Δήμητρας Δημητροπούλου - Ψωμοπούλου

Λέκτορα του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Στοιχεία Γενικών Μαθηματικών

Β' έκδοση

Εκδόσεις Ζήτη
Θεσσαλονίκη 1992

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τον συγγραφέα

Δεύτερη έκδοση 1992

ISBN 960-431-183-2

Φωτοστοιχειοθεσία-Εκτύπωση:	*Βιβλιοπωλείο:*
Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ Ο.Ε.	**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Σόλωνος 79-81 ☎ και Fax 825 453, 849 178, 542 48 Θεσσαλονίκη	Αρμενοπούλου 27 ☎ 203 720 546 35 Θεσσαλονίκη

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται σε μερικές έννοιες των Ανωτέρων Μαθηματικών που διδάσκονται στο υποχρεωτικό μάθημα "Γενικά Μαθηματικά" στο Α εξάμηνο του Τμήματος Φαρμακευτικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Περιέχει έννοιες του Λογισμού συναρτήσεων και της Αναλυτικής Γεωμετρίας με συμπληρωματικά στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Διαφορικών Εξισώσεων.

Στη νέα έκδοση, γίνεται κάποια ανακατάταξη με μικρές αλλαγές και προσθήκες στην ύλη του πρώτου μέρους. Συγχρόνως συμπληρώνεται με στοιχεία απ' την ύλη του δευτέρου μέρους, ώστε να υπάρχει ολοκληρωμένη εικόνα των εννοιών που χρησιμοποιούνται. Όπως και στην αρχική έκδοση οι μαθηματικές έννοιες δίνονται σύντομα και απλά χωρίς να χρησιμοποιείται αυστηρά μαθηματική γλώσσα, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εφαρμογή σ' άλλα μαθήματα.

Περιλαμβάνει έξη κεφάλαια. Τα θεωρήματα και οι τύποι που περιέχονται στα κεφάλαια αυτά δίνονται χωρίς αποδείξεις αλλά με αρκετές επεξηγήσεις. Οι έννοιες αναλύονται με παραδείγματα, ώστε να γίνουν κατανοητές. Καθένα κεφάλαιο συμπληρώνεται με αρκετές άλυτες ασκήσεις. Οι απαντήσεις τους δίνονται στο παράρτημα.

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας στο επίπεδο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετώνται αναλυτικά οι έννοιες της ορίζουσας και των γραμμικών συστημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, με την βοήθεια της έννοιας των πινάκων.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται, αρχικά οι σημαντικότερες απ' τις στοιχειώδεις συναρτήσεις και οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Στη συνέχεια αναλύεται η έννοια της παραγώγισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής, οι τρόποι παραγώγισής τους και δίνονται εφαρμογές στη μελέτη των συναρτήσεων.

Το τέταρτο κεφάλαιο μελετά την ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Στο επόμενο κεφάλαιο, στα πλαίσια των εφαρμογών της ολοκλή-

ρωσης συναρτήσεων, λύνονται απλές περιπτώσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Τέλος, το έκτο κεφάλαιο, δίνει κάποια στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου. Εξ' άλλου, με τη βοήθεια της μερικής παραγώγισης συναρτήσεων δύο μεταβλητών, δίνεται συντομότερα η παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Θεσσαλονίκη, 1992 *Δ. Δημητροπούλου - Ψωμοπούλου*

Περιεχόμενα

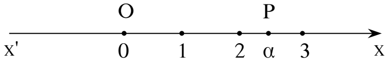
1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

1.1. Άξονας τετμημένων και απόσταση δύο σημείων του άξονα

Η Αναλυτική Γεωμετρία εισάγει αριθμούς στη Γεωμετρία με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων. Αρχικά ορίζεται μια κλίμακα αριθμών στην ευθεία. Μ' αυτόν τον τρόπο κάθε σημείο P της ευθείας ταυτοποιείται μ' ένα πραγματικό αριθμό α.

Παράδειγμα 1.1.1. Στην ευθεία $x'x$, στο σημείο P αντιστοιχεί ο πραγματικός αριθμός $\frac{5}{2}$.



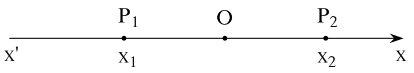
Ορισμός 1.1.1.

