάτων με τ' αποτελέσματά τους.

Κάθε κεφάλαιο μπορεί κανείς να το μελετήσει ανεξάρτητα από τα άλλα, μια και δε συνδέονται πολύ μεταξύ τους.

Πιστεύουμε ότι το βιβλίο αυτό θα αποτελέσει ένα καλό βοήθημα σ' όσους σπουδαστές, φοιτητές, ή άλλους επιστήμονες το χρησιμοποιήσουν.

Θεωρούμε υποχρέωσή μας να ευχαριστήσουμε θερμά τον Σχολικό Σύμβουλο-Φιλόλογο κ. Ευστ. Πελαγίδη για τη φιλότιμη προσπάθειά του να επιφέρει τις απαραίτητες γλωσσικές διορθώσεις στα χειρόγραφα του βιβλίου. Ακόμη θα πρέπει να ευχαριστήσουμε το τυπογραφείο Π. Ζήτη που συνέβαλε σημαντικά στην όλη εμφάνιση του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1985

Α. Α. ΦΛΟΚΑΣ
Ι. Χ. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο με τίτλο «Ειδικά Κεφάλαια Ανωτέρων Μαθηματικών» αποτελεί μια νέα βελτιωμένη και επαυξημένη έκδοση του προηγούμενου βιβλίου που έφερε τον τίτλο «Ειδικά Κεφάλαια Εφαρμοσμένων Μαθηματικών». Η ύλη του βιβλίου αυτού καλύπτει, κατά κύριο λόγο, την ύλη του μαθήματος «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ» που διδάσκεται στους φοιτητές του Τμήματος Γεωλογίας του ΑΠΘ και είναι προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις του αναμορφωμένου, κατά το ακαδημαϊκό έτος 1990-91, Προγράμματος Σπουδών του παραπάνω Τμήματος.

Ειδικότερα, το βιβλίο περιέχει το καινούργιο κεφάλαιο «Μιγαδικές Συναρτήσεις» και αλλαγές, ή προσθήκες σε πολλές ενότητες διαφόρων κεφαλαίων του προηγούμενου βιβλίου. Επίσης, το βιβλίο έχει εμπλουτισθεί με νέα παραδείγματα και με επιπλέον ασκήσεις.

Θεσ/νίκη, Φεβρουάριος 1991

Α. Α. ΦΛΟΚΑΣ
Ι. Χ. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1. Ορισμοί. Γενικά.

Θεωρούμε το διάνυσμα $\underline{u}$ του χώρου R^3 με συντεταγμένες u_i, $i=1, 2, 3$ σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα Oxyz με διανυσματικές μονάδες $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ των αξόνων Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι τρεις αυτές συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής t, με κοινό πεδίο ορισμού, δηλαδή θα είναι $u_i(t)$, $(i=1, 2, 3)$, οπότε το διάνυσμα $\underline{u}$ γράφεται με τη μορφή

$$\underline{u} = u_1(t)\,\underline{i} + u_2(t)\,\underline{j} + u_3(t)\,\underline{k} \tag{1.1.1}$$

Σε μια τέτοια περίπτωση, λέμε ότι το διάνυσμα $\underline{u}$ είναι μια **διανυσματική συνάρτηση** της πραγματικής μεταβλητής t και συμβολίζεται:

$$\underline{u} = \underline{u}(t) \qquad (t \in R) \tag{1.1.2}$$

Η γνώση της διανυσματικής συνάρτησης (1.1.2) προϋποθέτει τον καθορισμό, με κοινό πεδίο ορισμού, των τριών αριθμητικών συναρτήσεων $u_i(t)$, $i=1, 2, 3$ και αντίστροφα.

Όμοια, η διανυσματική συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών είναι ένα διάνυσμα που οι συντεταγμένες του είναι συναρτήσεις δύο ή περισσότερων πραγματικών μεταβλητών.