Μια ευθεία $x'x$, που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός, λέγεται **άξονας τετμημένων** ή **άξονας των x**. Το σημείο O που αντιστοιχεί στον αριθμό μηδέν λέγεται **αρχή** του άξονα, και ο πραγματικός αριθμός α που αντιστοιχεί στο σημείο P λέγεται **τετμημένη** του P. Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας,** και η Ox **αρνητικός ημιάξονας.**

Είναι φανερό ότι η παραπάνω ευθεία είναι προσανατολισμένη εφόσον με τον όρο "αρνητικός" και "θετικός" ημιάξονας έχει οριστεί "φορά" στην ευθεία.

Αν P_1, P_2 είναι δύο σημεία του άξονα των x με τετμημένες αντίστοιχα x_1 και x_2 η απόστασή τους συμβολίζεται με $\mathbf{d(P_1, P_2)}$ και είναι

(1.1.1) $$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|.$$



Παράδειγμα 1.1.2. Αν οι τετμημένες των σημείων P_1, P_2 είναι –2 και 3 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι

$$d(P_1, P_2) = |3-(-2)| = 5.$$

1.2. Ασκήσεις

1.2.1. Αν $P_1, P_2,$ και P_3 είναι τρία σημεία του άξονα των x με τετμημένες –2, 1/2, 3 αντίστοιχα, να βρεθεί η παράσταση

$$\frac{d(P_1, P_2)\cdot d(P_2, P_3)}{d(P_1, P_3)} .$$

1.2.2. Αν P_1, P_2, P_3, P_4 είναι τέσσερα διαδοχικά σημεία του άξονα των x με τετμημένες –3, 0, 1, 4 αντίστοιχα, να δειχθεί ότι

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + d(P_3, P_4) = d(P_1, P_4).$$

1.2.3. Να βρεθεί σημείο P του άξονα των x που να απέχει εξίσου από τα σημεία P_1 και P_2 με τετμημένες –2 και 5 αντίστοιχα.

1.2.4. Να βρεθεί σημείο P του άξονα των x έτσι ώστε η απόστασή του από το σημείο P_1 με τετμημένη –3 να είναι διπλάσια της απόστασής του από το σημείο P_2 με τετμημένη 1.

1.2.5. Να βρεθεί σημείο P του άξονα των x έτσι ώστε το γινόμενο των αποστάσεών του από τα σημεία P_1 και P_2 με τετμημένες –3 και 1 αντίστοιχα, να είναι 2.

1.3. Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο - Απόσταση δύο σημείων του επιπέδου

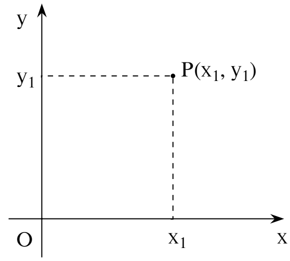
Η μελέτη της Αναλυτικής Γεωμετρίας στο επίπεδο βασίζεται στην παρατήρηση ότι κάθε σημείο P του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Α) Ας θεωρήσουμε στο επίπεδο δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους και σε κάθε μια να έχει ορισθεί μια αμφιμονότιμη αντιστοιχία με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το μηδέν στην τομή των δύο ευθειών και την ίδια αριθμητική κλίματα για τις δύο ευθείες.

Ορισμός 1.3.1.

Η οριζόντια ευθεία λέγεται **άξονας των x ή άξονας των τετμημένων** και η κατακόρυφη ευθεία **άξονας των y ή άξονας των τεταγμένων.** Το ζεύγος των δύο αξόνων λέγεται **σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων** και γράφεται Oxy. Η τομή τους λέγεται **αρχή.**

Με τη βοήθεια των δύο αξόνων σε κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών. Πράγματι, η κατακόρυφη γραμμή που περνά από το P τέμνει τον άξονα των x σ' ένα αριθμό x_1, και η οριζόντια γραμμή που περνά από το P τέμνει τον άξονα των y σ' ένα σημείο που αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό y_1.



Ορισμός 1.3.2.

Ο αριθμός x_1 λεγεται **τετμημένη** του σημείου P και ο αριθμός y_1 **τεταγμένη.** Το ζεύγος (x_1, y_1) είναι οι **καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου P. Γράφουμε $P\,(x_1, y_1)$.

Αν P_1, P_2 είναι δύο σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα ως προς το σύστημα Oxy, αποδεικνύεται ότι η απόσταση $d(P_1, P_2)$ δίνεται από τη σχέση

(1.3.1) $$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

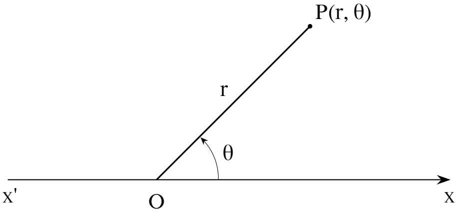
Παράδειγμα 1.3.1. Αν οι συντεταγμένες των σημείων P_1, P_2 του επιπέδου είναι $(2, -3)$ και $(5, 1)$ αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους βάσει του τύπου (1.3.1) είναι

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(5-2)^2+(1+3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Επιπλέον αν $P(x, y)$ είναι το μέσον του τμήματος P_1P_2, τότε

(1.3.2) $$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Β) Ένας άλλος τρόπος που αντιστοιχίζουμε σε κάθε σημείο P του επιπέδου ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών είναι ο παρακάτω:



Θεωρούμε μια ευθεία x x και ένα σημείο O της ευθείας. Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία x x είναι άξονας, δηλαδή ότι έχει ορισθεί αριθμητική κλίμακα και φορά. Στο σημείο O αντιστοιχεί το μηδέν. Επιπλέον ορίζεται η θετική φορά για τις γωνίες στο επίπεδο, που είναι αντίθετη προς τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Ορισμός 1.3.3.

Το σημείο O λέγεται **πόλος** και η ευθεία x x **πολικός άξονας.** Ο πολικός άξονας και ο πόλος ορίζουν ένα **πολικό σύστημα συντεταγμένων.**

Σε κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχούν η απόσταση r του σημείου P από τον πόλο O και η γωνία θ, προς τη θετική φορά, που σχηματίζει ο άξονας x x και η ευθεία των σημείων O και P.

Ορισμός 1.3.4.

Η απόσταση r λέγεται **πολική ακτίνα** και η γωνία θ **πολική γωνία.** Το ζεύγος των αριθμών (r, θ) είναι οι **πολικές συντεταγμένες του σημείου P.** Γράφουμε P (r, θ).

Αποδεικνύεται ότι αν (x, y) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P, τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις ανάμεσα στις πολικές και καρτεσιανές συντεταγμένες:

(1.3.3.) $$x = r\,\text{συν}\theta, \quad y = r\,\text{ημ}\theta$$

και

(1.3.4.) $$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \quad εφθ = \frac{y}{x}\,.$$

1.4. Ασκήσεις

1.4.1. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α (7, 5), Β(2, 3) και Γ(6, –7) του επιπέδου Oxy είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

1.4.2. Να βρεθεί σημείο P(x, y) που να απέχει εξίσου από τα σημεία $P_1(8, 6)$, $P_2(1, 7)$ και $P_3(7, -1)$.

1.4.3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2, 1), Β(3, 3), Γ(4, 2). Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

1.4.4. Να δειχθεί ότι τα σημεία $Α(0, 3\sqrt{3})$, Β(–3, 0), και Γ (3, 0) και είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

1.4.5. Να δειχθεί ότι τα σημεία Α(2, 3), Β(4, 1), Γ(8, 2) και Δ(6, 4) είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

1.4.6. Αν (2, –1) και (3,2) είναι διαδοχικές κορυφές παραλληλογράμμου με κέντρο (4, –2), να βρεθούν οι συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του παραλληλογράμμου.

1.4.7. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (5,3) (0, 0) και (2,8) είναι ισοσκελές.

1.5. Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο

Έστω (ε) μια ευθεία στο επίπεδο και Oxy ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

Ορισμός 1.5.1.

Εξίσωση της ευθείας (ε) είναι μια εξίσωση με δύο αγνώστους x και y, που έχει την ιδιότητα, οι συντεταγμένες κάθε σημείου της ευθείας (ε) και μόνον αυτές να την επαληθεύουν.