Για τις διανυσματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1.1.1: Η συνάρτηση $\underline{u}(t) = u_1(t)\,\underline{i}+u_2(t)\,\underline{j}+u_3(t)\,\underline{k}$ έχει όριο όταν $t \to t_0$, αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u_i(t)$, $i=1, 2, 3$ έχουν όρια, όταν $t \to t_0$ και είναι

$$\lim_{t\to t_0} \underline{u}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} u_1(t)\right)\underline{i} + \left(\lim_{t\to t_0} u_2(t)\right)\underline{j} + \left(\lim_{t\to t_0} u_3(t)\right)\underline{k}$$

Θεώρημα 1.1.2: Εάν $\underline{u}(t) \to \underline{l}$ όταν $t \to t_0$, τότε και $|\underline{u}(t)| \to |\underline{l}|$, όταν $t \to t_0$.

Για τα όρια διανυσματικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Εάν $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) = \underline{u}_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{w}(t) = \underline{w}_0$ και $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = h_0$, τότε:

(A_1) $\lim\limits_{t \to t_0} [\underline{u}(t) + \underline{w}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \underline{w}(t) = \underline{u}_0 + \underline{w}_0$

(A_2) $\lim\limits_{t \to t_0} [h(t)\,\underline{u}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} h(t) \lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) = h_0 \underline{u}_0$.

(A_3) Αν $h_0 \neq 0$, τότε:

$$\lim_{t \to t_0} [\underline{u}(t)/h(t)] = \lim_{t \to t_0} \underline{u}(t) / \lim_{t \to t_0} h(t) = \underline{u}_0 / h_0 .$$

(A_4) $\lim\limits_{t \to t_0} [\underline{u}(t) \cdot \underline{w}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) \cdot \lim\limits_{t \to t_0} \underline{w}(t) = \underline{u}_0 \cdot \underline{w}_0$

(A_5) $\lim\limits_{t \to t_0} [\underline{u}(t) \times \underline{w}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \underline{w}(t) = \underline{u}_0 \times \underline{w}_0$

(A_6) Αν $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{u}(t) = \underline{u}(t_0)$, $t = h(w)$ και $\lim\limits_{w \to w_0} h(w) = t_0$ τότε:

$$\lim_{t \to t_0} \underline{u}(h(w)) = \underline{u}\left(\lim_{w \to w_0} h(w)\right) = \underline{u}(t_0)$$

Θεώρημα 1.1.3: Η διανυσματική συνάρτηση

$$\underline{u}(t) = u_1(t)\,\underline{i} + u_2(t)\,\underline{j} + u_3(t)\,\underline{k}$$

είναι συνεχής στο $I = [\alpha, \beta]$, δηλαδή είναι συνεχής για κάθε t στο I, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ είναι αντιστοίχως συνεχείς συναρτήσεις στο I.

Για τη συνέχεια των διανυσματικών συναρτήσεων, αποδεικνύεται ότι το άθροισμα, το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις και ακόμη η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτησης.

Θεώρημα 1.1.4: Μία διανυσματική συνάρτηση

$$\underline{u}(t) = u_1(t)\,\underline{i} + u_2(t)\,\underline{j} + u_3(t)\,\underline{k}$$

είναι παραγωγίσιμη στο t_0, αν και μόνον αν κάθε συντεταγμένη συνάρτηση $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και μάλιστα έχουμε:

$$\underline{u}'(t_0) = u_1'(t_0)\,\underline{i} + u_2'(t_0)\,\underline{j} + u_3'(t_0)\,\underline{k} .$$

Αν η $\underline{u}(t)$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα I, τότε και η $\underline{u}'(t)$ είναι επίσης μια διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο I. Στην περίπτωση που και η $\underline{u}'(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο I, λέμε ότι η αρχική συνάρτηση έχει παράγωγο δεύτερης τάξης και συμβολίζεται με $\underline{u}''(t)$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Στις διανυσματικές συναρτήσεις $\underline{u} = \underline{u}(t)$, όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί

$$u' = \frac{d\underline{u}}{dt} = u'(t), \qquad u'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\underline{u}}{dt}\right) = \frac{d^2\underline{u}}{dt^2} = u''(t) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν η $\underline{u}(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, τότε η $\underline{u}(t)$ είναι συνεχής στο t_0.