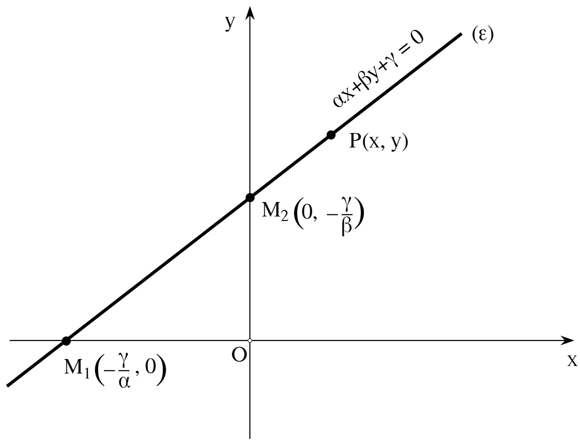
Α) Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση μιας ευθείας (ε) έχει τη μορφή

(1.5.1) $$αx+βy+γ = 0$$

όπου α, β, γ είναι σταθεροί αριθμοί και ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι διάφορος του μηδενός.

Ορισμός 1.5.2.

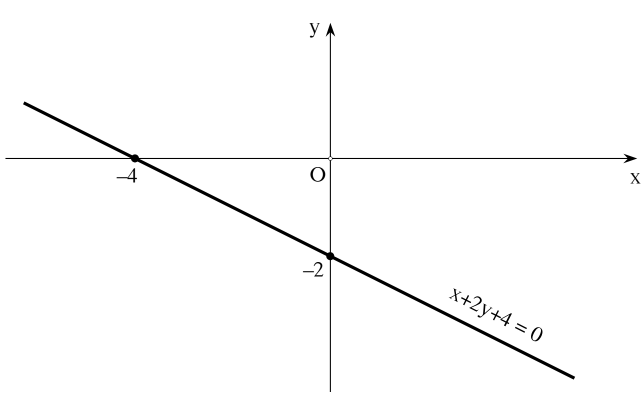
Τα σημεία $M_1\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ και $M_2\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ είναι οι τομές της ευθείας (ε) με τους άξονες x και y αντίστοιχα και λέγονται **συντεταγμένες ως προς την αρχή** της ευθείας (ε).



Παράδειγμα 1.5.1. Η εξίσωση

$$x+2y+4 = 0$$

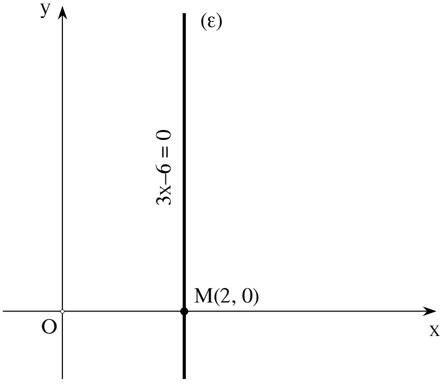
παριστά ευθεία (ε) που τέμνει τους άξονες των x και y αντίστοιχα στα σημεία $M_1(-4, 0)$ και $M_2(0, -2)$.



Παράδειγμα 1.5.2. Η εξίσωση

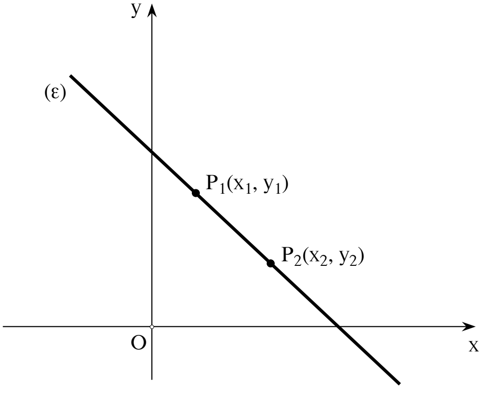
$$3x - 6 = 0$$

παριστά ευθεία (ε) που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $M(2, 0)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα των y.



B) Στην περίπτωση που είναι γνωστά δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ της ευθείας, τότε η ζητούμενη εξίσωσή της είναι

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1.5.2}$$



Ο παραπάνω τύπος με την βοήθεια ορίζουσας (βλ. §2.6) γράφεται

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5.3}$$

Παράδειγμα 1.5.3. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $P_1(2, 3)$ και $P_2(-1, 0)$, βάσει του τύπου (1.5.2), είναι

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{0-3},$$

δηλαδή

$$x-y+1 = 0.$$

Ειδικά, αν (κ, 0) και (0, λ) είναι οι συντεταγμένες ως προς την αρχή ευθείας (ε) με τους άξονες των x και y αντίστοιχα, τότε η εξίσωσή της είναι

(1.5.4.) $$\frac{x}{\kappa} + \frac{y}{\lambda} = 1.$$

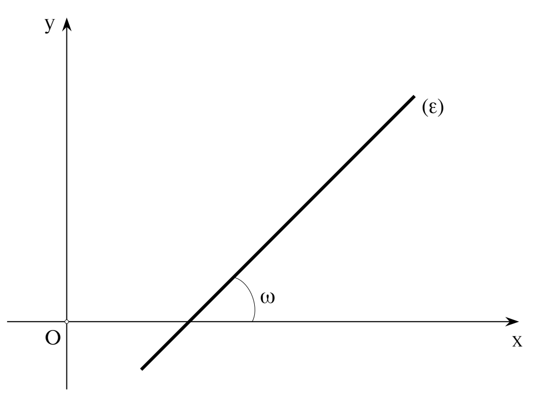
Παράδειγμα 1.5.4. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία (2, 0) και (0, 3), βάσει του τύπου (1.5.4.), είναι

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Ορισμός 1.5.3.

Ο **συντελεστής διεύθυνσης** μίας ευθείας (ε) συμβολίζεται με **λ** και είναι η εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x, δηλαδή

(1.5.5) $$\lambda = \varepsilon\varphi\omega.$$



Ισχύουν τα εξής:

(α) αν λ=0, δηλαδή ω=0°, η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με τον άξονα των x ή συμπίπτει με αυτόν, (β) αν $\lambda = \pm\bullet$, δηλαδή $\omega=90°$, η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με τον άξονα των y ή συμπίπτει με αυτόν.

Γ) Αν είναι γνωστός ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας (ε) και ένα σημείο $P_1(x_1, y_1)$ της ευθείας, τότε η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τη σχέση

$$y-y_1 = \lambda(x-x_1). \tag{1.5.6}$$

Παράδειγμα 1.5.5. Έστω ότι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x είναι $\omega=45°$ (εφω=1) και ότι η ευθεία περνά απ' το σημείο $P_1(1,2)$. Τότε βάσει του τύπου (1.5.6) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι

$$y-2 = 1(x-1),$$

δηλαδή

$$x-y+1 = 0.$$

1.6. Ασκήσεις

1.6.1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες ως προς την αρχή των ευθειών,

$$2x+3y-5 = 0 \text{ και } x-y+8 = 0.$$

1.6.2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία (1, 2) και (5, –1).

1.6.3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (0, 1) και έχει γωνία κλίσης 60° (εφ60° = ÷3).

1.6.4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (–1, 1) και είναι

α) παράλληλη προς τον άξονα των x,

β) παράλληλη προς τον άξονα των y.

1.6.5. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(1, 3), Β(3, –1), Γ(–5, 1).

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του ΑΒΓ.

β) Να βρεθούν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ του τριγώνου.

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διαμέσων του.

1.6.6. Να βρεθεί η τιμή του α έτσι ώστε η ευθεία

$$\alpha x+2y = 5$$

να περνά από το σημείο (1, –1).

1.6.7. Να εξεταστεί αν τα σημεία (1, 2), (5, 3) και (18, 6) βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

1.6.8. Βρείτε τρία σημεία της ευθείας $2x-3y+5=0$.

1.6.9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας όταν οι συντεταγμένες ως προς την αρχή είναι (3, 0) και (0, –1).

1.7. Άλλες μορφές του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας

Θα δούμε τώρα τις μορφές του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας στις περιπτώσεις Α) και Β) της προηγούμενης παραγράφου.

α) Στην περίπτωση που η εξίσωση μιας ευθείας (ε) δίνεται από τον τύπο (1.5.1), αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.7.1}$$

Παράδειγμα 1.7.1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

$$3x+2y+1=0$$

είναι

$$\lambda = -\frac{3}{2}.$$

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση της ευθείας (ε) δίνεται από τη σχέση (1.5.2), είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι

$$\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{1.7.2}$$

Παράδειγμα 1.7.2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που περνά από τα σημεία $P_1(1, 2)$ και $P_2(0, 1)$ είναι

$$\lambda = \frac{1-2}{0-1} = 1.$$

1.8. Ασκήσεις

1.8.1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών

$$x+y-1=0,\quad 2x+3=0,\quad y+5=0.$$

1.8.2. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που περνά από τα σημεία $(1,-1)$, $(5, 3)$ και η εξίσωση της ευθείας αυτής.