Για τις παραγώγους διανυσματικών συναρτήσεων ισχύει ότι:

Αν οι $\underline{u}(t)$, $\underline{v}(t)$, $\underline{w}(t)$ και $h(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής t στο διάστημα $I = [\alpha, \beta]$ τότε,

$$(B_1) \quad \frac{d}{dt}(\underline{u}+\underline{v}) = \frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$(B_2) \quad \frac{d}{dt}(h\cdot\underline{u}) = h\frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{dh}{dt}\underline{u}$$

$$(B_3) \quad \frac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{v}) = \underline{u}\cdot\frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{d\underline{u}}{dt}\cdot\underline{v}$$

$$(B_4) \quad \frac{d}{dt}(\underline{u}\times\underline{v}) = \underline{u}\times\frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{d\underline{u}}{dt}\times\underline{v}\,.$$

$$(B_5) \quad \frac{d}{dt}(\underline{u}\,(\underline{v}\times\underline{w})) = \underline{u}\cdot\underline{v}\times\frac{d\underline{w}}{dt} + \underline{u}\cdot\frac{d\underline{v}}{dt}\times\underline{w} + \frac{d\underline{u}}{dt}\cdot\underline{v}\times\underline{w}\,.$$

$$(B_6) \quad \frac{d}{dt}[\underline{u}\times(\underline{v}\times\underline{w})] = \underline{u}\times\left(\underline{v}\times\frac{d\underline{w}}{dt}\right) + \underline{u}\times\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\times\underline{w}\right) + \frac{d\underline{u}}{dt}\times(\underline{v}\times\underline{w})\,.$$

(B_7) Αν η διανυσματική συνάρτηση $\underline{u} = \underline{u}(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο I_t και η πραγματική συνάρτηση $t = t(w)$ είναι παραγωγίσιμη στο I_w (όπου η εικόνα $h(I_w)$ περιέχεται στο διάστημα I_t), τότε η σύνθετη συνάρτηση $\underline{u} = \underline{g}(w) = \underline{u}(h(w))$ είναι παραγωγίσιμη στο I_W και μάλιστα είναι

$$\frac{d\underline{u}}{dw} = \frac{d\underline{u}}{dt}\frac{dt}{dw}$$

(B_8) Αν το $\underline{u}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, τότε θα είναι:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{0} \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}\left(\underline{u}\, h(t)\right) = \underline{u}\,\frac{dh(t)}{dt}\,.$$

(B_9) Αν η $\underline{u}$ συμβεί να έχει σταθερό μέτρο, δηλαδή $|\underline{u}|$ = σταθερό, τότε θα έχουμε:

$$\underline{u}\cdot\underline{u} = \text{σταθερό}\,,$$

οπότε παραγωγίζοντας θα έχουμε:

$$\underline{u}\cdot\frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{u}}{dt}\cdot\underline{u} = 0 \quad \text{ή} \quad \underline{u}\,\frac{d\underline{u}}{dt} = 0$$

δηλαδή τα $\underline{u}$ και $\frac{d\underline{u}}{dt}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ειδικότερα στην περίπτωση που η $\underline{u}$ είναι μία μοναδιαία διανυσματική συνάρτηση, τότε το $\frac{d\underline{u}}{dt}$ είναι κάθετο στο $\underline{u}$.