1.8.3. Να δειχτεί ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία $(1, -2)$, $(3, 4)$ και $(2, 2)$, $(1-1)$ αντίστοιχα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

1.8.4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημειο $(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $2\lambda+3$, όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $5x-2y = 8$.

1.9. Σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο

Έστω ότι δίνονται οι ευθείες

(1.9.1)
$$\begin{aligned}(\varepsilon_1)&: \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 = 0,\\ (\varepsilon_2)&: \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 = 0.\end{aligned}$$

α) Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) συμπίπτουν ή είναι παράλληλες, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα (1.9.1) με αγνώστους τα x και y είναι αόριστο ή αδύνατο, δηλαδή η ορίζουσα (Βλ. §2.10)

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0,$$

ή ακόμη

$$\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1,$$

ή

(1.9.2)
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Άρα, οι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) για να **συμπίπτουν** ή να **είναι παράλληλες** πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Αν επιπλέον

(1.9.3)
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

αυτό σημαίνει ότι το σύστημα (1.9.1) είναι αόριστο και οι ευθείες (ε_1), (ε_2) **συμπίπτουν,** ενώ αν

(1.9.4)
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \pi \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

αυτό σημαίνει ότι το σύστημα (1.9.1) είναι αδύνατο και οι ευθείες είναι **παράλληλες.**

β) Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) τέμνονται, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα (1.9.1) έχει μοναδική λύση, δηλαδή

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix} \ \pi\ 0,$$

ή ακόμη

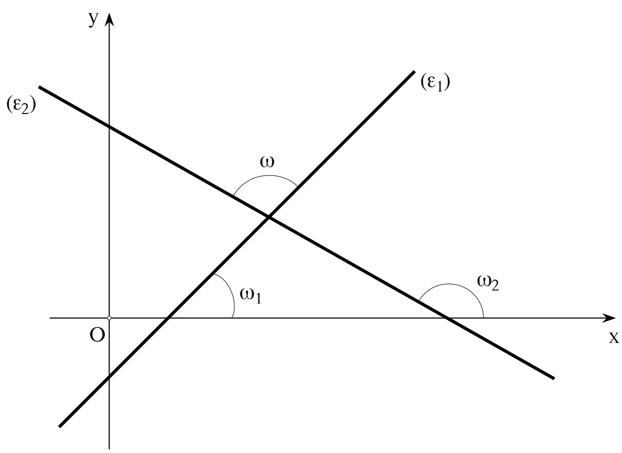
$$\alpha_1\beta_2 \ \pi\ \alpha_2\beta_1,$$

ή

(1.9.5) $$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \ \pi\ \frac{\alpha_2}{\beta_2}\,.$$

Άρα, οι δύο ευθείες (ε_1), (ε_2) για να **τέμνονται πρέπει** να έχουν διάφορους συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1 \pi \lambda_2.$$



Στην περίπτωση αυτή, έστω ότι

$$\omega = \omega_2 - \omega_1$$

είναι η γωνία των τεμνομένων ευθειών (ε_1), (ε_2).

Αποδεικνύεται ότι

(1.9.6) $$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\,.}$$

Ειδικά αν $\omega = 90°$ τότε $\varepsilon\varphi\omega = \pm\bullet$ και

$$1+\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

δηλαδή

(1.9.7) $$\boxed{\lambda_1\lambda_2 = -1.}$$

Συμπέρασμα 1.9.1. Όταν δοθούν οι ευθείες (1.9.1), τότε

i) $(\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2) \qquad \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2},$

ii) $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \qquad \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2},$

iii) $(\varepsilon_1) \nparallel (\varepsilon_2) \qquad \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ και η εφαπτομένη της γωνίας των τεμνομένων ευθειών δίνεται από τον τύπο (1.9.6). Ειδικά αν (ε_1) (ε_2), μεταξύ των συντελεστών διεύθυνσης ισχύει η σχέση (1.9.7).