(B_{10}) Από την παραγώγιση της (1.1.1) προκύπτει ότι:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{du_1}{dt}\,\underline{i} + \frac{du_2}{dt}\,\underline{j} + \frac{du_3}{dt}\,\underline{k}\,,$$

καθόσον τα $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ είναι σταθερά διανύσματα.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1.1: Αν $\underline{R} = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t\underline{k}$, τότε να βρεθούν:

$$\text{a) } \frac{d\underline{R}}{dt}\,, \quad \text{b) } \frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\,, \quad \text{c) } \left|\frac{d\underline{R}}{dt}\right| \quad \text{και} \quad \text{d) } \left|\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right|$$

Λύση: Έχουμε:

a) $\frac{d\underline{R}}{dt} = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \underline{k}$

b) $\frac{d^2\underline{R}}{dt^2} = -\cos t\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j}$

c) $\left|\frac{d\underline{R}}{dt}\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}\,.$

d) $\left|\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1\,.$

Παράδειγμα 1.1.2: Αν

$$\underline{u} = 5t^2\underline{i} + t\underline{j} - t^3\underline{k}$$
$$\underline{w} = \sin t\,\underline{i} - \cos t\,\underline{j}\,.$$

τότε να υπολογισθούν τα:

$$\text{a)}\ \frac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{w}),\quad \text{b)}\ \frac{d}{dt}(\underline{u}\times\underline{w})\quad \text{και}\quad \text{c)}\ \frac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{u})\,.$$

Λύση: α) $\underline{u}\cdot\underline{w} = 5t^2 \sin t - t\cos t$. Συνεπώς:

$$\frac{d}{dt}(\underline{u}\cdot\underline{w}) = \frac{d}{dt}(5t^2\sin t - t\cos t) = 5t^2\cos t + 10t\sin t + t\sin t - \cos t =$$

$$= (5t^2-1)\cos t + 11t\sin t\,.$$

β) **1ος τρόπος:**

$$\bar{u}\times\bar{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\underline{u}\times\underline{w}) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = (t^3\sin t - 3t^2\cos t)\,\underline{i} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\,\underline{j} +$$

$$+ (5t^2\sin t - 11t\cos t - \sin t)\,\underline{k}\,.$$

2ος τρόπος: Έχουμε

$$\frac{2d}{dt}(\underline{u}\times\underline{w}) = \underline{u}\times\frac{d\underline{w}}{dt} + \frac{d\underline{u}}{dt}\times\underline{w} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [t^3 \sin t\, \underline{i} - t^3 \cos t\, \underline{j} + (5j^2 \sin t - t \cos t)\, \underline{k}] +$$
$$+ [-3t^2 \cos t\, \underline{i} - 3t^2 \sin t\, \underline{j} + (-10t \cos t - \sin t)\, \underline{k}] =$$
$$= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\, \underline{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\, \underline{j} +$$
$$+ (5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t)\, \underline{k} .$$

c) Έχουμε

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = (5t^2)^2 + (t^2) + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6 .$$

Οπότε

$$\frac{d}{dt} (\underline{u} \cdot \underline{u}) = \frac{d}{dt} (25t^4 + t^2 + t^6) = 2t\, (1 + 50t^2 + 3t^4) .$$

Παράδειγμα 1.1.3: Ν' αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} \right) = \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^3\underline{v}}{dt^3} .$$

Λύση: 1ος τρόπος. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (B_5), έχουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} \right) = \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^3\underline{v}}{dt^3} + \underline{v} \cdot \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} +$$
$$+ \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} = \underline{v} \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^3\underline{v}}{dt^3} + 0 + 0 = \underline{v} \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^3\underline{v}}{dt^3} .$$

2ος τρόπος: Έχουμε

$$\underline{v}\, \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{d^2v_1}{dt} & \frac{d^2v_2}{dt} & \frac{d^2v_3}{dt} \end{vmatrix}$$

οπότε:

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \times \frac{d^2\underline{v}}{dt^2} \right) = \begin{vmatrix} \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{d^2v_1}{dt} & \frac{d^2v_2}{dt} & \frac{d^2v_3}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{d^2v_1}{dt^2} & \frac{d^2v_2}{dt^2} & \frac{d^2v_3}{dt^2} \\ \frac{d^2v_1}{dt^2} & \frac{d^2v_2}{dt^2} & \frac{d^2v_3}{dt^2} \end{vmatrix} +$$