Παράδειγμα 1.9.1. Οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): 5x+4y+3 = 0,$$
$$(\varepsilon_2): 10x+8y+1 = 0$$

είναι παράλληλες εφόσον

$$\frac{5}{10} = \frac{4}{8} \neq \frac{3}{1}.$$

Παράδειγμα 1.9.2. Οι ευθείες

(1.9.8) $$\begin{aligned}(\varepsilon_1)&: 2x-3y-1=0,\\ (\varepsilon_2)&: 4x+6y-14 = 0\end{aligned}$$

τέμνονται, εφόσον

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12+12 = 24 \neq 0.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής βρίσκονται από τη λύση του συστήματος (1.9.8) και είναι, βάσει του κάνόνα του Cramer (βλ. §2.10),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 14 & 6 \end{vmatrix}}{24} = \frac{6+42}{24} = 2,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 14\end{vmatrix}}{24}=\frac{28-4}{24}=1.$$

Παράδειγμα 1.9.3. Οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): 2x+3y+1=0,$$
$$(\varepsilon_2): 3x-2y+7=0$$

τέμνονται, εφόσον

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-9=-13\pi 0,$$

και επιπλέον είναι κάθετες εφόσον

$$\lambda_1=-\frac{2}{3},\quad \lambda_2=\frac{3}{2}\quad \text{και}\quad \lambda_1\lambda_2=\ -\frac{2}{3}\quad \frac{3}{2}\ =-1.$$

1.10. Ασκήσεις

1.10.1. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών

$$(\varepsilon_1):\ 2x-y-8=0,$$
$$(\varepsilon_2):\ 6x-3y-24=0,$$
$$(\varepsilon_3):\ 4x-2y-3=0,$$
$$(\varepsilon_4):\ x+3y+5=0.$$

Αν τέμνονται, να βρεθούν τα σημεία τομής τους.

1.10.2. Αν (ε_1) είναι η ευθεία που περνά από τα σημεία $(1,6)$, $(-3, 2)$ και (ε_2) η ευθεία που περνά από τα σημεία $(0, -3)$, $(2, -6)$, να βρεθεί η εφαπτομένη της γωνίας των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

1.10.3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία.

$$2x-3y=2.$$

1.10.4. Να βρεθεί η τιμή του μ έτσι ώστε η ευθεία

$$\mu x+2y+7=0$$

να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$4x+8y+5 = 0.$$

1.10.5. Να δειχθεί ότι οι τρείς διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ της άσκησης (1.6.5) περνούν από το ίδιο σημείο και να προσδιοριστεί το σημείο αυτό.

1.10.6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία.

$$x-3y+7 = 0.$$

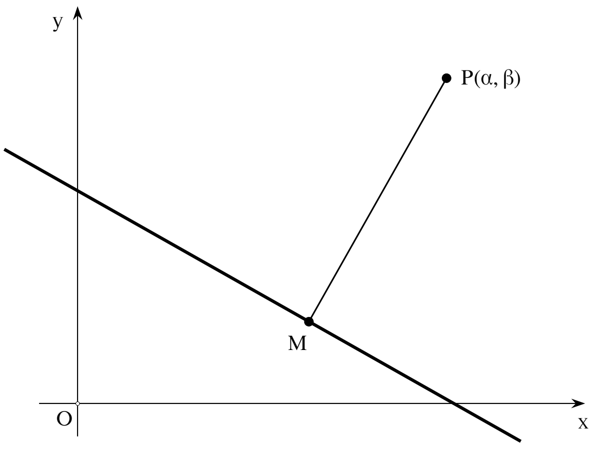
1.10.7. Αν $P_1(1, 2)$, $P_2(2, 3)$ και $P_3(-1, 6)$ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών αυτού του τριγώνου και οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β και Γ.

1.11. Απόσταση σημείου από ευθεία στο επίπεδο - Εμβαδόν τριγώνου

Έστω

$$Ax+By+\Gamma = 0 \tag{1.11.1}$$

η εξίσωση μιας ευθείας (ε) στο επίπεδο και $P(\alpha, \beta)$ ένα σημείο του επιπέδου.



Ορισμός 1.11.1

Απόσταση του σημείου P από την ευθεία (ε) λέγεται το μήκος του τμήματος PM, όπου M είναι η τομή της ευθείας (ε) με την κάθετη ευθεία που περνά από το σημείο P, και συμβολίζεται **d(P, (ε))**.

Αποδεικνύεται ότι η απόσταση d(P, (ε)) δίνεται από τον τύπο

(1.11.2)
$$d(P, (\varepsilon)) = d(P, M) = \frac{|A\alpha+B\beta+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Παράδειγμα 1.11.1. Έστω ότι δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon): 4x-3y+5 = 0$$

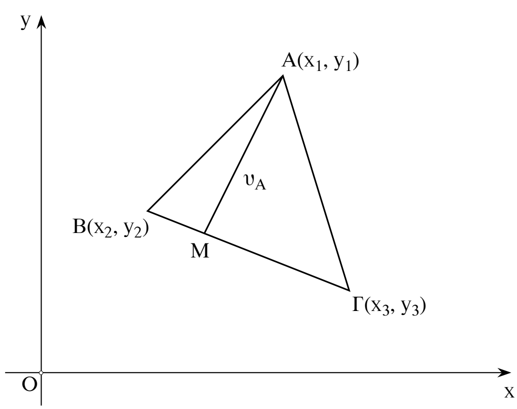
και ζητείται η απόσταση του σημείου P(1, 2) από αυτήν. Τότε βάσει του τύπου (1.11.2) έχουμε

$$d(P, (\varepsilon)) = \frac{|4\cdot 1-3\cdot 2+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{6}{5}.$$

Έστω τώρα $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία του επιπέδου. Είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E = \frac{1}{2}(B\Gamma)(AM)$$

όπου AM είναι το ύψος υ_A. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, μπορεί ν' αποδειχθεί ότι



(1.11.3)
$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.11.2. Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(-1, 0)$, βάσει του τύπου (1.11.3) είναι

$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(3+3+3) = \frac{9}{2}.$$

1.12. Ασκήσεις

1.12.1. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(1, -1)$ από την ευθεία (ε) που ορίζεται από τα σημεία (1, 1) και (4, –1).

1.12.2. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(1, 2)$ από τις διχοτόμους των αξόνων x και y.

1.12.3. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(0, 1)$ του επιπέδου Oxy. Να βρεθούν τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ.

1.12.4. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $\Gamma(-2, -3)$.

1.12.5. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες:

$$2x-y-3 = 0,$$
$$-x+2y = 0,$$
$$x+y-6 = 0.$$

1.12.6. Με τη βοήθεια της έννοιας του εμβαδού να δειχθεί ότι τα σημεία $A(2, 1)$, $B(8, -1)$ και $\Gamma(-1, 2)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Να βρεθεί η εξίσωση αυτής της ευθείας.

1.12.7. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου τομής των ευθειών $x-3y+6 = 0$ και $2x+y-9 = 0$ από την ευθεία $3x+5y-6 = 0$.

1.13. Κύκλος

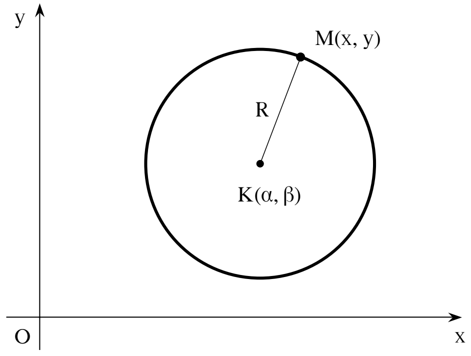
Θεωρούμε στο επίπεδο το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, ένα σημείο K του επιπέδου και ένα σταθερό αριθμό R.

Ορισμός 1.13.1.

Ένα σημείο M του επιπέδου θα λέμε ότι ανήκει στον **κύκλο** που ορίζεται από το σημείο K και τον αριθμό R, αν και μόνον αν το σημείο M απέχει απόσταση R από το σημείο K.

Δηλαδή, αν M(x, y)) είναι τυχόν σημείο του κύκλου, ισχύει

(1.13.1) $$d(M, K) = R.$$



Ορισμός 1.13.2.

Το σημείο K λέγεται **κέντρο** του κύκλου και ο αριθμός R **ακτίνα** του κύκλου.

Αν K(α, β) είναι το κέντρο του κύκλου, απ' τη σχέση (1.13.1) προκύπτει, ότι η εξίσωσή του είναι

(1.13.2) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2.$$

Παράδειγμα 1.13.1 Η εξίσωση του κύκλου με ακτίνα R=2 και κέντρο K(1, 2) είναι, βάσει του τύπου (1.13.2),

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 2^2$$

ή ακόμη

$$x^2+y^2-2x-4y+1 = 0.$$

Όπως μπορεί να δει κανείς αναπτύσσοντας τα τετράγωνα του τύπου (1.13.2), η γενική εξίσωση του κύκλου είναι

(1.13.3) $$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή, η ακτίνα δίνεται απ' τον τύπο